はしがき

新学習指導要領では，知識・技能を活用して課題を解決するための思考力，判断力，表現力等の育成，言語活動の充実，学習習慣の確立等を改訂における基本的な考え方として，改善事項が示された。数学科では，数学的活動を一層充実させ，生徒が学んで身に付けたものを生活や学習に活用することを重視し，学ぶ意欲を高め，学ぶことの意義や有用性を実感させることが授業改善の重要課題となっている。

また，平成19年度から実施されてきた全国学力･学習状況調査では，「活用」の問題が出題され，中学校数学では，事実や事柄の説明，方法の説明，そして理由の説明という３つのタイプの出題形式で「活用する力」の評価が行われている。調査結果からは，生徒が既習の数学を活用する力に課題があることが明らかになっている。この学力調査の結果，「活用する力」の育成とともにその評価についても現時点での重要な課題になっており，教材や授業モデルの開発のための実践研究を蓄積する必要が生じている。

本研究は，このような現在の重要課題に対し，「活用する力」の育成とその評価についての理論的考察を行いながら，数学科における授業改善の方向を具体的に提示することを目指し，教材開発，授業開発に取り組んだ。特に，「我が国の学校教育における望ましい算数・数学のカリキュラム」の研究（研究代表：杉山吉茂東京学芸大学名誉教授），および，そのカリキュラムに基づいた教科書『生かす数学』（平成19年発行）の実践の成果を踏まえて，教材開発の視点を探るとともに，実践的な試行を行った。

研究会は，月１回（於：東京学芸大学教育学部附属小学校）行って，教材や授業実践の検討を行うとともに，筑波大学附属学校研究会（於：筑波大学附属小学校）等に参加し討議を行った。また，東京，宮城，弘前，長野において授業を通した実践研究を行った。

「活用する力」の育成と評価は，重要な課題であるがその具体化には様々な困難が伴う。本研究にも多くの課題が残されているが，今回の研究成果を生かして，さらに研究を深めていきたいと考えている。

本研究を進めるにあたり，公益財団法人 日本教材文化研究財団より多大なるご支援を賜りました。また，同財団の鍛治紀彦氏には研究会の運営をはじめ様々な面でお世話になりました。心より感謝申し上げます。

平成24年３月

研究代表者　清水　美憲

執筆者一覧

清水美憲（筑波大学人間系・教授）

田端輝彦（宮城教育大学教育学部・教授）

中野博之（弘前大学教育学部・教授）

清野辰彦（山梨大学教育人間科学部・准教授）

新井　仁（国立教育政策研究所教育課程研究センター研究開発部・学力調査官）
（執筆当時　長野市立柳町中学校・教諭）

小野雄祐（仙台市立山田中学校・教諭）

小岩　大（東京学芸大学附属竹早中学校・教諭）

高橋広明（東京学芸大学附属国際中等教育学校・教諭）

目　　次

数学科の「活用する力」の育成と評価の枠組み

筑波大学人間系教授　清水美憲

1.「活用する力」の育成と評価

新学習指導要領では，知識・技能を活用して課題を解決するための思考力，判断力，表現力等の育成，言語活動の充実，学習習慣の確立等を改訂における基本的な考え方として，改善事項が示された。この改善事項を受けて，数学科では，数学的活動を一層充実させ，生徒が学んで身に付けたものを生活や学習に活用することを重視し，学ぶ意欲を高め，学ぶことの意義や有用性を実感させることが授業改善の重要課題となっている。

一方，全国学力・学習状況調査では，知識・技能等を実生活の様々な場面に活用する力や，様々な課題解決のための構想立てて実践し評価・改善する力等に関わる内容（主として「活用」）の問題が出題されている。このタイプの問題について，中学校数学では，事実や事柄の説明，方法の説明，そして理由の説明という３つのタイプの出題形式で「活用する力」の評価が行われている。この調査では，生徒が既習の数学を活用する力に課題があることが明らかになっている。この学力調査の結果，「活用する力」の育成とともにその評価についても現時点での重要な課題になっており，教材や授業モデルの開発のための実践研究を蓄積する必要が生じている。

本研究に先行する「望ましいカリキュラム」の作成では，「日常事象における問題を解決したり自然現象における予測などを行ったりする際には，事象を数理にとらえた上で，ともなって変わる数量を特定し，その関係を考察することが第一歩となる。」（杉山2003, p.27）といった立場からカリキュラムが構想された。また，この立場から『生かす算数』『生かす数学』の教科書が編集されている。

本研究は，現在の授業改善の重要課題に対し，先行研究を踏まえ，「活用する力」の育成とその評価という観点から教材開発や授業モデルの開発に取り組み，数学科学習指導の改善に寄与することを目的とする。

この章では，「活用する力」の育成とその評価について，OECDのPISA調査の数学的リテラシー評価の枠組みを手がかりに理論的考察を進め，「活用する力」の育成とその評価の枠組みについて検討する。

2. OECDのPISA調査による「数学的リテラシー」の評価

周知の通り，OECDは，加盟国の教育制度・政策に対する成果を国際的に比較可能な指標によって測定する仕組みを作り，「生徒の学習到達度国際調査」（*Programme for International Students Assessment*，以下PISAと略記）を実施してきた。この調査は，ほぼ義務教育終了段階に該当する生徒の学習到達度を国際的に比較し，結果を参加国の教育政策に反映させる目的で行われる事業である。この事業は，読解力・数学的リテラシー・科学的リテラシーの３領域についてのペーパーテストと学習の背景や文脈等を探る質問紙調査を中心に，3年サイクルで実施される。

OECDのPISA調査の結果の公表では，数学の「学力」の国際比較による科学的データの

提供という側面に報道の焦点が当てられ，平均得点の国際比較などに関心が集まった。しかし，この調査において中核となっているのは，「生きてはたらく数学的な知識と技能」と，その根底に必要な反省的考察の力や姿勢などをも込めた新しい立場からの「数学的リテラシー」という考え方である。PISA数学調査のペーパーテストの焦点の一つは，日常生活や社会生活の様々な問題場面で，学校数学で学んだ知識や技能を「役立つように使えるかどうか」を評価することにある。それゆえ，取り上げられる問題場面や，そこでの情報提示の方法は，従来の教科書の応用問題とは異なって見える。

しかし，このような見かけ上の特徴よりも大切なのは，PISA調査が今日的な意味でのリテラシーの評価をねらう点である。現代社会で生きる個人が自分を取り巻く諸問題に対し，積極的かつ前向きに関わり，よりよい社会を目指すといった市民像が，調査の背後に想定されているのである。実際，「数学的リテラシー」は，次のように規定されている。

> 「数学が現実で果たす役割を見つけ，理解し，現在及び将来の個人の生活，職業生活，友人や家族や親族との社会生活，建設的で関心を持った思慮深い市民としての生活において確実な根拠に基づき判断を行い，数学に携わる能力」（国立教育政策研究所，2004，p.16.）

数学的リテラシーの評価では，「建設的で関心を持った思慮深い市民」として「確実な根拠に基づき判断を行い，数学に携わる能力」を想定している。それゆえ，調査では，数学的知識を活用して判断すること，数学を用いてコミュニケーションすること，事象の特徴を数学的な観点から把握すること，数学の果たす役割やその意義を知ることなどの評価が意図されていることに注意する必要がある。

また，OECDのPISA調査の枠組みでは，「読解リテラシー」は，「自らの目標を達成するため，自らの知識を伸ばし可能性を広げるため，そして社会に参加するために，書かれたテキストを理解し，利用し，反省的に考察することである」（OECD，2006，p.46）と規定されている。さらに，この力を発揮する際の下位プロセス（側面）として，次の５つの事項が示されている。

・情報を取り出すこと
・広く一般的な理解を形成すること
・解釈を展開すること
・テキストの内容について反省的に考察し評価すること
・テキストの形式について反省的に考察し評価すること

この規定で注目されるのは，「読解」という概念が，単に文章を解読したり理解したりすることを越えて，多様な目的のために書かれたテキストを理解し，利用し，それを反省的に考察する（reflect）ことをも含んでいる点である。これは，「建設的で関心を持った思慮深い（reflectiveな）市民」として「確実な根拠に基づき判断を行い，数学に携わる能力」と規定される数学的リテラシーの概念規定においても同様で，自らの置かれた状況や社会の状況を反省的に捉えて，改善しようとする姿勢までが問われているのである。

このように，OECDのPISA調査のリテラシー概念が「反省的に考察すること」（「反省性」）に重点をおくのは，DeSeCoプロジェクトで規定された「キー・コンピテンシー」

（OECD，2005）概念に基づいているからである。この「キー・コンピテンシー」は，知識基盤社会において市民が活動するための３つの行為のカテゴリー，すなわち，道具を相互作用的に用いる，異質な集団のなかで交流する，自律的に活動する，からなる。そして，この３つのカテゴリーの中核に位置するのが，「反省性」である。

以上のように，今日的数学的リテラシー概念は，提起された文脈やねらいによって規定の重点が異なるものの，日常生活の場面や社会の様々な文脈で数学的な知識・技能が使えるかどうかという意味に止まらない。むしろ，個人が数学的な知識・技能を活用して情報を的確に理解して判断を下し，自分のおかれた状況を批判的・反省的にとらえる力を重視するという特徴を共有している。このことは，市民が身につけるべき数学的リテラシー像を考える際に，数学的な知識・技能を身につけているかどうかという数学の単なる実用的価値の確認を超えて，上の意味での「反省性」の視点からの考察が欠かせないことを意味している。

3. 評価問題の３要素：状況，内容，過程

OECDのPISA調査の公開問題例に，スポーツと健康に関する「心拍数」の問題がある（国立教育政策研究所，2004)。この問題では，健康のためにスポーツ中の心拍数を一定の範囲に止めるように体の動きを制限する目的で用いられる，1分間当たりの望ましい最大心拍数と年齢との関係を示す公式について問う。

・この関係についての旧公式は，次のようなものであった。

１分間当たりの望ましい最大心拍数＝220 － 年齢」

・しかし，その後の調査によって修正が加えられ，次の新公式が用いられるようになった。

１分間当たりの望ましい最大心拍数＝208 －(0.7×年齢)

