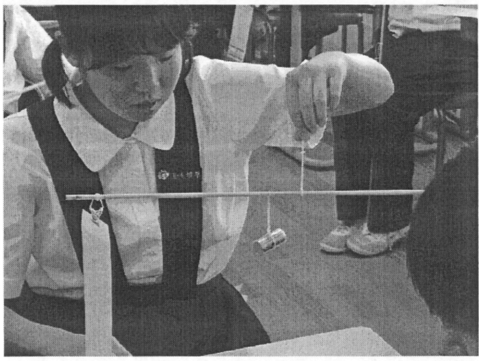
① 1次関数

1 1次関数

Q 右の写真のような道具を「さおばかり」といいます。このさおばかりを実際に作り，封筒1枚と便せんを何枚かつるして，便せんの枚数とつり合うおもりの位置の関係を調べてみましょう。



用意するもの

木の丸棒，洗濯ばさみ，たこ糸，フィルムケース，1円硬貨，おもり

実験

1 封筒を1枚下げたとき，つり合うおもりの位置に印をつける。

2 封筒1枚に便せんを1枚，2枚，3枚，…と加えていき，それぞれつり合うおもりの位置に印をつける。

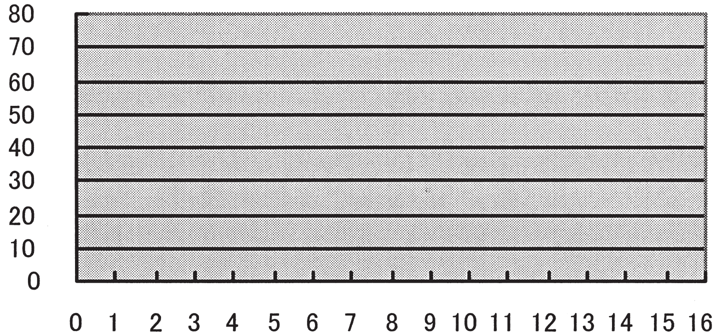
3 支点の位置から印までの距離をはかって記録する。

ゆみこさんはこの実験で，次の表のような結果を得ました。

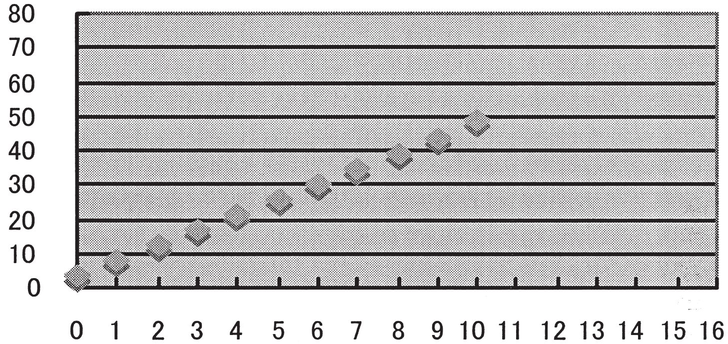
便せんの枚数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
支点からの距離	3.5	8	12.5	17	21.5	26	30.5	35	39.5	44	48.5

便せんが15枚のときは，支点から印までの距離は何cmになるでしょうか。

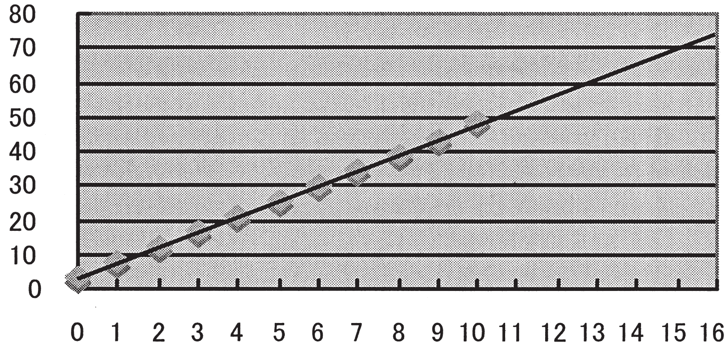
便せんが15枚のときの支点からの距離を求めるために，上のゆみこさんのデータをもとに，この関係をグラフに表してみましょう。



この表のデータをプロットしてみると，下の図のようになります。



点が直線上に並んでいるので，すべての点を通るように直線をひいてみます。



上のグラフで，便せんが 15 枚のときは，71cm と求めることができます。

このように，グラフをかくと，対応する値を求めることができます。

問　1　自分の実験データを使ってグラフをかき，便せんが 15 枚のときの支点からの距離を求めなさい。

下の表から，便せんが 1 枚増えるごとに支点からの距離が 4.5cm ずつ増えていることがわかります。しかし，便せんが 0 枚のとき，支点からの距離は 0cm ではないので，便せんの枚数と支点からの距離の関係は比例ではありません。

1　1　1　1　1　1　1　1

便せんの枚数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
支点からの距離	3.5	8	12.5	17	21.5	26	30.5	35	39.5	44	48.5

4.5　4.5　4.5　4.5　4.5　4.5　4.5　4.5

しかし，下の表のようにすると，(支点からの距離 y) − 3.5 の値は，便せんの枚数(x)に比例していることがわかります。

便せんの枚数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(支点からの距離) − 3.5	0	4.5	9	13.5	18	22.5	27	31.5	36	40.5	45

(支点からの距離) − 3.5 を Y として，Y と x の関係を式に表すと

$Y = 4.5x$　← Y は x に比例して，比例定数は 4.5 である

$Y = y - 3.5$　ですから　　$y - 3.5 = 4.5x$

したがって　　$y = 4.5x + 3.5$

14 ページのゆみこさんの実験では，$y = 4.5x + 3.5$ と表すことができました。このように，2 つの変数 x，y について，y が x の 1 次式で表されるとき，y は x の **1 次関数**であるといいます。支点からの距離は，便せんの枚数の 1 次関数です。

便せんが 15 枚のときの支点からの距離を知りたいときには，関係を表す式 $y = 4.5x + 3.5$ に $x = 15$ を代入して，$y = 71$ と求めることができます。

封筒だけ，つまり便せんが 0 枚のときの支点からの距離は 3.5cm であり，$y = 4.5x + 3.5$ のグラフは y 軸と (0, 3.5) で交わっています。この 3.5 のことを

$y = 4.5x + 3.5$ のグラフの**切片**

といいます。

2 変化の割合

Q $y=4.5x+3.5$ では，x の値が 1 ずつ増加するときの y の値の増加量は 4.5 でした。x の値が 5 だけ増加するときの y の増加量はどれだけですか。また，そのときの $\dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}$ の値を求めてみましょう。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	3.5	8	12.5	17	21.5	26	30.5	35	39.5	44	48.5

1 次関数では，$\dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}$ の値は一定です。この値を 1 次関数の**変化の割合**といい，$y=ax+b$ の a の値と等しくなります。