「心拍数」の問題では，この新旧公式の取り換えで，1分間当たりの望ましい最大心拍数が増加したのはどの年齢からかを問う。例えば，年齢が30歳の人のスポーツ中の望ましい心拍数は，旧公式では「220－30」で，1分間当たり190になる。一方，新公式では，「208－0.7×30」で，1分間当たり187となる。この問いでは，この両者の大小が逆転する年齢を問うているのである。

この問題を解くためには，ある年齢の人の最大心拍数を２つの公式から求めて比較したり，2つの公式から得られる年齢の一致を等式の変形で見出したりする。現実世界の問題を２つの数学的モデル（新旧公式）で定式化し，考察するという評価問題である。ここでも現実事象を取り扱う際の「言葉」の役割を果たす式が，事象を簡潔に表現し，要点を明確化し，予測を可能にするなどの機能を発揮するのである。

上に示した調査問題例からも伺えるように，OECDのPISA調査の枠組みでは，具体的な評価問題を作成する観点として，次の３つの構成要素が想定される。

・問題が埋め込まれた場面（状況）
・用いられる知識や技能の内容や形式
・用いられる過程（プロセス）

例えば，読解力の評価では，テキストの形式，読む行為のプロセス，テキスト作成の用途によって決まる状況の３つである。また，数学的リテラシーの場合，数学的内容，数学的プロセス，数学が用いられる状況の３つである。

評価問題では，対象者となる子どもにとって身近な問題場面（状況）を想定する。PISA調査では，私的な生活上の場面や教育（学校生活）の場面，職業に関わる場面や地域社会などの公的な場面，さらには科学（数学）的場面などが想定される。温室効果や酸性雨，盗難事件など，PISA調査でリテラシーの評価のために用いられる場面は，このような状況のいずれかから選ばれている。

用いられる知識や技能の内容や形式については，PISA調査では，学校教育の枠組み（例えば，日本の学習指導要領）には直接には対応していない。例えば，数学的リテラシーでは，評価問題の数学的内容については，伝統的な学校数学の領域に基づくとらえ方ではなく，身の回りの事象にアプローチする際に用いられる基本的かつ包括的な数学的アイディアに焦点を当てる。それは，数学科の内容領域とは一致せず，例えば「数と式」の内容は，「量」や「変化と関係」の内容に含まれる。

一方，用いられる過程（プロセス）の評価を考えることも重要である。例えば，数学的リテラシーでは，数学的過程で用いられる能力群について，思考と推論，論証，コミュニケーション，モデル化，問題設定と問題解決，表現などの能力が総合的に働くことを想定した問題が出題される。

PISA数学調査の核心は，様々な状況での問題を，数学的問題として定式化して解決し，その結果を解釈する過程で発揮される複合的な能力を評価することである。すなわち，その状況に含まれる要素を分析し，適切な推論によって結果を導き，その結果に基づく判断を表現したり伝達したりする能力である。そのために構成された調査枠組みの新しさは，学習者が用いる数学的過程を支える能力群を明示したこと，事象を考察する際の大きな数学的アイディアという観点から数学的内容を整理したこと，問題が埋め込まれた状況・文脈を生徒の立場から分類したこと，そしてこれら３つの次元を組み合わせて数学的リテラシーの評価を位置づけたことにある。

4. 事象を数学の舞台に載せて考えること

公園にあるブランコの動きを真横からみると，その軌跡はどのような形にみえるか。平成17年１月に実施された「特定の課題」調査では，小学校第４学年の児童を対象に，このブランコの軌跡を問う問題が出題された。この問題に対して，図を正確に描けた４年生児童は，58.7%に止まった（国立教育政策研究所，2006）。また，その図が「円の一部」であることを４つの選択肢から正しく選択できた児童は，わずか43.8%に過ぎなかった。大きくみれば，学んだ知識・技能を異なる文脈で生かして事象を「数学の眼」で読み解くことに困難があるといえる。

もともと数学には，数・量・図形やそれらの関係についての抽象的な体系の研究を行うといった面の他に，現実世界の問題を数学の舞台に載せて解決するという一面もある。数学は，身の回りの事象を観察・解釈し，またそれを通して問題を解決する方法の１つなのであり，身の回りの事象の仕組みを読み解くという側面をもっているのである。

このように算数･数学を活用して現実世界の問題を解決する過程は，「数学的モデル化過程」とよばれる。この数学的モデル化過程の例としては，人口変動の予測の問題や，直前月の（積算）気温によって桜の開花日を予測しようとする開花予想の問題など，様々なものがある。最近では，中学校の数学科の教科書にも，このような数学的モデル化過程を想

定した教材が掲載されるようになってきた。

このような数学的モデル化の過程を経て，現実世界の問題を解決する場合，それを数学の問題に定式化するために，条件を単純化したり理想化したりして数学的モデルを作成する必要があるし，得られた解を現実に戻して評価する必要がある。このような問題場面で，生徒が情報を的確に読みとって，それを数学的に解釈･表現し，判断を下す際に，「読解力」がはたらくことになる。

例えば，PISA2000年数学調査の公開問題に，「レースカーサーキット」の問題があった。これは，サーキットを走るレーシングカーの走行距離と速度の関係を表すグラフから，速度の変化を読み取る問題である。この問題には，レースカーがある速度で走る地点を指摘する問題や，グラフの形からサーキットのコースの概形を指摘する問題などが，小問として含まれていた。また，PISA2003年数学調査の枠組みの例示問題には，「貯水タンク」のように，ある場面での変化の様子を表すグラフを選択する問題があった。これは，円柱と円錐の複合図形の貯水タンクに一定の割合で入れた水の表面の高さの変化の様子をとらえる問題である。

これらの問題は，変化の様子をグラフに表したり，グラフから場面の様子を読み取ったりすることに関わる問題である。問題の場面における数量の関係を概括的にとらえ，グラフを用いてそれを数学的に表現したり，数学的に表現された式やグラフから情報を読み取ったりすることは，高度に情報化した現在の社会において，ますます必要になるであろう。それゆえ，このような力を育成することは，算数・数学科において，現在より重視する必要がある。

さらに，PISA2003年調査の「盗難事件」は，一部が省略されたグラフから，盗難事件の発生数の増加の傾向を把握する問題であった。日本の生徒の平均正答率は29.1%で，OECD加盟国平均の29.5%よりも低かった。また，フィンランドの生徒の平均正答率は45.8%であった。

これらの問題は，与えられた表やグラフから適切に情報を読み取ることを求める問題である。このように，表やグラフなどの形で与えられたデータから適切に情報を読み取り，それに基づいて的確に判断を下すとともに，その判断を振り返って考える力の育成が，我が国の算数・数学教育における課題となっていることがわかる。

5. 数学の世界での考察における活用する力の育成

数学科の目標には，子ども達の事象を数理的に考察する能力を高めることがある。この「事象を数理的に考察する」場面は，現実世界の問題の解決に限らず，数学の世界で発展的に考察したり一般化して考察したりする場合にも該当する。OECDのPISA調査の評価問題では，この数学の世界での数学の活用の面が弱いといえる。

この数学の世界での数学の活用の場合，帰納的な考察によって数や図形についての規則や関係を見出したり，考察の範囲を拡げながら発展的に考えを進めたり，求めた結果について根拠を挙げて説明したりすることになる。また，複数の事象を統合的に考えたり，一つの事象を多面的に考えたりする場面でも，事象に含まれる関係や構造を明らかにするために，それらを簡潔に表現したり能率的に処理したりすることになる。この過程には，帰納的な考え方，演繹的な考え方，類推的な考え方など，数学をつくり，発展させる数学的

な見方・考え方が用いられる。
例えば，連続する３つの自然数の和がどんな数になるかを調べようとする場合，一番小さな数をnとおいて，次のように和を計算してまとめると，

$$n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$$

連続する３つの数の和は，3の倍数であるとも，中央の数の３倍であるともよめる。ここで，一番小さな数をnとする代わりに，真ん中の数をnとおいてみると，3数の和は，

$$(n-1)+n+(n+1)=3n$$

となって，この場面における「相殺」や「平均」などの意味が浮き彫りになる。またそれらの意味に注意すると，連続する５つの自然数の和や，さらに連続する奇数個の自然数の和についても成り立つ性質をよむことができる。

$$(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)=5n$$

さらに，数学科における文字式や図形についての証明では，証明を行った後で，鍵となっている属性（式や図形の性質）を明らかにして，その要素を固定したまま他の属性を変えることが考えられる。このように「からくり」（構造）をよむことで，考察の範囲を広げて発展的に考察することが可能になる。
例えば，大小２つの正三角形が，それぞれ１つの頂点を共有してできる図形で，新たにできる線分の長さが等しくなることが，教科書で扱われる。このことの証明の過程を丁寧によむと，証明の中で変えてよい属性と変えてはいけない属性がみえてくる。このことに気づけば，「正三角形」という条件を二等辺三角形や正方形に変えても同様なことがいえることがわかる。
このように，数学の世界での考察においても，数や図形の性質を的確に読み取り，そこに潜む構造をつかむことが大切であり，式の意味を様々によんで発展的に考察することで，新しい数学の世界が広がり，自分の思考過程を振り返ってとらえ直す機会が得られる。
そのような数学的活動における過程や方法を中核に据えて学習指導を改善するためには，従来よりも学習における数学的方法の側面に着目する必要が生じる。このような数学的方法は，生徒の学習プロセスに着目しないと顕在化してこないので，例えば，途中で現れる考え方や着眼点に焦点を当てる授業での話し合いのあり方を考えなければならない。数学的方法やアイディアは，最終的に黒板やノートに書かれる数学的結果から把握されるものではなく，途中のプロセスにおいて，いわば「オンラインで」把握し，そこから明示的に取り出されるべきものである。
問題例で，具体的に考えてみよう。平成22年度全国学力・学習状況調査B$\boxed{2}$の問題（１）では，「連続する３つの奇数の和」が９の倍数になるという予想が正しいかどうかを具体的な数で確かめ，反例を示すことが求められた（正答率は54.8%）。この場合，具体的な数を用いて帰納的に調べていくこと，予想された性質が成り立たない例を示すことが大切であ

る。しかし，それにも増して大切なのは，そのような方法（帰納的に考えること，反例を示すこと）を用いたことということを活動の過程で意識化し，活動の過程を振り返ってその意義を理解することである。反例が一つでも見出されれば，考察対象となっている数の性質はもはや成り立たないことが示されていることから，反例の威力を知り，この方法を身につけることが生徒に求められる。

6. 統計分野における「活用する力」の育成と評価

数学科の新学習指導要領の改善のポイントの一つに，統計の内容の充実がある。それは，国際的な通用性，内容の系統性の確保や小・中学校の学習の円滑な接続等の観点から，小学校での数量関係領域を強化し，中学校での「資料の活用」の新設によって統計に関する内容を位置づけて充実し，さらに高等学校で統計の内容を学習する「データの分析」を「数学Ｉ」に位置づけることによって必修化したことに現れている。

このように，統計の内容が充実されたことによって，小・中・高のそれぞれの学校段階での統計の学習とその関連のあり方の検討が，重要な課題になっている。生徒が近い将来の社会生活でデータを活用し情報を批判的に読み解くことができるようにするため，統計的な知識や技能を活用する数学的活動について，教室での学習指導の具体的なあり方などが，実践的に検討されなければならない。

学校数学における統計の学習では，与えられたデータを整理して図表やグラフに表す手法を学ぶに止まらず，身近な事象に関する問題意識に基づいて，児童・生徒が自らデータを収集し，整理・分析し，その結果に基づいて意思決定や判断をする，といった数学的活動が必要である。

科学技術進行機構（JST）は，このような学習をサポートするために，算数・数学の資料活用やデータ分析のために用いるデジタル教材「科学の道具箱」を公開している。この教材は，生徒自らが科学・理科的なデータや身近なデータに実際に触れて，新しい知識を獲得したり，更に疑問を深めたりするプロセスを繰り返し，自然現象や日常生活の諸活動を統計的に捉え考える「統計的能力」を育成する事に主眼を置いた教材である（酒折他，2010）。また，この教材を用いた授業モデルも提案されている。

サッカー･ワールドカップ南アフリカ大会決勝トーナメントで，6月29日深夜に放送された日本対パラグアイ戦の平均視聴率は関東地区で57.3％であったという。この視聴率は，関東地区の約600世帯で調べたデータに基づいて1700万を越える世帯の傾向を示す指標として用いられることになる。このような手法と得られた数字の意味については，データから数字が得られる仕組みがブラックボックスになってしまっている状況があるのではないだろうか。内閣支持率や選挙予測等のマスコミによる調査とその結果報道も同様である。

1700万を越える世帯からランダムに選ばれた約600世帯のうち，2％の世帯にある働きかけがあれば，視聴率が変動しうる。このような事実を認識した上で，結果の偏りを避けるために調査ではどのような工夫がされているかを知っておく事にも重要な意味があろう。このように日常生活にあふれている統計的結果を理解し，批判的に評価する能力として，「統計的リテラシー」の概念が提起されている。

学校教育の「出口」での力という視点から統計的リテラシーの育成を考えると，実社会の生活で，データに基づいて的確に結果を導き，その結果に基づいて判断でき，それを他

者に的確に伝えることのできるコミュニケーション力をもった「賢い統計使用者」がイメージされる。実際，現在の社会では，必要なデータを集め，そのデータに基づいて適切な判断を行い，それに基づいて行動を決定したり，その結果を根拠として人と議論したりすることが非常に大切である。

そのようなデータとの「付き合い」方として重要な５つの視点がある。（渡辺，2008）

- 全体のばらつきを測り，現状の傾向を把握する（分布をよむ）
- 層別して，グループ間の特徴を比較し，違いをみつける
- 変数間の関連性をみて，因果構造と要因効果を知る
- 時間系列に沿って，変化のトレンドやパターンの特徴をつかむ
- データを分類する

また，自然現象や社会現象へのアプローチの基本には，測る，予測する，制御するということがある。そのことを踏まえたデータ分析の方法には，次のようなものがある（ベネッセコーポレーション，2010)。ある問題（事象）を考察するために，要因の候補がどのような性格のものかによって，分析の手法を使い分けるのである。

- 比較する（グループ間の特徴を比較して違いを見る）
- 関係を調べる（数値として表せる要因候補と目的がどういう関係なのか調べる）
- 傾向をつかむ（時間の推移に伴う傾向の変化を見る）

学校教育の出口で，生徒にこのような力が身についているようにするために，それぞれの学校段階で行われるべき活動や身につけるべきスキルや思考力を明らかにし，その育成のために適切な教材を開発することは最も難しく，しかし最も大切な作業であるように思われる。

7. まとめ：数学を活用する力の育成と評価における３つの側面

OECDのPISA調査の枠組みでは，数学的リテラシーの意味を規定し，具体的な評価問題を作成する観点として，次の３つの側面がそれぞれの領域で想定されている。

・問題が埋め込まれた文脈（状況）
・用いられる知識や技能の内容や形式
・用いられる能力やプロセス

数学を活用する力の育成のためには，数学が活用される文脈や状況と，そこで用いられる数学的知識や技能に焦点が当てられるべきである。しかし，同時に，活用の場面で用いられる能力や方法の面への配慮が欠かせない。例えば，数学的リテラシーの評価では，数学的過程で用いられる能力群について，思考と推論，論証，コミュニケーション，モデル化，問題設定と問題解決，表現などの能力（コンピテンシー）が総合的に働くことを想定して出題される。

評価問題作成の際には，評価の目的に応じて，テスト対象者にとって意味ある問題場面（状況）を想定する必要がある。PISA調査では，私的な生活上や教育（学校生活）の場面，職業や公的な地域社会の場面，さらには科学（数学）的場面などが想定される。温室効果や酸性雨，盗難事件など，各領域のリテラシー評価のために用いられる話題は，このような状況から選ばれている。

一方，用いられる知識･技能の内容や形式に関して，PISA調査の枠組みは，日本の学校

教育の枠組み（学習指導要領）には直結しない。実際，例えば，PISA調査の数学の内容領域と日本の数学科の内容領域とは一致しておらず，また，教科横断的な知識が問われることもある。問題作成の際には，この点に注意する必要がある。

また，逆にPISAの調査では数学の世界での考察に該当する評価問題が少ない。中学校や高等学校の数学科での活用する力の育成と評価を構想する場合，数学の世界の様々な場面（例えば，図形の証明や数の性質の説明，または関数の性質の探究等）での活用についても十分配慮する必要がある。

今日の社会で，数値，表やグラフ，形など様々な形式で身の回りにあふれる情報を数学の眼で正しくとらえて比較・評価し，その解釈に基づいて的確な判断を下す能力の重要性を疑う者はいないであろう。このような能力は，これからの時代には一層重要になるに違いない。OECDのPISA調査に単を発した今日的数学的リテラシー論は，教育の主目的をそのような能力を備えた人材の確保とみなす経済界・産業界が，教育界に送った要請のメッセージともみることができ，むしろ教育界の外側の人々にとって受け入れやすいものになっている。

しかし，重要なのは，日々の教室での学習指導において，数学的活動を通して数学的リテラシーをいかに涵養するかについて，生徒にとって興味のある教材の開発と学習指導と評価を中核とする実践的な研究である。

引用・参考文献

国立教育政策研究所・教育課程研究開発センター（2006）『特定の課題に関する調査（算数・数学）調査結果（小学校・中学校）』国立教育政策研究所

OECD（2006）Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006（国立教育政策研究所（2007）『生きるための知識と技能３：OECD生徒の学習到達度調査（PISA）2006年調査国際結果報告書』ぎょうせい.）

酒折文武, 西村圭一, 竹内光悦, 田村義保, 深澤弘美, 渡辺美智子, 長崎栄三（2010）「統計的思考力育成のための複合デジタル教材―数学科で活用する『科学の道具箱』―」日本数学教育学会誌・数学教育，92（１），20-28.

清水美憲（2007）「数学的リテラシー論が提起する数学教育の新しい展望」小寺隆幸・清水美憲編著『世界をひらく数学的リテラシー』明石書店.

清水美憲・渡辺美智子監修,ベネッセコーポレーション（2010）『―データベーストシンキング―事実を基に思考する力を鍛える』Benesse.

杉山吉茂編（2003）『我が国の学校教育における望ましい算数・数学のカリキュラムの構想』日本教材文化研究財団.

杉山吉茂編（2007a）『生かす算数』（小学校４年～６年）日本教材文化研究財団・東京書籍.

杉山吉茂編（2007b）『生かす数学』（中学校１年～３年，高等学校）日本教材文化研究財団・東京書籍.

杉山吉茂編（2010）『児童・生徒の数学的思考力・活用力を育成する算数・数学科学習指導方法と評価の研究』日本教材文化研究財団.

渡辺美智子（2008）「身近にある統計―事例から学ぶやさしい統計の活用方法―」品質月刊委員会.