例 1 $y=4.5x+3.5$ で，x の値が 1 から 6 まで増加したときの，x の値の変化と y の値の変化について調べてみましょう。

x の増加量は　$6-1=5$

それに対応する y の増加量は，上の表から　$30.5-8=22.5$

したがって

$$\frac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}=\frac{22.5}{5}=4.5$$

問 1 1 次関数 $y=2x+3$ で，x の値が 3 から 7 まで増加したときの変化の割合を求めなさい。

問 2 1 次関数 $y=-3x-2$ で，x の値が次のように増加したときの変化の割合を求めなさい。

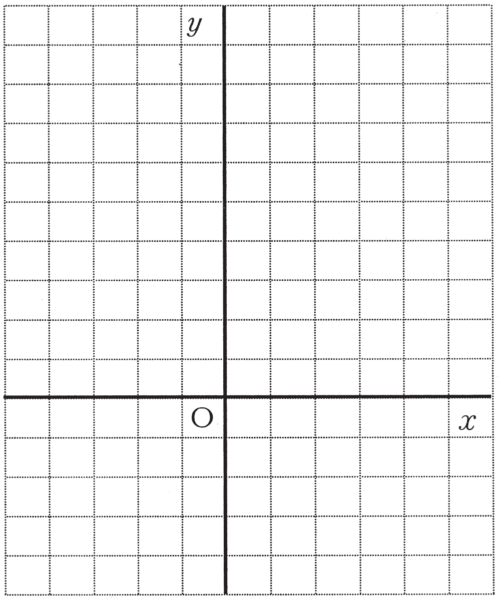
① 1 から 4 まで

② -6 から -2 まで

3　1次関数のグラフ

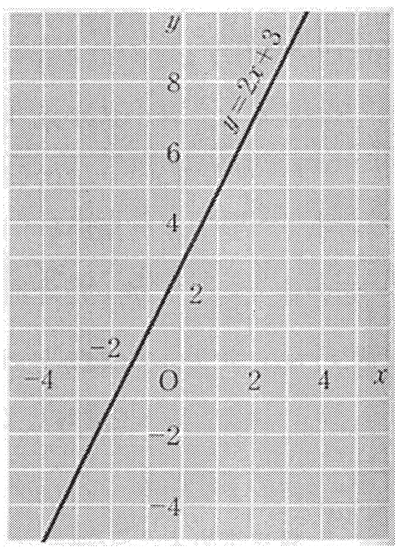
Q　1次関数 $y=2x+3$ の値の表をかき，グラフをかいてみましょう。

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…									…



上の表をくわしくし，もっと多くの点をとってグラフをかくと，右の図のような直線になります。

この直線は，$y=2x+3$ をみたす x，y の値の組 (x, y) を座標とする点の集合です。

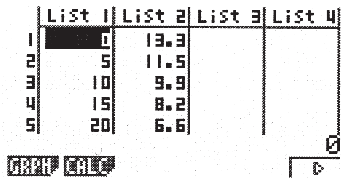


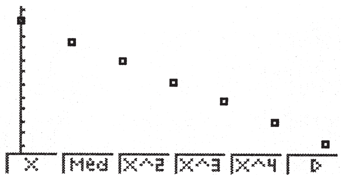
4　1次関数の利用

線香を燃やす実験で，線香に火をつけてからの時間を x 分，残りの線香の長さを y cm とすると，次のようなデータが得られました。

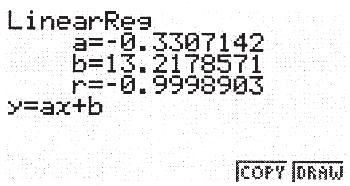
x 分	0	5	10	15	20	25	30
y cm	13.3	11.5	9.9	8.2	6.6	5.0	3.3

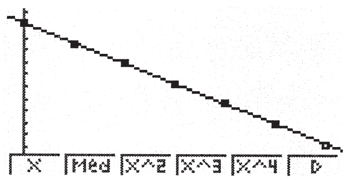
このデータをグラフ電卓に入力し，散布図をつくってみましょう。





変化の割合は一定ではありませんが，グラフにしてみると，点がほぼ直線に並んでいることがわかります。そこで，このグラフを直線とみてみましょう。

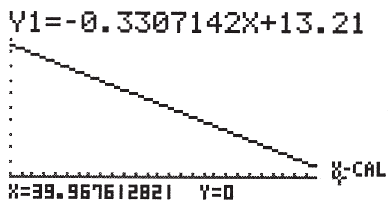




この直線の式は $y=-0.33x+13.2$　です。

このように，実験データから得られた関係を１つの式にまとめたものを**実験式**といいます。

G-Solv で $y=0$ のときの x の値を求めると，$x=40$ となります。燃えつきるところは $y=0$ なので，燃えつきるのはおよそ40分後とわかります。



問　1　$y=-0.33x+13.2$ の式で，-0.33 はどういう意味ですか。また，13.2　はどういう意味ですか。

Q 地上10kmくらいまでの気温は，高さの増加にともなって，一定の割合で低くなっていくことがわかっています。

地上の気温が21℃のとき，地上 x kmの高さの気温 y ℃は

$$y = -6.5x + 21$$

と表されます。

① このとき，地上5kmの高さの気温は何℃でしょうか。

② 気温が0℃になるのは，地上から何km上空でしょうか。

下の表は，高さの増加にともなって気温が変化していくようすを示したものです。

高さ（m）	気温（℃）	高さ（m）	気温（℃）	高さ（m）	気温（℃）
0	15.0	9000	−43.5	18000	−56.5
1000	8.5	10000	−50.0	19000	−56.5
2000	2.0	11000	−56.5	20000	−56.5
3000	−4.5	12000	−56.5	22000	−54.5
4000	−11.0	13000	−56.5	24000	−52.5
5000	−17.5	14000	−56.5	26000	−50.5
6000	−24.0	15000	−56.5	28000	−48.5
7000	−30.5	16000	−56.5	30000	−46.5
8000	−37.0	17000	−56.5	32000	−44.5

問 2 高さと気温の関係をグラフに表し，どんな関係があるか調べなさい。

問 3 空気中での音の速さを毎秒 y mとすると，気温が x ℃のときの音の速さは

$$y = 0.6x + 331$$

と表されます。

① 気温が −5℃のときの音の速さを求めなさい。

② 気温が22℃のとき，雷が光ってから6秒後に音が聞こえました。雷までの距離を求めなさい。

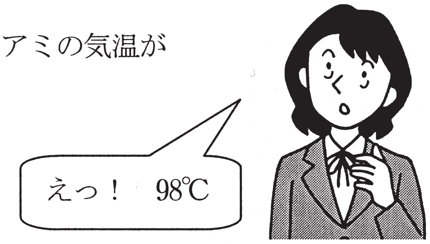
▶▶気温の単位について調べてみましょう。

衛星放送を観ていると，アメリカのマイアミの気温が

最高気温　98°

最低気温　30°

であると報道されていました。



日本ではセ氏（℃）の単位が使われていますが，アメリカではカ氏（°F）という単位が多く使われています。アメリカと日本では，気温の単位は異なっているのです。

マイアミの気温を日本で使われている℃の単位で表すと何℃になるか考えてみましょう。

ある気温を，アメリカの単位で表すと x°F となり，℃の単位で表すと y°C になるとき，x と y の間には，次の(1)の関係があります。

$$5x = 9y + 160 \qquad \cdots\cdots \quad (1)$$

(1)の式を使って，x から y を求める式を導いてみましょう。

$5x = 9y + 160$ の左辺と右辺を入れかえ，160 を移項すると

$$9y = 5x - 160$$

両辺を 9 でわると　$y = \dfrac{5x - 160}{9}$　　$\cdots\cdots$　(2)