証明を振り返り，発展的に考察する生徒の育成
―交わる２直線上での点のとり方をもとに―

宮城教育大学教育学部教授　田端輝彦
仙台市立山田中学校教諭　小野雄祐

1. はじめに

本研究の目的は，「わが国の学校教育における望ましい算数･数学のカリキュラムの構想」（杉山，2003）（以下，本稿では「望ましいカリキュラム」と記す）に基づいて作成された実験教科書「生かす数学　中学１～３年」（杉山，2007）をもとに授業実践し，これらに示された精神をより具体化した教材を通してその精神を育成・評価する方法を提案することにある。

特に本稿では，中学校第２学年の図形の論証において新たな教材の提案とその授業実践を通して，「生かす数学」で提案された精神を育てる方法と評価のあり方について考えてみたい。なお，本稿で取り上げる実践は，小野雄祐(2010)の「中学校第１学年角の二等分線の作図」と同じ意図をもって実施されたものであることをあらかじめお断りしておく。

2. 図形の論証指導と「生かす数学」の精神との概要

（１）「生かす数学」の精神と図形の論証

「生かす数学　中学２年」の教科書では，用語「証明」を定義した後，「合同な図形」の単元で，図形の合同を定義し，三角形の合同条件，さらには証明のすすめ方を学習する。次に「三角形と四角形」の単元において，図形の性質を三角形の合同条件をもとに探求し数学的体系をつくることを意図している。これらの段階では，「望ましいカリキュラム」の精神である「日常事象における問題を解決したり自然現象における予測などを行ったりする際には，事象を数理にとらえた上で，ともなって変わる数量を特定し，その関係を考察することが第一歩となる。」(杉山，2003，p.27)は顕在化しない。

一方で「生かす数学　中学２年」の具体的精神は，「本教科書の特色」の中で，次のように述べられている。

「本教科書では，身の回りの問題を数学を用いて解決することを中心にするとともに，数学の有用性が分かるようにするため，まず，解決したい問題を提示し，その解決によって必要な数学を学んで問題を解決することを通して，数学を用いることによって問題が解決できたという気持ちが生まれるようにしたい。そうしない単元では，数学を学ぶ必然性が分かるような展開を工夫した。」（杉山，2003，はじめに）

本稿で対象とする図形の論証は，後者にあたると考える。すなわち本稿では，図形の論証指導において「数学（論証）を学ぶ必然性が分かる」ように学習指導することを目指したい。

では具体的にどのような指導によってそれを実現したらよいか。その手がかりを，杉山吉茂(1987)による「公理的方法に基づく算数数学の学習指導」に求める。この著書の中で杉山は，図形の論証の目的を次のように述べている。

「本論文においての証明のねらいは，ある命題の真なることを示すことの他に，要素を分析することにもあるとしている。それは言い換えれば，根拠を求めるということでもある。そのことを強調するとすれば，普通にある命題の真なることを示す証明をした後で，もう一度証明を振り返って，真なることを保証する要素と命題との関係を調べてみるべきである。そうすることによってその証明は厳密になり，命題をより一般的にしたり，新しい問題を発見したりして，発展的に学習を進めることができるからである。」（杉山，1987，p.134）

本稿では，杉山の述べる活動を意図的･段階的に取り入れることにより，生徒が数学(論証）を学ぶ必然性がわかり，数学(論証)を発展的に学習するとともにその面白さに気づくように指導することを目指す。その結果，生徒が証明を書くことの有用性がわかるとともに，それを読むことによって新たな命題ができることの面白さに気づき，｢生かす数学｣の精神である以下の特色を実現したいと考える。すなわち，｢日常事象や自然現象を数理的に把握し数学を積極的に用いて問題を解決する活動や，数学を創造的・発展的に学習できるようにすることを通して，数学のよさ，数学の楽しさが感じられるようにした。」（杉山，2007，中学校編の特色）

さらには，このような活動を通して，｢レベルの高い数学教育を目指すとともに，数学を活用できる人間を育てる」（杉山，2010，p.1）ことを目指したい。

（2）「生かす数学」で示された教材と本実践の教材との違い

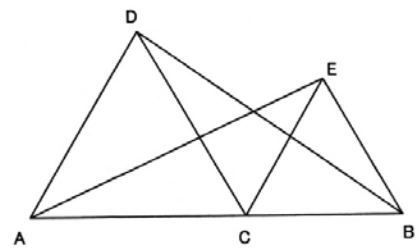
本実践では，書いた証明を読むことによって，真なることを保証する要素と命題との関係を調べたり仮定がどこに効いているか考えたりする活動を通して，証明をより厳密に表現したり命題を一般的にしたり新たな命題を発見したりできるようにするとともに，数学（証明）の学習が創造的なものとなることを目指したい。さらには，これらの学習活動を通して，論証指導の初期の段階で生徒に，証明を書いたり読んだりすることの意義を伝えたいと考える。

より具体的には，杉山（1987）の証明指導のねらいである「証明を振り返り，発展的に考察する生徒」の育成ならびに評価を，実践授業を通して検証することを目指す。

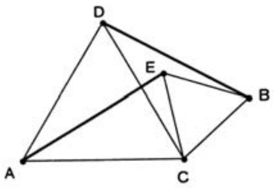
この際，教材案としては，｢生かす数学　中学２年｣のp.84に示されている以下の問題が候補として考えられる。

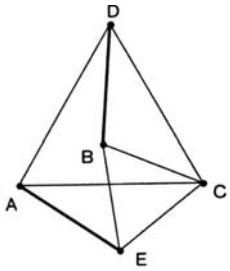
問題

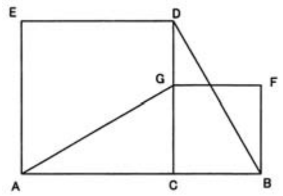
線分AB上の１点をCとし，AC，CBをそれぞれ１辺とする正三角形ACDと正三角形CBEを図のようにつくれば，AE＝DBとなります。このことを証明してみましょう。

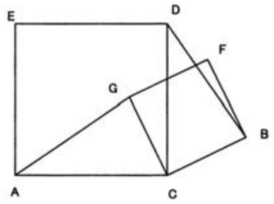


この問題のよさは，過剰条件の問題であって，書いた証明を見直し，必要な仮定と過剰な仮定を精査することによって，どの仮定が結論に影響を及ぼすかがわかりやすい点にある。さらに証明で使わない仮定は外してもよいことに気づいた後には，以下のような様々な発展が考えられる。







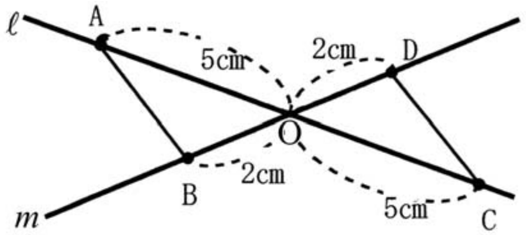


しかし一方でこの問題は，p.74から始まる三角形と四角形の学習の10頁後となる。また，小野雄祐(2010)が実践した中学校第１学年の線対称・点対称の性質を利用した作図とはあまり関連がない。本研究ではここに教材の系統性の視点から飛躍があると考え，本実践の課題を構想する。具体的には，証明の意義の直後，「生かす数学　中学２年」でいえば，第４単元「三角形と四角形」の前，すなわち第３単元「合同な図形」で，証明を書くことの意義を伝えたい。さらには，作図で活用した線対称や点対称の視点を加味したい。これが本実践で次に述べる問題を扱う意図である。

3. 実践の構想

（１）本実践で扱う問題と展開（全２時間計画）

２直線 ℓ と m が点Oで交わっている。
OA＝OC＝５cm，OB＝OD＝２cmのとき，
AB＝CDとなることを証明しなさい。



仮定）OA＝OC＝５cm
　　　OB＝OD＝２cm
結論）AB＝CD
証明）△AOBと△CODについて
　　　OA＝OC＝５cm ……仮定
　　　OB＝OD＝２cm ……仮定
　　　∠AOB＝∠COD ……対頂角が等しい
　　　２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので，△AOB≡△COD
　　　合同な図形の対応する辺の長さは等しいので，AB＝CD　　Q.E.D.

本問題の結論を導くためには，△AOB≡△CODを示した後，「合同な図形の対応する辺の長さは等しい（２つの図形が合同であれば，対応する辺の長さは等しい）」という推論を用いる。さらに，△AOB≡△CODを示すために必要な知識は，図形の性質としての「対頂角は等しい」と，三角形の合同条件（２組の辺とその間の角がそれぞれ等しい），2つの三角形が合同であることの証明の手順，の３点である。以上のことを知っていれば，仮定

をもとに結論を示すことができる。このことは，証明学習の初期段階で本問題を実践できることを示している。

また本問題は，前述の「生かす数学」で提示された正三角形の問題と同様，過剰条件である。

実際の授業では，証明した後，OA・OCの長さとOB・ODの長さが，5㎝や２㎝である必要があるのか考えさせる。この結果，OA＝OC，OB＝ODであれば結論を示すことができることを確認する。この段階が杉山のいう要素を分析する段階である。さらには，別の長さでもAB＝CDとならないか，実際に書いて確認する。

次に，AB＝CDとなるような点のとり方は，長さを変える他にもあるはずと気づかせる。これらの学習活動の結果，新たな学習課題，「AB＝CDとなるような点のとり方を考えよう」を提示する。

第１時は，合同条件を「２組の辺とその間の角がそれぞれ等しい」を利用する点のとり方を探らせる。これは最初に提示した問題と同じ合同条件である。

第２時には，合同条件を別の合同条件に変える。今回は「１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい」を利用して点のとり方を探らせる。どちらの活動でも，自力解決後，生徒の考えた点のとり方を学級全体で確認する。その際，最初の証明と点のとり方や証明について違いがあるかを確認する。

さらには，第１時の証明を振り返る段階で，AB＝CDとなる点の取り方は，この辺を含む２つの三角形が線対称か点対称な位置になるようにとればよいことに気づかせる。

以下では，課題設定や授業展開を工夫した意図ならびに評価について述べる。

（２）課題設定と展開の工夫

前述したように本実践では，「証明を振り返り，発展的に考察する生徒」の育成を目指している。生徒が発展的に考える授業には，自由に考えさせる展開とある程度の段階を設定して考えさせる展開の大きく分けて２つの方法が考えられる。本実践では，次の３つの段階を経て発展的に考察する展開を考える。

１つ目は，過剰条件の除去である。

最初に提示する問題は，Oから４点までの長さとして，OA＝OC＝５㎝，OB＝OD＝２㎝と提示している。この問題を証明する際，実際の長さは証明で使っていない。OA＝OC，OB＝ODとなっていればよく，仮定にある具体的な長さは結論には影響しない。このような学習は，生徒に証明を読む必然性を与える契機となる。さらにこのことは，書いた証明を読むことによって気づくことである。このような振り返りを契機に，次の課題を設定する問いへとつなげる。

２つ目は，「AB＝CDとなるような点のとり方を考えよう（２辺挟角）」である。

課題１の学習により，2辺が等しくなる仮定以外は変更しても構わないことに気づくはずである。このことは，2辺の長さが等しくなっていれば他の取り方をしてもよいことに連なる。この上で第２の課題，「AB＝CDとなるような点のとり方を考えよう」と提示する。点のとり方を探らせる際，まず合同条件は変えず，2辺挟角相等で証明できるようにCとDの点のとり方を探らせる。この点のとり方や証明の確認を第１時に行う。

３つ目は，「AB＝CDとなるような点のとり方を考えよう（２角挟辺）」である。

第１時では合同条件を同じままで新たな仮定を考え，命題を考えた。本時では合同条件を変えてもよいことを確認した上で学習課題を設定する。

このように３つの段階を経て展開する意図は，以下のように考えるからである。

本実践は，中学校第２学年の証明を学び始めて間もない時期に行うので，点のとり方を考えさせる際，最初から合同条件まで変えて構わないとしてしまうと，生徒は仮定の何を変えてよいのかわからず混乱してしまう可能性がある。また，それぞれの考えを発表させたときも，他の生徒がその証明を理解しづらいと考える。さらには，今後証明を発展的に探らせる際，まずは同じ合同条件で別の点のとり方を考えさせ，次に別の合同条件に合う点のとり方ができるか探る生徒を育てたいからである。

言い換えれば，過剰条件の問題を考えることによって仮定と結論との関連を分析した上で，「AB＝CDとなる点のとり方を考えよう」という課題を，三角形の合同条件を変えないで考える段階と，変えてみる段階と２つのステップを踏むことによって，書いた証明を振り返りそれを根拠に発展的に考える生徒を育てたい。これが「生かす数学」の精神を育てるための本実践の展開の工夫である。

（３）本実践の評価

この問題の証明の根拠は三角形の合同である。１つ目の課題に対して，過剰条件を除去したり変更したりしてもよいことを理解できたか，プロトコール・学習感想で評価する。

２つ目，3つ目の課題に対して，条件に合うような点をとることができたか，さらには，条件にあう点の取り方が合同な三角形を線対称や点対称の位置に置くこととととらえることができたかを，生徒の書いたワークシートから分析する。

生徒が，証明を振り返り，根拠を合同条件に求め，発展的に探る生徒の思考の様相を学習感想から検証する。

4. 実践の概要

（１）実践の日時

授業者　：小野雄祐

対象生徒：仙台市内公立中学校２年29名

授業時数：全２時間

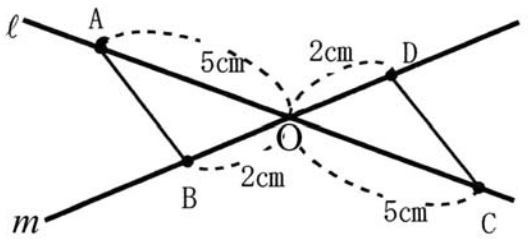
日時：第１時 平成23年11月24日（木）
　　　　　　　第１校時（実際は61分）
　　　第２時 平成23年11月28日（月）
　　　　　　　第６校時（実際は46分）

（２）実践の概要

※以下生徒の氏名は全て仮名である。

第１時

２直線 ℓ，mが交点Oで交わっている図に，OA＝OC＝５㎝，OB＝OD＝２㎝となるように点A，B，C，Dをとる。



このとき，AB＝CDとなりそうだという予想をたてた。次にこのことを示すために△OAB≡△OCDを示せばよいことを確認した上で，問題を設定した。

> **問題**
>
> ２直線 ℓ とmが点Oで交わっている。OA＝OC＝５㎝，OB＝OD＝２㎝のとき，AB＝CDとなることを証明しなさい。

実際の授業では，最初に仮定と結論を確認し，次に各自で証明を完成させた。その後，学級全体で証明の記述を確認した。

仮定）OA＝OC＝５cm
OB＝OD＝２cm
結論）AB＝CD
証明）△OABと△OCDについて
OA＝OC＝５cm…仮定
OB＝OD＝２cm…仮定
∠AOB＝∠COD ……対頂角が等しい
２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので,△OAB≡△OCD
合同な図形の対応する辺の長さは等しいので,AB＝CD　Q.E.D.

証明が完成した後には，証明を読む活動を取り入れた。ここからが本実践の課題１である。実際の授業では，以下のようなやりとりによって確認している。

T72：ちょっとみんなに，まず一つ考えてもらいたいんだけど，ここってさ，AOとCO５cm，BOとDO２cmって書いてあるけど，5cm，２cmじゃないとだめ？
S61：だめ。
T73：だめ。５cmと２cmじゃないと長さ等しくならない？
S62：いい，大丈夫だ…。
T81：じゃあ４cm，1cmでいってみるか。４cmにしよう。で１cmな。こういうふうに長さとって，ここの長さが４cmつくる。こういうふうに点とったとしてもここ４cm。A'とC'４cm，B'とD'１cm…でとってもA'B'とB'D'長さ等しいといってわざわざ証明する必要ある？
S71：ない。
T82：最初にやった証明と何か違いある？
S72：長さ，数。
T83：こっち(前述の証明)でやった証明と変わるところある？
S73：何cmか。
T84：どこの数？
T85：ここを取っ払ってしまえば別にOAとOC，OBとODが長さ等しければ数とっても良いようだね。
T86：５cm，2cmなくてもいいけど，変えちゃいけないのは？
S74：AO＝CO, BO＝DO, ダッシュは？
T87：そうですね。ダッシュは記号の違いだからね。で，こういうふうに実は，点のとり方この１通りだけではない。

以上のように，授業ではA’O＝C'O＝２cm，B'O＝D'O＝５cmの場合やA”O＝C”O＝４cm，B”O＝D”O＝１cmとしても，AB＝CDとなることを確認している。

点のとり方を変えてもAB＝CDとなる点があることを気づかせた後，次のように課題を設定した。

T88：なので，今日はみんなに色々な点のとり方ないかなっていうのを考えてもらいます。学習課題書きますので，みんなも黒板うつしてください。

学習課題
ABとCDの長さが等しくなるような点のとり方を考えよう。

授業では，点AとBは固定し，点CとDについて，ABと長さが等しくなるように，つまり△OAB≡△OCDとなるような点の

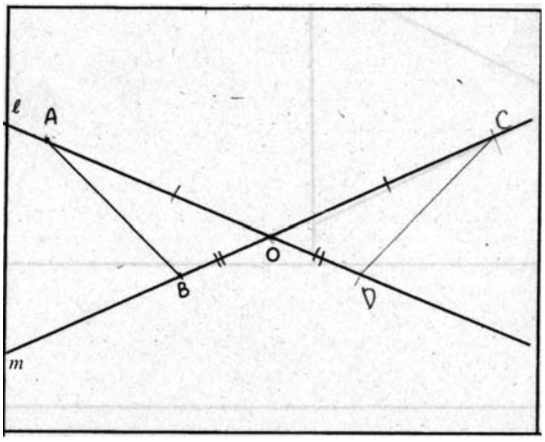
とり方を考えさせている。以下がその際の生徒とのやりとりである。

T96：はい，じゃあ一回顔上げてね。最初の操作な。最初先生何やったっけ？
ℓ，*m*ひきました。次は？
S80：ACをとった。
S81：５cmを書いた。
T97：点AとCが５cmになるように点Oから５cmにとった。
T98：どこの点とった？ここにとったってことはACを１つの直線にとったわけだ。で，同じようにしてOからBとD２cmになるようにして，1つの直線*m*上にとって，AとD，ここところ結んだんだよね。
T99：最初に確認したけど，AO・CO，BO・DOが５cm，2cmである必要は？
S82：ない。
T100：最初に先生は，等しければいいことを確認したね。ACが同じℓ上，BDが同じ*m*上になるようにとった。それ以外に点のとり方ないかなって考えてもらいたい。
S83：示せますかに何書くんですか？証明書けばいいんですか？
T101：そうだね。２辺とその間の角等しいっていえればいいんだよね。ちょっと隣近所の人と相談しながらやってみてね。
T102：この辺にDととってだめですか？っていわれたんだけど，「ℓ，*m*上にとる」は外さないでください。

このように確認した後，再度自力解決をさせた。自力解決の後には，学級全体で２通りの点のとり方を確認した。

１つ目は次の図である。もとの図はℓ上にAとC，*m*上にBとDをとっているが，それに対して，下の図はℓ上にAとD，*m*上にBとCをとっている。この図での証明では変わっている部分がない。

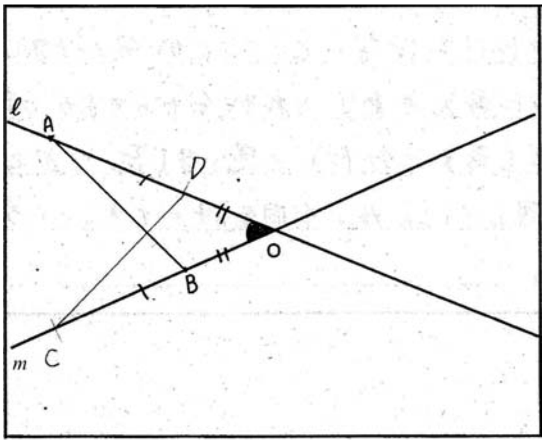
授業では，この図をかいた生徒に，紙に実際に書かせた。その後証明を確認した。確認した証明は以下の通りである。なお，以下の図と証明は，生徒がかいたワークシートをまとめたものである。



証明
△OABと△OCDにおいて
仮定よりOA＝OC
OB＝OD
対頂角は等しいので∠AOB＝∠COD
２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので，
△OAB≡△OCD
合同な図形の対応する辺の長さは等しいので，
AB＝CD

この方法について，自力解決の段階で図をかくことができた生徒は，14／29名，証明まで完成できた生徒は６／29名である。

次に，点C・DをOに対して点A・Bと同じ側にとっている以下の図を生徒に紹介した。



証明
△OABと△ODC（ママ，本来はOCD，以下同様）**において**
仮定よりAO＝CO
BO＝DO
共通なので∠AOB＝∠DOC
２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので,
△OAB≡△ODC
合同な図形の対応する辺の長さは等しいので,
AB＝CD

自力解決の段階でこの図をかくことができた生徒は８／29名，証明まで完成した生徒は２／29名である。

以上の点のとり方と証明を確認した後，点対称な位置にある図と，線対称になるようにとった図を比較し，証明は変わらないこと，2つの図形の位置関係は点対称と線対称な関係になっていることを以下のように確認した。