問　4　シカゴのある日の最高気温は 69°F，最低気温が 49°F でした。シカゴの気温を，(2)の式を使って℃の単位で表しなさい。

(1)の式は，$5x - 9y - 160 = 0$ とも変形できます。

このような式を，2 つの文字 x，y をふくむ**2元1次方程式**といいます。

Q テニスボールを30個買うため，2個入りの缶と3個入りの缶を組み合わせて買うことにしました。2 種類の缶をどのように組み合わせて買えばよいでしょうか。2 個入りの缶を x 個，3 個入りの缶を y 個買うとして，x，y の関係を式に表してみましょう。

Q で求めた式を y について解くと　$y=-\frac{2}{3}x+10$　となります。

この式を利用して，テニスボールを30個買うときの2種類の缶の組み合わせを考えてみましょう。

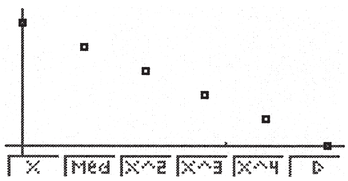
そのときの x と y の組み合わせを表に整理すると，次のようになります。

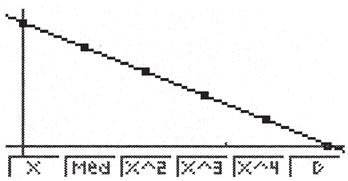
x	0	3	6	9	12	15
y	10	8	6	4	2	0

問 5 上の表をみて，気づくことをいいなさい。

x の値が3ずつ増えると，y の値は2ずつ減っています。x は2個入りの缶の個数なので，x の値が1だけ増えると，テニスボールは2個増えます。x の値が3増えるということはテニスボールが6個増えることになります。すると，3個入りの缶の個数は2減少することになります。

➲➲ 2元1次方程式 $2x+3y=30$ の解の値の組を x 座標，y 座標とする点をグラフ用紙にプロットし，直線のグラフになることを確認しましょう。





▶▶桜の開花日を予想してみましょう。

下の表は，仙台市の3月の平均気温を x℃，仙台市のソメイヨシノの開花日を4月 y 日として，そのデータを表に整理したものです。

Q 平成17年の3月の平均気温が4.1℃であったとき，4月何日に開花したと予想できるでしょうか。表からまず予想してみましょう。

年次	x（℃）	y（日）
昭和55	3.8	14
56	4.0	13
57	5.1	11
58	4.3	13
59	1.5	28
60	3.7	17
61	3.8	19
62	4.5	10
63	4.1	17
平成元	6.1	3
2	6.2	3
3	5.1	11
4	5.0	6

年次	x（℃）	y（日）
5	4.6	9
6	4.0	11
7	4.7	11
8	4.3	17
9	5.7	8
10	6.1	8
11	5.3	8
12	4.6	14
13	4.9	10
14	7.5	−3
15	4.8	9
16	5.4	7
17	4.1	?

（気象庁調べ）

x と y の関係を1次関数とみて，グラフ電卓を使って開花日を予想してみましょう。

問 6 グラフ電卓を使って，x と y の関係を $y=ax+b$ の形の式で表し，次の問に答えなさい。

① 求めた式から，平成17年の開花日を予想しなさい。

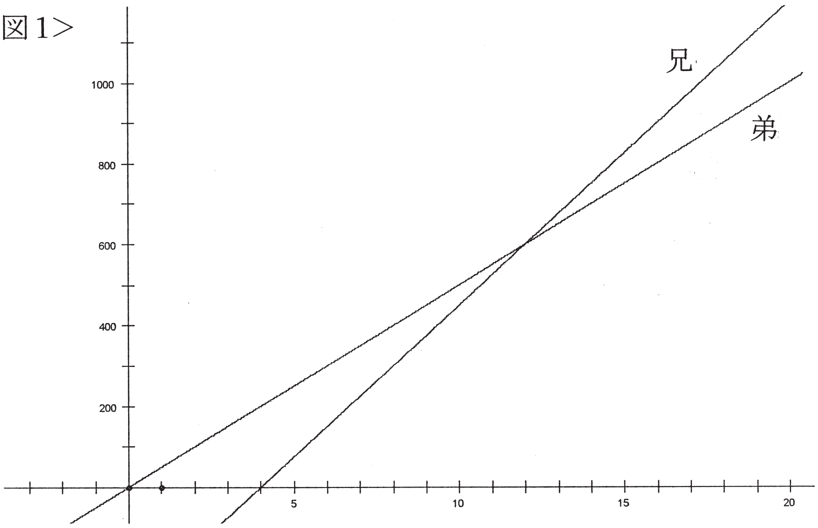
② 求めた式で，a と b の値は，それぞれ何を意味していますか。

② 不等式と連立方程式

1 不等式

兄と弟が 1000m を歩く競争をしました。兄のほうが歩くのが速いので，兄は弟がスタートしてから 4 分後にスタートすることにしました。2 人の歩く速さは一定であるとして，2 人の歩くようすをグラフに表すと，次のようになりました。

<図 1>



問 1 弟がスタートしてから x 分後に，スタート地点から y m はなれているとして，兄と弟の歩くようすを表す式を，グラフから求めなさい。

▶▶弟が兄より先を歩いているときを考えてみましょう。

例 1 弟が兄より先を歩いているとき，2 人の歩いた道のりについて成り立つ式を不等号を使って表すと，次のようになります。

$$75x - 300 < 50x \qquad \cdots (1)$$

$75x-300<50x$ のような不等号＜，＞，≦，≧ を用いて数量の間の関係を表した式を**不等式**といいます。

前ページのグラフから，兄が弟に追いつくのは，弟がスタートしてから 12 分後で，スタート地点から 600m のところです。したがって，弟が兄より先を歩いているのは，x の値が 12 未満のときです。これは，$x<12$ と書けます。

これは，不等式 $75x-300<50x$ の解です。

いっぽう，$x=12$ は

$$\text{方程式}\quad 75x-300=50x \qquad \cdots(2)$$

の解で，兄が弟にちょうど追いついたときを表しています。

▶▶次に，兄が弟より先を歩いているときを考えてみましょう。

兄が弟を追い越した後は，x について，次のような不等式が成り立ちます。

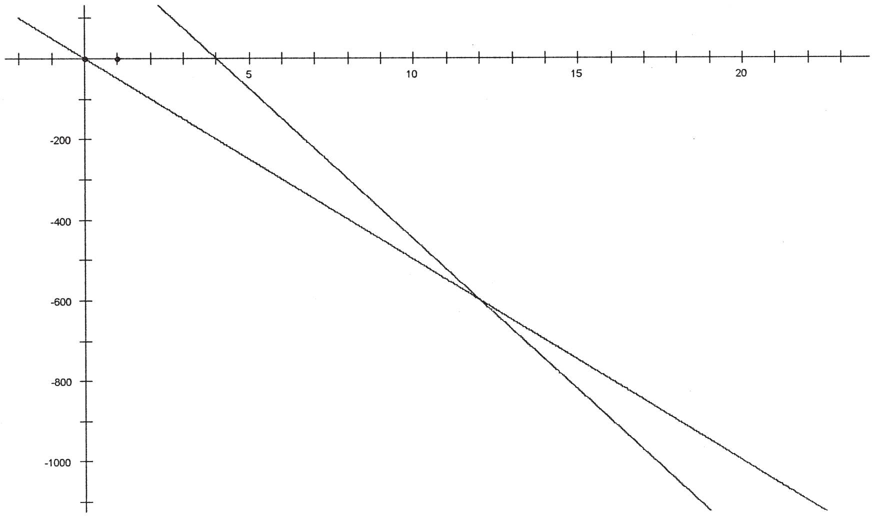
$$75x-300>50x \qquad \cdots(3)$$

問 2 (3)の不等式について，x の値が 5，6，7，…，13 のときの右辺の値を求め，下の表の大小のらんに，あてはまる不等号，等号を書き入れなさい。

x	左　辺	大小	右　辺
4	$75\times4-300=0$		$50\times4=200$
5	$75\times5-300=75$		$50\times5=$
6	$75\times6-300=150$		$50\times6=$
7	$75\times7-300=225$		$50\times7=$
8	$75\times8-300=300$		$50\times8=$
9	$75\times9-300=375$		$50\times9=$
10	$75\times10-300=450$		$50\times10=$
11	$75\times11-300=525$		$50\times11=$
12	$75\times12-300=600$		$50\times12=$
13	$75\times13-300=675$		$50\times13=$

<図 1>の 2 つのグラフと x 軸について線対称となるグラフをかくと，次のようになります。

<図 2>



<図 2>の 2 つの直線のグラフは，<図 1>のグラフと x 軸について線対称ですから，$y=-75x+300$ ，$y=-50x$ となります。

すると今度は，グラフから，$x>12$ のときは

$$-75x+300<-50x$$

となっています。この式と(1)の式

$$75x-300<50x$$

とを比較してみると，各項の係数は，(1)の式の両辺に -1 をかけたものになっています。また，この不等式の解の不等号の向きが変わっていることがわかります。

問 3 $x<12$ のときはどうですか。グラフから不等式をつくって，(3)の式と比べてみなさい。

$x<12$ のときも，(3)の式と比較すると，解の不等号の向きが変わっています。

問　4　不等式 $50x<75x-300$ と，不等式 $75x-300>50x$ は，不等式の左辺と右辺が入れかわっただけです。この2つの不等式をAさんと，Bさんは同じように解きましたが，解が違っていました。解が違っているのはどうしてですか。

Aさんの解き方	Bさんの解き方
$50x<75x-300$	$75x-300>50x$
$-25x<-300$	$25x>300$
$x<12$	$x>12$

不等式は，両辺に同じ負の数をかけたり，両辺を同じ負の数でわったりするとき，不等号の向きが変わります。

不等式には，次の性質があります。

●不等式の性質●

1　$A<B$　ならば

$$A+C<B+C,\quad A-C<B-C$$

2　$A<B,\ C>0$　ならば

$$AC<BC,\quad \frac{A}{C}<\frac{B}{C}$$

3　$A<B,\ C<0$　ならば

$$AC>BC,\quad \frac{A}{C}>\frac{B}{C}$$

2　連立方程式とグラフ

市の総合体育大会で，バスケットボール部は優勝をはたしました。なかでもキャプテンの清水選手は，フリースローを除くシュートだけで 21 得点をあげる活躍でした。

▶▶清水選手は，3 点シュート，2 点シュートをそれぞれ何回成功させたでしょうか。

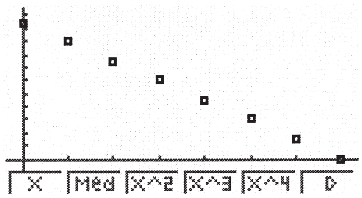
バスケットボールのフリースローを除くシュートの得点の合計で 21 得点あげたとき，3 点シュートを x 本，2 点シュートを y 本それぞれ成功させたとして，x，y の関係を等式で表すと，次のような式になります。

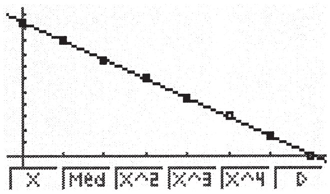
$3x+2y=21$　………(1)

(1)の式で，x の値が 0，1，2，…，7 のときの y の値を求めると，次の表のようになります。

3 点シュートの本数 x	0	1	2	3	4	5	6	7
2 点シュートの本数 y	(10.5)	9	(7.5)	6	(4.5)	3	(1.5)	0

下の図は，これらの値をプロットしたものです。





上の問題に次の条件をつけ加えた問題を考えてみましょう。

清水選手は，3 点シュートと 2 点シュートを合わせて 9 本成功させました。

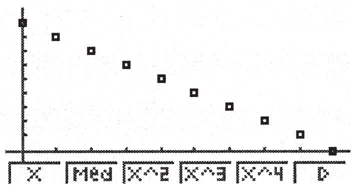
前ページでつけ加えた条件を式で表すと，次のようになります。

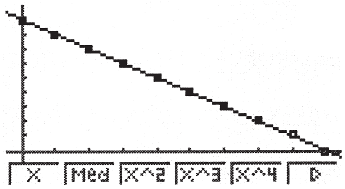
$$x+y=9 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)の式で，x の値が 0，1，2，…，9 のときの y の値を求めると，次の表のようになります。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

下の図は，これらの値をプロットしたものです。



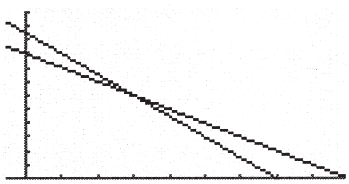


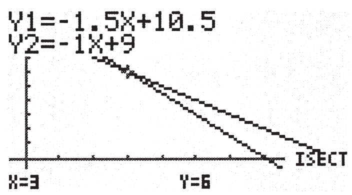
(1)，(2)のような 2 つの文字をふくむ 1 次方程式を，**2元1次方程式**といいます。