T124：これとこれで，最初の図とこの図で,証明どうだった？なにか違うところあった？
S101：変わらない。
T125：まるっきり一緒だったよね。AOとCO長さ等しいよ。BOとDO長さ等しいよ。対頂角等しいよ。
T126：ただ,点のとり方としてはちょっと違うよね。どうとった？ℓ上にAとCとったところ，AとDになってる。
T127：m上にBとDとったのがBとCになってる。この位置関係みて何か気付くことない？
T128：この２つの三角形の位置関係さ，違いない？
S102：向き？
S103：向きが違う。
T129：加東君もう一回。
S104：点対称と点対称になっている。
T130：こっちの三角形はどういう位置関係なの？
S105：パタンとやったら重なる。
T131：パタンとやったら重なる？これどうやったら重なる？
S106：まわす。
T132：じゃあどういう位置関係？
T133：こっちは？
S107：点対称。
S108：線対称。
T134：線対称になるんだね。ここがぱたっとこの２つの三角形重なる。つまりABCD長さ等しくなるわけだね。

次に，点対称な位置になっている図と，点C・DをOに対して点A・Bと同じ側にとっている図について，点のとり方の違いによって，合同を証明する際の要素「２組の辺とその間の角」が等しいことの根拠が「対頂角が等しい」から「共通」に変わることを以下のように確認した。

T135：この２つで比べるとどうかな？証明は丸っきり一緒かな？何か違うところあるかな？

T136：証明まるっきり一緒かな？こっちの証明とこっちの証明。
T137：加菜さん，何か違うところない？
S109：角が…。
T138：みんなに聞こえるように。こっちはどうなってんの？
S110：対頂角が等しくなっている。こっちは対頂角が等しいからAOB，COD等しい。
T139：こっちは？
S111：共通。
T140：こっちはここに三角形とったから同じ側にとったから,Oの角は共通になっている。だけど,結局いえる合同条件は？
S112：２辺とその間の角。
T141：そうだね，2辺とその間の角が等しいで合同だ。証明はちょっと違う，その間の角の部分が違うけど，条件は同じだね。

最後に生徒に学習感想を書かせ，第１時を終わらせた。

第２時

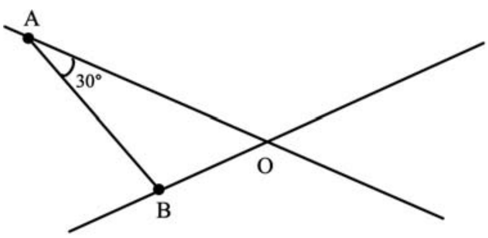
第２時は，最初に第１時の学習活動を振り返ることから始める。具体的には, 前時に確認した点のとり方と証明の差異の有無について，対称な関係になっていることについて確認した。前時の確認を終えた後に, 以下のような形で本時の学習課題を設定した。

T17：この前の授業で最後に学習感想書いてもらったよね。その学習感想であるクラスから出てきた学習感想を紹介します。
「証明する方法は一つだけではないことが分かりました。私が思いつかなかった考えもあり，それが分かってよかったです。
もっと他の方法も考えてみたいと思いました。『２辺とその間の角はそれぞれ等しい』以外の合同条件でももっと考えてみたいです。」という感想がありました。この点のとり方って２辺とその間だけでないとだめかな。
S13：３辺，1辺とその両端。
T18：３辺がそれぞれ等しいできる？３辺がそれぞれ等しいような点のとり方，3辺がそれぞれ等しくなるような点のとり方はできるかな？
S14：できない。
T19：結論ってなんだったっけ？
S15：AB＝CD
T20：としたら３辺がそれぞれ等しい使える？
S16：使えない。
T21：２辺がそれぞれ等しいは，前回やりました。３辺がそれぞれ等しいは，結論を使うから無理。というわけで残るは？
S17：１辺とその両端の角。
T22：だよね。それだったら使えそうじゃない？今回は１辺とその両端の角がそれぞれ等しいで使えないか考えてもらいたいと思います。ワークシート配ります。渡されたら組番号名前を書いてください。学習課題です。直線ℓ，m上に，AB＝CDとなるような点のとり方を考えてもらう。ただし今回は合同条件を「１辺とその両端の角がそれぞれ等しい」になるよう考えてほしいと思います。
T23：角何個知りたい？
S18：２つ。
S19：対頂角だからわかってるからい

らない。
T24：今宇津美いってくれたけど，角一個は自動的にわかる。だからあと一つ分かればいいよね。角等しくなるように作図を毎回するのは大変です。そこで，一つを30° とする。とすると，道具何使える？
S20：分度器。
T25：分度器はね，今回使いません。
S21：三角定規。
T26：それでいきましょう。△OABと合同になるようにCDっていう点をどのようにとったのか，書けるようにね，お願いします。

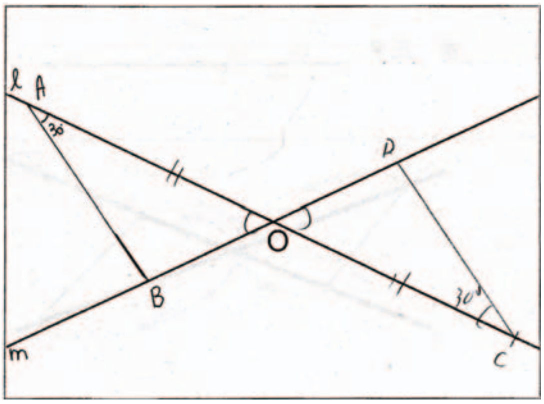
３つの合同条件のうち，「３辺がそれぞれ等しい」は結論を証明の要素として使うことになるため，それを使うことはできない。そこで，「１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい」を利用した点のとり方を考えようとして，次の学習課題を設定した。

学習課題
AB＝CDとなるような点のとり方を考えよう（１辺とその両端の角がそれぞれ等しくなるように点をとる）



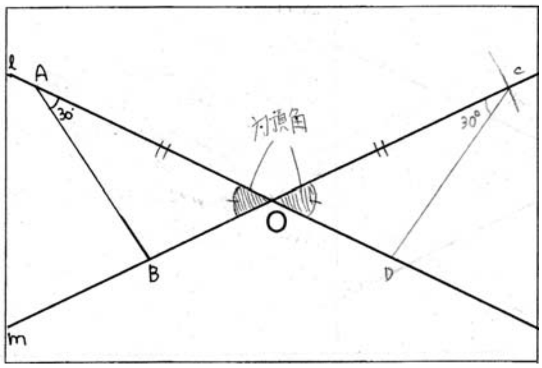
なお，第２学年に入って，作図の学習の復習として，等しい角をとる作図の仕方を学んでいるが，毎回作図をすると時間がかかってしまうため，今回は，三角定規の１つの角を利用して30° をとってもよいとした。

自力解決をさせた後，学級全体で以下の４通りの点のとり方を確認した。



証明
△AOBと△CODにおいて
仮定からAO＝CO
∠BAO＝∠DCO
対頂角は等しいから，∠AOB＝∠COD
1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから，
△AOB≡△COD
合同な図形の対応する辺の長さは等しいから，
AB＝CD

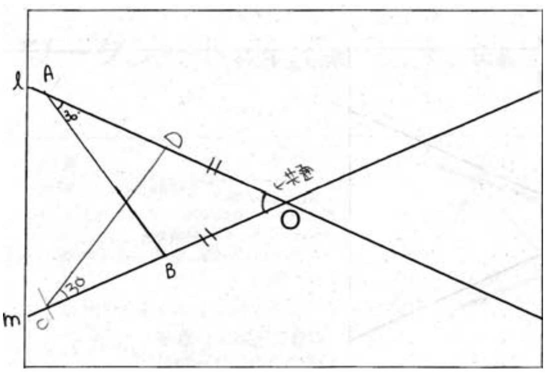
点対称な位置に点をとる上の方法は，自力解決の段階で，図をかくことができた生徒は21／29名，証明まで完成できた生徒は，18／29名である。



証明
△ABOと△CDOにおいて
仮定よりAO＝CO
仮定より∠BAO＝∠DCO

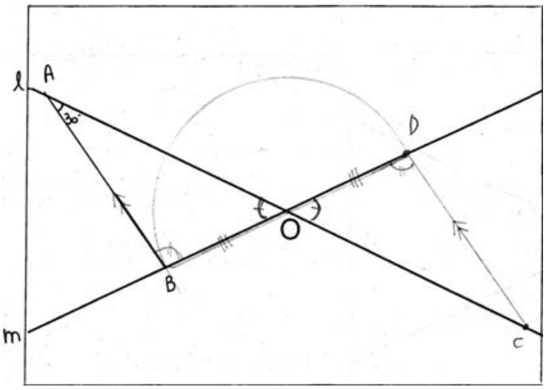
対頂角は等しいので，∠AOB＝∠COD
1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，
△ABO≡△CDO
合同な図形の対応する辺の長さは等しいので，
AB＝CD

次に線対称な位置に点を自力解決の段階で，図をかくことができた生徒は22／29名，証明できた生徒は20／29名である。



証明
△ABOと△CDOについて
AO＝CO（仮）
∠BAO＝∠DCO（仮）
∠O共通
１組の辺とその両端がそれぞれ等しいので，
△ABO≡△CDO
合同な図形の対応する辺の長さは等しいので，
AB＝CD

第３の方法である折り返した形の位置に点をとる方法について，図をかくことができた生徒は19／29名，証明まで完成できた生徒は16／29名である。



証明
△AOBと△CODについて
DO＝BO
平行線の錯角なので∠ODC＝∠OBA
対頂角は等しいので∠DOC＝∠BOA
１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，
△AOB≡△CODについて
合同な図形の対応する角の大きさは等しいので，
AB＝CD

第４の方法である，平行線をひく方法について，図をかくことができた生徒は４／29名，証明まで完成できた生徒が４／29名である。

以上の考えについて点のとり方や証明に差異はあるか確認した。３分ほど証明の不足しているところなどの補足をさせた後，学習感想を書かせ第２時の授業を終わらせた。

5．本実践の考察

本実践では，学習課題の１から３の段階を経て発展的に考察してきた。以下では，このように課題を設定したことの評価を行う。

（1）過剰条件を見直した活動の評価

授業後の学習感想には，「長さが変わってもAB＝CDがいえるいろんな考え方があるこ

とがわかりました。(T. M）」と書いている生徒もあり，生徒は証明を読み直すことによって，仮定の何が結論に効いているかを判断できたようである。このように考える最大の理由は，学習課題2，3において29名中，20名前後の生徒が結論を導くことのできる図を完成できたことによる。