$\begin{cases} 3x+2y=21 \\ x+y=9 \end{cases}$ のように，2 つ以上の方程式を組み合わせたものを**連立方程式**といいます。

問 1　(1)と(2)の方程式のグラフを，1 つのグラフ用紙にかいてみなさい。

2 つの方程式を成り立たせるような x，y の値の組は，下の図のように 2 つの直線の交点の座標です。これが**連立方程式の解**です。

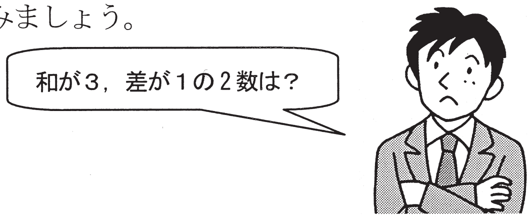




連立方程式 $\begin{cases} 3x+2y=21 \\ x+y=9 \end{cases}$ の解は，$x=3$，$y=6$ です。

Q 次の連立方程式の解を求めてみましょう。

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$$



連立方程式の解について考えてみましょう。

例　1　$\begin{cases} 3x+y=6 \\ 2x+3y=11 \end{cases}$　で，２つの式に $x=1$ を代入すると

上の式では　$3+y=6$　したがって　$y=3$

下の式では　$2+3y=11$　したがって　$y=3$

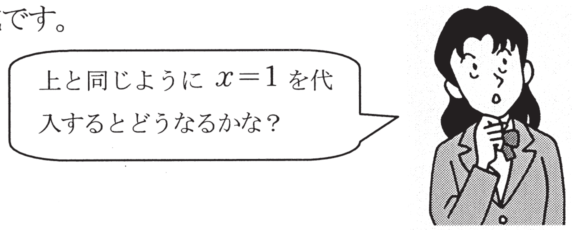
となり，$x=1$ のときの y の値が一致するので，$x=1$，$y=3$ が解であることがわかります。

問　2　次の連立方程式について，$x=1$ を２つの式に代入して，解を求めなさい。

$$\begin{cases} 2x-y=4 \\ 5x+3y=-1 \end{cases}$$

次の連立方程式の解はどうでしょうか。この連立方程式は，前のバスケットボールの問題でつくった連立方程式です。

$$\begin{cases} x+y=9 \\ 3x+2y=21 \end{cases}$$



$\begin{cases} x+y_1=9 \\ 3x+2y_2=21 \end{cases}$　として，上の連立方程式の解を考えてみましょう。

上の連立方程式の２つの式に $x=1$ を代入したら，$y_1=8$，$y_2=9$ となります。x の値がいくつのとき y_1 と y_2 は一致するのでしょうか。

x に1, 2, 3, …を代入して，y_1 と y_2，y_2-y_1 の値を求め，下のような表に整理しました。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
y_2	10.5	9	7.5	6	4.5	3	1.5	0	-1.5	-3
y_2-y_1	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-1.5	-2	-2.5	-3

y_2-y_1 に注目しましょう。$y_2-y_1=0$ となるときの x の値がわかれば，2つのグラフの交点の x の座標を求めることができます。

上の表で，代入する x の値を1ずつ増やしていくと，y_1 の値は1ずつ減り，y_2 の値は1.5ずつ減ります。このことから，x の値を1ずつ増やしていくと y_2-y_1 の値は0.5ずつ減ることがわかります。$x=0$ のとき $y_2-y_1=1.5$ ですから，$x=3$ のとき $y_2-y_1=0$ となることがわかります。

次に

$$\text{連立方程式}\begin{cases} x-2y=9 \\ 3x+4y=7 \end{cases} \quad \cdots\cdots(1)$$

について，$x=0$，$x=1$ のときのそれぞれの y の値から，2つのグラフの交点の座標，すなわち，解を求める方法を考えてみましょう。

連立方程式を $\begin{cases} x-2y_1=9 \\ 3x+4y_2=7 \end{cases}$ として，$x=0$，$x=1$ のときのそれぞれの y の値を求めると次のようになります。

x	0	1
y_1	$-\dfrac{9}{2}$	$-\dfrac{8}{2}$
y_2	$\dfrac{7}{4}$	$\dfrac{4}{4}$
y_2-y_1	$\dfrac{7}{4}-\left(-\dfrac{9}{2}\right)=\dfrac{25}{4}$	$\dfrac{4}{4}-\left(-\dfrac{8}{2}\right)=\dfrac{20}{4}$

この表から，$x=0$ のときの y_2-y_1 の値 $\frac{25}{4}$ は，x が1ずつ増えるごとに $\frac{5}{4}$ ずつ減ることがわかります。y_2-y_1 の値が0になるときの x の値，すなわち

$$\frac{25}{4}-\frac{5}{4}x=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

が成り立つときの x の値が交点の x 座標で，(2)を解くと $x=5$ となります。

連立方程式(1)の2つの方程式を y について解くと 次のようになります。

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x-\frac{9}{2} \\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4} \end{cases}$$

この連立方程式は，2つの式の右辺がそれぞれ y に等しいことから，右のようにして解くことができます。

このようにして連立方程式を解く方法を**等置法**といいます。

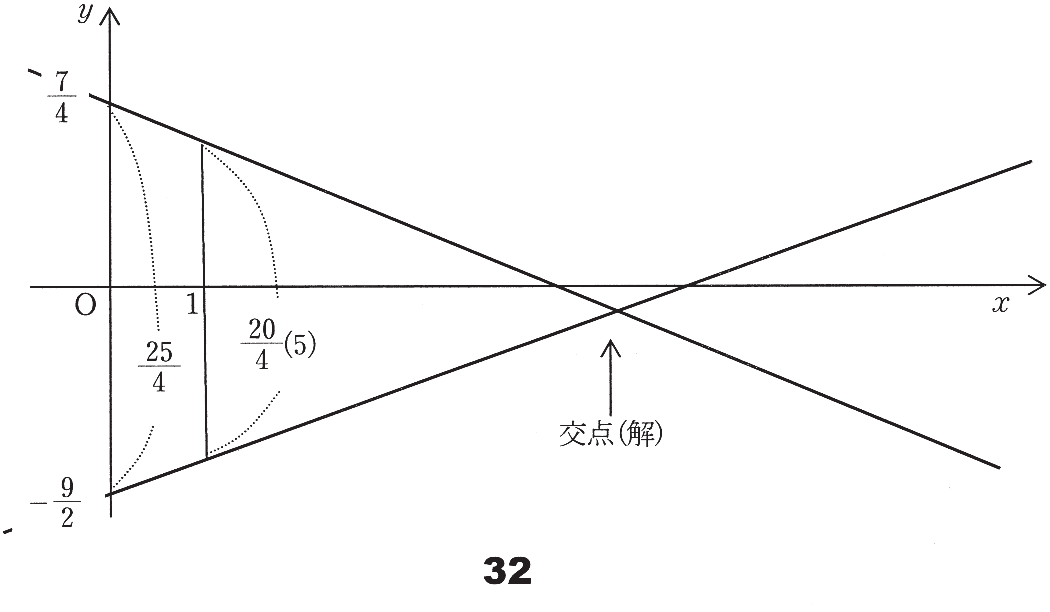
$$\frac{1}{2}x-\frac{9}{2}=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$$

$$\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}x=\frac{7}{4}+\frac{9}{2}$$

$$\frac{5}{4}x=\frac{25}{4}$$

右の最後の式は(2)の式と同じになります。この式の x の係数は，x の値が 1 だけ増えるときの y_2-y_1 の値の変化，右辺は，$x=0$ のときの y_2-y_1 の値となっています。

これをグラフでみると，次のようになります。



問 3 次の連立方程式を，前ページで説明した方法で解きなさい。

$$\begin{cases} 3x - 4y = -15 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

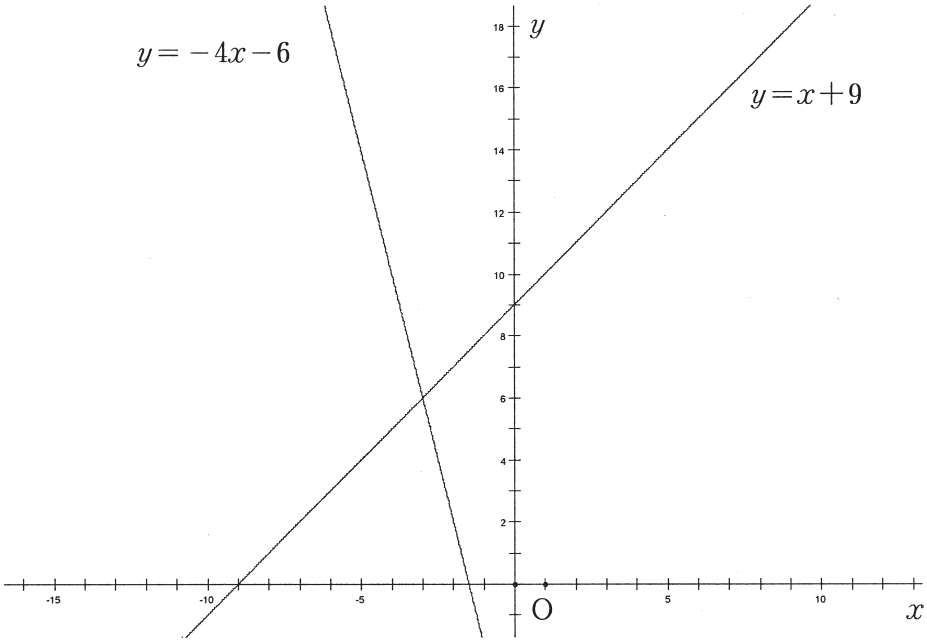
▶▶中学1年で学習した1次方程式も，グラフをかくことによって解決できます。

例 2 $-4x-6=x+9$ をグラフをかいて解いてみましょう。

上の方程式を解くということは， $\begin{cases} y=-4x-6 \\ y=x+9 \end{cases}$ のグラフの交点の

x 座標を求めることと同じです。

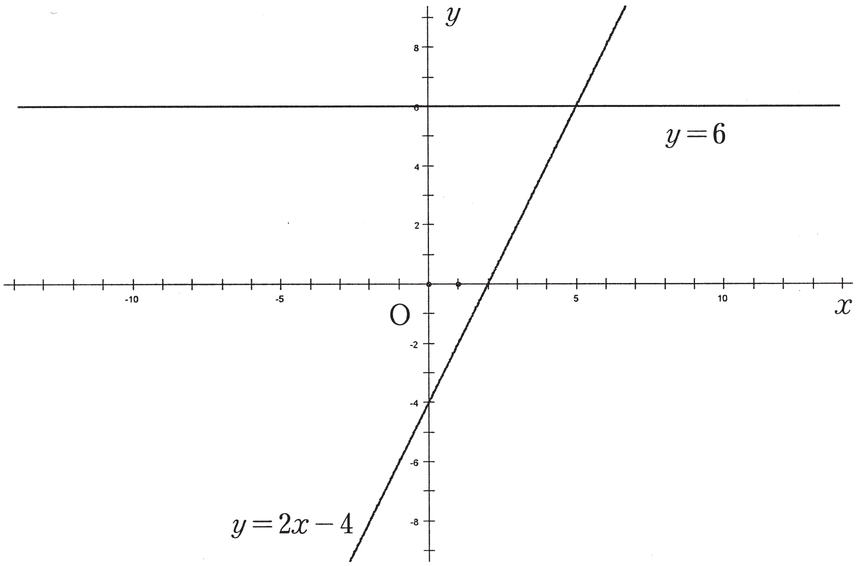
この2つの1次関数のグラフをかくと，下のようになります。



グラフより交点の x 座標を求めて，解が $x=-3$ となります。

例 3 $2x-4=6$ も同様に，$\begin{cases} y=2x-4 \\ y=6 \end{cases}$ と考えてグラフをかき，交点を求めてみましょう。

$y=k$ のグラフは，y 軸のk の値の点を通り，x 軸に平行な直線となります。



グラフの交点から，解は $x=5$ であることがわかります。

問 4 グラフを用いる方法で，次の１次方程式を解きなさい。

① $-\frac{3}{4}x=6$

② $3x-2=2x+3$

3 連立方程式の解き方

連立方程式の解を，計算で求める方法を考えていきましょう。

■等置法

連立方程式を等置法で解くには，2 つの 2 元 1 次方程式を「$y=\cdots$」の形にして，右辺どうしが等しいことから 1 次方程式になおして解けばよい。

問 1 次の連立方程式を等置法で解きなさい。

① $\begin{cases} y=x-1 \\ y=3x+9 \end{cases}$　　② $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-y=9 \end{cases}$

■代入法

等置法のように 2 つの式を「$y=\cdots$」の形にするのではなく，片方だけ「$y=\cdots$」としてもう一方の式に代入して，連立方程式を解くことができます。

例 1 $\begin{cases} y=2x-3 & \cdots\cdots(1) \\ 5x-4y=6 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$ を解いてみましょう。

(1)の y に等しい $2x-3$ を(2)の y に代入すれば，(2)の y が消去されます。

$$5x-4(2x-3)=6$$
$$5x-8x+12=6$$
$$-3x=6-12$$
$$-3x=-6$$
$$x=2 \quad \cdots\cdots(3)$$