（２）条件に合うような点をとることができたかの評価（第１時）

第１時の29名のワークシートを集計した結果は以下の表の通りである。

	図をかくことができた生徒	証明が完成した生徒
線対称な位置に点をとることができた生徒	14名	６名
Oに対して同じ側に点をとることができた生徒	８名	２名

できた生徒を指名し，一斉指導の形で証明まで確認したのが前述した授業の概要である。

次に第１時の感想を分析してみたい。ある生徒は，「１つの図形から同じ結論にたどりつくけど，色々なもとめ方があるのだと知りました。どのように点C，Dをとったかの説明を文にするのが難しかったです。（O. K）」と書いている。証明が難しいと考えている生徒は他にもいる。「自分で考えた図形では証明するのがむずかしかったです。（中略）まだ証明のやり方があやふやでした。（M. A）」等である。別の生徒は，「今日は図形の証明の応用？みたいなことをした。△ABOと合同な図形をつくるCOとDOのながさが変ってもいいということとCDのひき方がちがくても（ママ），証明するときは形が変わらないということがわかった。ただ自分では１つもできなかったので，つぎはこれをふまえて１つだけでもできるようにしたいと思う。授業はよくわかった（K. H）」と書いている。前者の２人の生徒は，説明の難しさに触れているが，まだ証明を書くことになれていない学習段階であるので仕方ない。最後の生徒も１つもできなかったと書いているが，この生徒は「授業はよくわかった」と書いており，これらの感想から授業者の意図はある程度，生徒に伝わったと考えている。

また，後者の生徒同様，「１つの合同な図形でも，いろいろな点のとり方があるというのが分かった。点のとり方が変わっても，使う合同条件は同じだった。（T. T）」や，「どんな方法をしても証明はほとんど変わらないことは単純なことなのにわからなくて驚きました。なのでこの証明を覚えて他の問題にも備えていきたいです。（S. Y）」と書いている生徒もいる。これらの生徒は，複数の証明を読んだからこそ，その共通性に気づいたといってよい。

一方で証明の多様性に気づいた生徒は多い。「点の取り方だけで，合同な図形の形がいろいろ変わるということが分かりました。私は１個しかおもいつかなくて宇津美Ⓚのやり方を聞いて納得しました。ほかにもいろいろあるのか知りたいです。（S. S）」と書いている。中でも「見た目がちがうが証明は，2辺とその間でできたのがけっこうあった。その間の角だけ対頂角から共通に変わっているのがおもしろかった。C, Dのとった所が変わったから当然？向かい合っているからどっちも左に変わった。（S. T）」の感想からは，２つの証明を詳細に比較していることがわかる。

合同な三角形の配置から既習事項と関連づけた生徒は多い。「授業の最後にみんなが考えた図形を見て，『なるほど！』と思いました。（M. A）」や，「図形をどこにとっても証明はすべて同じになるということが分かった。合同な図形はすべて点対称か線対称であることも分かった。（U. T）」,「合同な図形が点対しょう，線対しょうになっていることがわかりました。考えるとき，なかなか自分の意見がお思い（ママ）浮かばなかったけど，宇津美と山賢の意見を聞いておもしろい考えだなと思いました。（S. M）」等の感想が書かれている。点（線）対称な図形で対応する点や辺の長さは等しい。このことは中学１年で学習済である。そもそもが与えた二本の直線に対して，その直線上に線分の長さが等しくなるように点を取るということは，点（線）対称な直線上に点（線）対称な位置に点をとり，点（線）対称な図形を考えることである。このことは小野雄祐(2010)の作図の実践を通して確認されたことではあるが，証明においてもこのような学習活動ができたことが本研究では価値あることと考える。さらには，このことが杉山の言う「書いた証明を読むことによって真なることを保証する要素と命題との関係を調べることになる」と考える。

これらの活動は，生徒にもっといろんな証明を考えてみたいという意欲を喚起したようである。授業でも取り上げたが,「証明する方法は一つだけではないということが分かりました。私が思いつかなかった考えもあり，それが分かってよかったです。もっと他の方法も考えてみたいと思いました。『２辺とその間の角はそれぞれ等しい』以外の合同条件でももっといろいろ考えてみたいです。（S. R）」という生徒はその代表である。

（３） 条件に合うような点をとることができたかの評価（第２時）

第２時の29名のワークシートを集計した結果は以下の通りである。

	図をかくことができた生徒	証明が完成した生徒
点対称な位置に点をとることができた生徒	21名	18名
線対称な位置に点をとることができた生徒	14名	６名
Oに対して同じ側に点をとることができた生徒	８名	２名
平行線をひいて点をとることができた生徒	４名	４名

これらの数値は，第１時よりも飛躍的に多くなっていることが明らかである。このことは証明の初期であっても証明を振り返り，根拠を合同条件に求め，発展的に考えることができるようになっていることを示している。さらには証明を書くことの適用練習にもなっている点に価値があると本研究では考える。

次に第２時の学習感想を分析してみたい。

本時に証明ができなかったある生徒は,「前回やったやり方を今回使うことができなかったので次にやるときは前回のを思い出してやりたいと思います。１つの角の大きさがわかると『１辺とその両端の角がそれぞれ等しい』で求められることがわかりました。（S. H）」

と書いている。自分では証明できなかったが授業を通して証明のポイントが理解できていることがわかる。他に「合同条件を『１辺とその両端がそれぞれ等しい』に変えても証明で表せることが分かりました。（S. Y）」や，「『１辺とその両端の角がそれぞれ等しい』という合同条件でも合同が示せることが分かりました。合同はいろんな方法で証明できることが分かりました。（S. R）」,「点の取り方によって合同条件の求め方が変わることがよく分かりました。点の取り方を工夫すれば求め方は色々あるのが『なるほど！！』と思いました。求めるのが大変でした。（M. T）」等の感想は，課題を２つ連続させたことによって，少なくとも証明を読み，その内容が理解できたことを示していると考える。さらには，これらの感想から「数学は答えは１つ」であるが「解決方法は多様である」こと，さらには「結論は同じであっても証明方法が多様であること」を理解していることがわかり，数学的教育的に価値ある活動ができたと考える。

今回の実践は，多くの生徒が面白いと感じてくれたようである。例えば，ある生徒は，「線のとり方が全て違うのに説明するとかならず『１辺とその両端の角がそれぞれ等しい』になるのがびっくりした。今回みたいに合同条件をそろえて考えていく作業がとてもおもしろかったし，楽しかったです。（M. A）」と書いている。また他の生徒は,「前回は『２辺とその間の角』で証明したけど，今回は『１辺とその両端の角』でやったから，点の取り方の種類が増えていたのがおもしろいと思った。（T. T）」等，内容を理解した上でおもしろいと感じてくれたことがよくわかる感想である。

平行線を利用した点の取り方については評価が高い。ある生徒は,「前回やったことを利用して，条件を変えてやってみれてよかったです。この点の位置の表現（引用者注；２直線上にとった点の位置の説明のしかた）がむずかしかったので『表現力が身につくと生活の中でも便利だなぁ』と思いました。この  の形でAB＝CD以外も求められるなと思いました。錯角を利用して求める考え方がおもしろいと思いました。点のとり方は同じでもいろんな考え方があるのがわかりました。（S. A）」と書いている。この感想からも課題を連続して，合同条件を変えて命題をつくった本実践のよさが出ていると考える。

これに関連してある生徒は,「合同な図形の証明のし方は１つではないことがわかった。同じ図形でも，2辺でできたり，1辺でできたりすることがわかりました。（S. M）」というものや,「二本の直線から，三角形の合同条件，2辺とその間の角が等しい，1辺とその両端の角がそれぞれ等しいを使って，合同な三角形をかくと，かく方法は全て違うけど，証明をするときはほぼ同じになることが分かりました。応用問題も解いてみたいです。（I. A）」と書いている。別の生徒は,「点のとり方は前の授業と似ていましたが，平行や対頂角，共通などを工夫すれば,『１辺とその両端の角がそれぞれ等しい』の条件で証明できることが分かりました。私が考えたのは３つですが，その他には全然思いつきませんでした。他にあったら教えて下さい。今回の図形以外のも挑戦してみたいと思いました。（O. K）」と書いている。次の生徒の感想は，この２時間を連続してやったことの価値がよくわかるものと考える。「１辺とその両端の角がそれぞれ等しいを考えるとき，2辺とその間の角がそれぞれ等しいの考え方が似ているため，合同な図形のかたちも似ている。点対しょうや線対しょうでもあった。３辺の長さがそれぞれ等しいを使っても合同な図形なので，点対しょうや線対しょうになると思う。自分や相手の考え方がわかる授業ですごくわかりやすかった。（S. M）」と書いてある。

（4）まとめ

以上，（1）～（3）の分析から，本実践で課題1～3を連続して展開したことは，生徒に「生かす数学」の精神である「証明を学ぶ必然性」を理解する上で，有効であったと結論づける。さらには，「生かす数学」の精神を育てる方法として，合同条件を変更して学習課題を設定したことの効果があったと考える。このことは，第1時よりも第2時で多くの証明ができるようになっていることから明らかと考える。この実践だけで全てを言い尽くすことはできないが，杉山(1987)の主張する「そうすることによって，その証明は厳密になり，命題をより一般的にしたり，新しい問題を発見したりして，発展的に学習を進めることができる」授業展開になっていると評価している。また，本実践の生徒からは，証明の類似性や相違点に触れる感想が出ていること，線対称や点対称の視点から合同や図形を見直せたことなど，「生かす数学」に提示されている問題に対する代案を出した本実践の工夫の妥当性を示せたと考える。

6. おわりに

本稿の目的は，中学校第2学年の図形と論証において新たな教材の提案とその授業実践を通して，「生かす数学」で提案された精神を育てる方法と評価のあり方について考えることにあった。考察で述べたように，実際の指導ならびに授業後の学習感想の分析を通して，「示された証明を振り返り，発展的に考察する生徒」の育成がある程度はできたと考える。

一方で，第1時の課題2における自力解決の段階において，正しく点をとることができた生徒，証明を完成させることができた生徒の割合は決して高くなかった。それに対して，第2時の課題3における自力解決では，正しく点をとったり証明したりすることができた生徒の割合が飛躍的に高まった。この原因は第1時に課題2の提示をした際，AO・COやBO・DOの長さを変える以外の点のとり方について，何をもって点のとり方が違うのか十分把握させることができなかったことにあると考える。指導の展開をさらに工夫し，第1時の段階でも自力解決ができる生徒を育成したい。これを今後の課題とする。

引用・参考文献

小野雄祐(2010),「中学校第1学年角の二等分線の作図」，杉山吉茂編『児童・生徒の数学的思考力・活用力を育成する算数・数学科学習指導方法と評価の研究』日本教材文化研究財団，p.116－141

杉山吉茂(1987),『公理的方法に基づく算数数学の学習指導』東洋館出版社

杉山吉茂編(2003),『我が国の学校教育における望ましい算数･数学のカリキュラムの構想』　日本教材文化研究財団

杉山吉茂編(2007),『生かす数学　中学2年』日本教材文化研究財団・東京書籍

杉山吉茂他編(2008).　『新しい数学1』東京書籍.