(3)を(1)に代入して

$$y=2\times2-3=1$$

したがって，解は $x=2$，$y=1$ となります。

このような解き方を**代入法**といいます。

■加減法

次の連立方程式をまず，代入法で解いてみましょう。

$$\begin{cases} 3x-2y=12 & \cdots\cdots(1) \\ 2y=x-8 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(1)の式と(2)の式では $2y$ が共通しているので，(1)の $2y$ に(2)の右辺を代入して

$$\begin{aligned} 3x-(x-8)&=12 \\ 3x-x+8&=12 \\ 2x&=4 \\ x&=2 \quad \cdots\cdots(3) \end{aligned}$$

(3)を(2)に代入して

$$\begin{aligned} 2y&=2-8 \\ y&=-3 \end{aligned}$$

したがって，解は $x=2$，$y=-3$　となります。

上の連立方程式を，次のように $2y$ を消去して解くこともできます。

(2)の右辺の x を左辺に移項すると

$$-x+2y=-8 \quad \cdots\cdots\cdots(2)'$$

(1)＋(2)′ を計算して $2y$ を消去することができます。

$$\begin{array}{rrl} & 3x-2y=12 & \cdots\cdots(1) \\ +) & -x+2y=-8 & \cdots\cdots(2)' \\ \hline & 2x \qquad =4 & \\ & x=2 & \cdots\cdots(3) \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{rr} & A=B \\ +) & C=D \\ \hline & A+C=B+D \end{array}}$$

(3)を(2)′ に代入して

$$\begin{aligned} -2+2y&=-8 \\ y&=-3 \end{aligned}$$

このような解き方を**加減法**といいます。

Q 下の連立方程式は，そのまま加えたり，ひいたりしても1つの文字を消去することはできません。この場合，y を消去するには，どうしたらよいでしょうか。

$$\begin{cases} 7x-2y=29 & \cdots\cdots(1) \\ -2x+y=-10 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

上のような連立方程式の場合，x か y の係数の絶対値を等しくすることで，どちらかの文字を消去することができます。

(2)の両辺に2をかけて y の係数の絶対値を等しくします。

$$\begin{array}{lrl} (1) & 7x-2y &= 29 \\ (2)\times 2 & +)\ -4x+2y &= -20 \\ \hline & 3x \qquad &= 9 \end{array}$$

$$x=3 \quad \cdots\cdots(3)$$

(3)を(2)に代入して y の値を求めると，$y=-4$　となります。

上の問題を代入法で解いてみましょう。

(2)を $y=2x-10$ と変形して(1)に代入すると

$$7x-2(2x-10)=29$$

$$7x-4x+20=29$$

$$3x=9$$

$$x=3$$

この計算をよく見てみると，加減法でしている計算とまったく同じであることがわかります。

問 2　次の連立方程式を解きなさい。

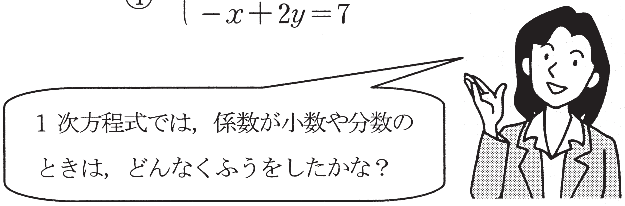
$$\begin{cases} 2x+5y=3 \\ 7x-2y=4 \end{cases}$$

問　3　次の連立方程式を解きなさい。

① $\begin{cases} y=2x-5 \\ 5x-3y=14 \end{cases}$　　② $\begin{cases} y=x+5 \\ y=3x-1 \end{cases}$

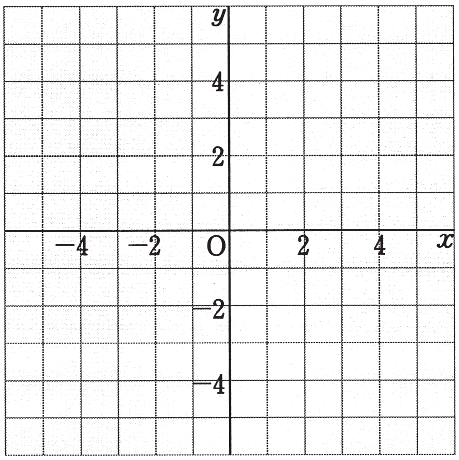
③ $\begin{cases} 3x+2y=17 \\ x-2y=-5 \end{cases}$　　④ $\begin{cases} 0.1x+y=0.5 \\ -x+2y=7 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} x+2y=10 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=1 \end{cases}$



▶▶次の連立方程式を，グラフを使って解いてみましょう。

$\begin{cases} 2x-y=1 & \cdots\cdots(1) \\ 4x-2y=2 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$



Q　右の図に(1)，(2)の方程式のグラフをかき入れてみましょう。

上の(1)，(2)のグラフは，上でかいたように，同じ直線になります。

したがって，この直線上の点の x 座標，y 座標の組

$(-1,\ -3)$，$(0,\ -1)$，$(1,\ 1)$，$(2,\ 3)$

などは，すべて上の連立方程式の解です。

問　4　次の連立方程式について，下の問に答えなさい。

$\begin{cases} 2x-y=1 & \cdots\cdots(3) \\ 4x-2y=8 & \cdots\cdots(4) \end{cases}$

①　(3)，(4)の方程式のグラフをかきなさい。

②　この連立方程式の解はどうなっているかを考えなさい。

やってみよう！　オリンピックのスケートの優勝タイム

下の表は，冬季オリンピックの男女 500m のスピードスケートの金メダリストのタイムをまとめたものです。

＜冬季オリンピック男女 500m スピードスケートの金メダリストのタイム＞

開催年	男子	女子
1968	40.3	46.1
1972	39.44	43.33
1976	39.17	42.76
1980	38.03	41.78
1984	38.19	41.02
1988	36.45	39.1
1992	37.14	40.33
1994	36.33	39.25
1998	35.59	38.39
2002	34.42	37.30
2006		

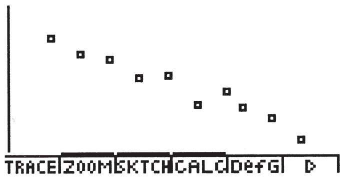
Q　上の表から，2006 年に開催されたトリノオリンピックでの，男子 500m スピードスケートの金メダリストのタイムを予想しましょう。

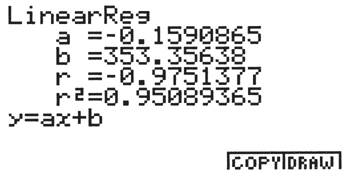
冬季オリンピックの 500m スピードスケートにおいて，女子の金メダリストのタイムが男子の金メダリストのタイムよりも速くなるときがくるでしょうか。また，速くなるとしたら，いつのオリンピックのときでしょうか。グラフ電卓を用いて予想してみましょう。

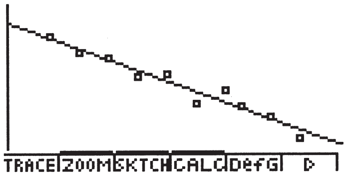
まず，データを List に入力します。

	List 3	List 4	List 5
1	1968	40.3	46.1
2	1972	39.44	43.33
3	1976	39.17	42.76
4	1980	38.03	41.78
5	1984	38.19	41.02

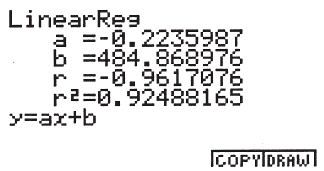
男子のタイムを散布図で表示して，直線で回帰すると次のようになります。

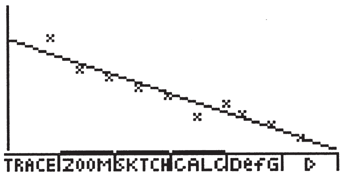




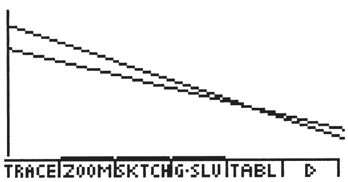


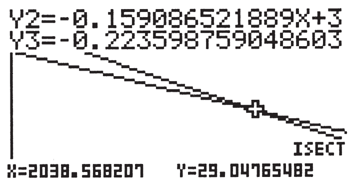
女子のタイムを散布図で表示して，直線で回帰すると次のようになります。





2 つの直線を同時にかき，交点の座標を求めます。この点が男子と女子のタイムが同じになるときです。





この結果から，2039 年には男子のタイムに女子が追いつくと予想されます。したがって，2042 年の冬季オリンピックでは，女子のタイムが男子より速くなるかもしれません。まず，あり得ないと思いますが……。

やってみよう！　ガス料金について考えよう

ひろしさんの家は，都市ガスを使っています。お風呂も温水器もみなガスを使っています。ひろしさんの家の6月のガスの使用量は64m^{3}でした。

この月のガス料金は何円くらいだったのか，明細をなくしてしまったのでわかりません。この月のガス料金を求めてみましょう。

Q　何がわかれば，この月のガス料金が求められるでしょうか。

5月の使用量は83m^{3}で9711円でした。また，7月の使用量は51m^{3}で6368円でした。8月の使用量は45m^{3}で5741円でした。

ガスの使用量が x m^3 のときのガス料金を y 円とすると， y は x の1次関数で表され，5月と7月のガス料金から

$y=104.47x+1040$　……(1)

となります。

1m^3 あたりの単価

$y=104.47x+1040$

基本料金

問　1　(1)の式から，ひろしさんの家の6月のガス料金を求めなさい。

Q　ある家の7月のガスの使用量は，5 m^{3}で1295円でした。(1)の式で料金を計算すると，1562円となり，料金はおよそ270円も実際の額と違ってしまいます。なぜこのようなことになると思いますか。

なぜこのようなことが起こるのか調べたくて，近所からガス料金の明細を集めてきました。次ページの表は，集めた明細をまとめたものです。これらのデータから，料金がどのようになっているのかを調べてみましょう。

Q　次ページの表から，わかることをあげてみましょう。

使用量	ガス料金	使用量	ガス料金
10	1901	28	3965
11	2022	83	9711
15	2506	64	7726
2	932	51	6367
6	1416	45	5741
8	1658	60	7308
5	1295	50	6263
7	1537	42	5427
4	1174	38	5009
1	811	33	4487
40	5218	29	4069
24	3547	25	3651
19	2990	31	4278
22	3338		

問 2 使用量がさらに多くなったときは，基本料金と1m³あたりの単価はどうなっていくと思いますか。

問 3 ひろしさんの家の4月分の使用量は97m³で，料金は11118円でした。

① これをもとに料金表Cのかっこをうめなさい。

② さらに料金表D～Fのかっこをうめなさい。

料金表区分	1ヶ月のガス使用量	基本料金（1ヶ月あたり）税込	料金単価（1㎥あたり）
料金表A	0m³から21m³	690円	121.1円
料金表B	21m³から85m³	1040円	104.47円
料金表C	85m³から213m³	（　　　）円	99.88円
料金表D	213m³から534m³	（　　　）円	97.25円
料金表E	534m³から（　　）m³	5030円	（　　　）円
料金表F	（　）m³をこえる場合	9610円	86.20円

➲➲この上の料金を決めるとしたら，あなただったらどのように料金を決めますか。

➲➲他の公共料金（電気や水道，電話などの料金）はどのようになっているか，調べてみましょう。

2 連立3元1次方程式

九章算術という中国の古くからある数学の書物に，次のような問題があります。

> 今，牛2匹，羊5匹を売ってその銭で豚13匹買ったら1000銭余りました。また，牛3匹，豚3匹を売ってその銭で羊9匹を買うと，ちょうど過不足はありません。また，羊6匹，豚8匹を売ってその銭で牛5匹を買おうとすると銭が600銭不足します。牛，羊，豚のそれぞれ1匹の価はいくらですか。

牛1匹の値段を x，羊1匹の値段を y，豚1匹の値段を zとすると，次の連立方程式ができます。このような連立方程式を**連立3元1次方程式**といいます。

$$\begin{cases} 2x+5y=13z+1000 \\ 3x+3z=9y \\ 6y+8z=5x-600 \end{cases}$$

これを整理すると，次のようになります。これを解いてみましょう。

$$\begin{cases} 2x+5y-13z=1000 & \cdots\cdots(1) \\ x-3y+z=0 & \cdots\cdots(2) \\ -5x+6y+8z=-600 & \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

$$\begin{array}{lrl} (1) & 2x+\ 5y-13z=1000 & \\ (2)\times 2 & -)\ 2x-\ 6y+\ 2z=\quad 0 & \\ \hline & 11y-15z=1000 & \cdots\cdots(4) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} (2)\times 5 & 5x-15y+\ 5z=\quad 0 & \\ (3) & +)\ -5x+\ 6y+\ 8z=-600 & \\ \hline & -\ 9y+13z=-600 & \cdots\cdots(5) \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} (4)\times 9 & 99y-135z=\ 9000 \\ (5)\times 11 & +)\ -99y+143z=-6600 \\ \hline & 8z=\ 2400 \\ & z=\ 300 \end{array}$$

$z=300$ を(4)に代入して　　$y=500$

$z=300$，$y=500$ を(2)に代入して　　$x=1200$

したがって，　牛1200銭，羊500銭，豚300銭　となります。

前ページの連立3元1次方程式を解くときには，(1)と(2)，(2)と(3)から x をそれぞれ消去して y と z の2元1次方程式を2つつくり，その2つの2元1次方程式から y を消去して z の1元1次方程式をつくりました。

このように，連立3元1次方程式を解くときには，文字を1つずつ消去していくことで，解が求めることができます。

問 1 次の連立3元1次方程式を解きなさい。

① $\begin{cases} x+2y+3z=42 \\ 2x+3y+z=29 \\ 3x+y+2z=31 \end{cases}$

② $\begin{cases} x+y+z=10 \\ x-y+z=2 \\ x+y-z=4 \end{cases}$