杉山吉茂編(2010),『児童・生徒の数学的思考力・活用力を育成する算数・数学科学習指導方法と評価の研究』日本教材文化研究財団

証明に基づく発展的な指導

東京学芸大学附属竹早中学校教諭　小岩　大

1. はじめに

中学校数学において，証明は，子どもにとって理解困難な学習内容である。その原因は様々に考えられるが，その一つとして「なぜ証明をしなくてはいけないのか」という証明の必要性や意義に関する問題がある。例えば「三角形の内角の和が180°」のように，子どもからするとよく知っている性質を，なぜ証明しなくてはいけないのか，何のために証明するのかが分からないという問題である。証明の必要性や意義が分からないので，証明のよさや価値も分からない。ただ与えられた問題をこなすだけの受け身の学習になり，加えて証明特有の記述が求められるため，ますます証明が分からなくなる。

証明の意義や必要性を理解させるには，命題が真であることを示すという証明のよさだけでなく，証明によって既知の知識が体系化され，新たな知識を得たり，いくつかの命題を統合できたりといった数学を創造発展させるための基礎としてのよさを感得させることが重要と考える。数学の創造発展における証明の有用性を知れば，生徒はそこに証明の新たなよさを見出し，それが証明の意義や必要性の理解につながると考えるからである。

こうした創造発展の基礎としての証明のよさに焦点を当てた学習指導に，杉山吉茂(1986)の「証明に基づく発展」がある。あることがらの証明から，結論を成り立たせている根拠を探り，明らかになった根拠に基づいて発展的に考察するという学習指導である。氏は，証明の役割として，「ことがらが真であることを主張すること」と「真であることを保証する要素を分析すること」の２つをあげ，「証明に基づく発展」の意義を次のように述べる。

「証明を，根拠や条件を求めるものという立場で考えることにする。これにより本質が明らかになり，それをもとに新しい知識，新しい問題が見出されたり，統合の視点が得られるという創造的な面が出てくるからである。<略>　その考えを中学生や高校生にも経験させれば，生徒は証明の新しい価値を知り，数学を発展的に考察するおもしろさも味わえ，主体的に学習を進めることもでき，数学に対する興味も増すのではないかと考える」（杉山吉茂，1986，p.138）

証明に基づく発展的考察を通して，氏が述べる教育的価値が実現できれば，上述の問題の改善だけでなく，数学を創造的発展的に考える力と態度を養うことも期待できる。

本研究は，この証明に基づく発展的な学習指導に焦点を当て，授業を計画実践し，その有効性と指導への示唆を考察することを目的とする。

2. 研究の方法

この目的に対し，次の方法で研究を進めた。

第２学年の単元「三角形と四角形」において，証明に基づく発展を意図した授業を３つ連続的に設定した。これまで，証明に基づく発展に焦点を当てた実践はいくつか見られる（例えば，小野雄祐，2008，清水宏幸，2010）が，いずれも１つの授業による実践である。

この点において先行実践とは異なる。3つ設定する理由は，本実践が発展の基礎としての証明のよさの感得を意図すると同時に，証明に基づいて発展的に考察する力や態度を育成することを意図しており，そのためには，発展的に考察する経験を繰り返し積むことが必要と考えるからである。

そして，これら3つの授業の記録や生徒の記述，学習感想から，生徒の思考の様相や，理解や考えの深化を分析し，指導への示唆を考察する。

単元	時	授業内容
平行と合同	1，2	多角形の内角の和
	3	多角形の外角の和
	4，5	対頂角，平行線と同位角・錯角
	6，7	三角形の内角の和，三角形の外角の性質
	8，9	平行線とくの字形，くさび形
	10，11	合同な図形，三角形の合同条件
	12	三角形の合同条件を使った証明
	13，14	作図と証明，証明のすすめ方
三角形と四角形	15，16	二等辺三角形の性質と二等辺三角形になる条件
	17，18	直角三角形の合同条件とそれを使った証明
	19，20	平行四辺形の性質
	21	平行四辺形になるための条件
	22，23	二等辺三角形を題材とした証明に基づく発展的考察
	24-28	平行四辺形を題材とした証明に基づく発展的考察 いろいろな四角形
	29，30	平行四辺形になるための条件の発展
	31，32	平行線と面積，等積変形
	33-36	四角形の4角の二等分線でできる四角形の発展的考察

表1　単元計画表

3. 単元計画

証明に関する単元「平行と合同」「三角形と四角形」の指導計画を**表1**のように構想した。

証明に基づく発展を意図した授業は，第22・23時の「二等辺三角形」の問題，第24時から第28時の「平行四辺形」の問題，第33時から第36時の「四角形の4角の二等分線でできる四角形」の問題である。なお，「平行四辺形」の問題の時間数が5時間と多い理由は，この探究の中で，長方形，ひし形，正方形および平行四辺形の定義とその包摂関係の学習も含むからである。

証明に基づく発展の授業に至るまでの指導では，証明に基づく発展の基礎的な力として，証明を書くことはもちろん，証明をよむことも重視する。特に，「根拠に使われている図形の性質は何か」という観点からのよみを大切にする。証明から根拠を探る力や態度を養うとともに，認めたことがら(公理・定義)や証明されたことがら(定理)を根拠として使っているかという体系の意識を育むことにつながると考えるからである。また，証明に関する理解として，帰納と演繹の違い，命題が真でないことを示すには反例を示せばよいこと，証明の一般性などを，機会をみて繰り返し指導する。

4. 証明に基づく発展の授業の実際

(1) 実践対象

実践は，東京都にある国立大学附属中学校2年生4学級を対象に行われた。以下に示す一連の授業は，実践した4学級のうち，最も議論が活発に行われた学級の授業である。

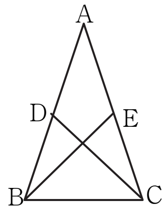
(2) 証明に基づく発展の授業の実際

ア「二等辺三角形」の問題の授業

① 本授業のねらいと教材

本授業の目標は，証明に基づく問題づくりを通して，証明から結論を保証する要素を明らかにし，その要素を変えて発展させるという考え方や証明が発展の基礎になることを知ることである。

問題　二等辺三角形ABCで，ABとACの中点をそれぞれD，Eとする。このとき，BE=CDとなることを証明しなさい。



教材は前ページの通りである。この問題は小野雄祐(2008)が考案した問題である。証明は右のようになる。

（証明１）△BCEと△CBDで，二等辺三角形ABCより，
∠B=∠C　…①，AB=AC　…②
②と中点D, Eより，BD=１/２AB=１/２AC=CE　…③
共通より，BC=CB　…④
①③④より, 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので,
△BCE≡△CBD
合同な図形の対応する辺の長さは等しいので，　BE=CD

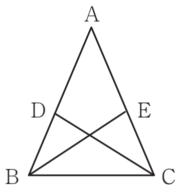
この証明を基に, 結論BE=CDとなる問題づくりを行う。

まず証明から結論BE=CDを成り立たせる根拠を探る。BE=CDの根拠は,

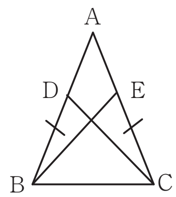
△BCE≡△CBDである。そして，その根拠は，二等辺三角形の性質と仮定,「中点」, 合同条件の３つである。

それぞれの根拠を吟味する。仮定「中点」に着目すると，③のBD=１/２AB=１/２AC=CEで使われている。しかし，BD=CEをいうのに，1/２である必要はない。「中点」を，例えば「AD：DB=AE：EC=１：１」に変えてもBE=CDは成り立つ。BE=CDそのものを仮定にしてもよい。よって，問題1, 2ができる。

問題１　二等辺三角形ABCで，AD：DB=AE：EC=２：１となる点D，EをAB，AC上にそれぞれとるとき，BE=CDとなることを証明しなさい。

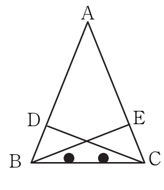


問題２　二等辺三角形ABCで，BD=CEとなる点D，EをAB，AC上にそれぞれとるとき，BE=CDとなることを証明しなさい。



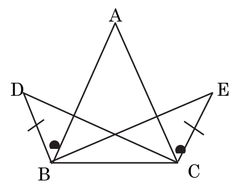
条件「二等辺三角形」は，問題の前提なので変えない。残った根拠は，三角形の合同条件である。ここで使われている合同条件は,「２辺挟角」である。これを他の合同条件，例えば「２角挟辺」に変えてみる。すると，問題３ができる。

問題３　二等辺三角形ABCで, ∠BCD=∠CBEとなる点D, EをAB，AC上にそれぞれとるとき，BE=CDとなることを証明しなさい。



ここで，つくった問題を振り返ってみる。仮定をいろいろ変えたが，一方で変わっていないところはないかという視点で見る。すると，どの問題も必ず点D, Eが線対称の位置になっていることが分かる。これは，二等辺三角形が線対称な図形であることに依存する。線対称な図形の線対称の位置で同じ操作をして点D, Eを決めているため，BEとCDも線対称の位置になり，長さが等しくなるのである。線対称という問題の本質に気付く

問題４　二等辺三角形ABCで，BD=CE，∠ABD=∠ACEとなる点D，Eをとるとき，BE=CDとなることを証明しなさい。



と，線対称になるように点D，Eを決めればよいのだから，それを利用して様々な問題をつくることができる。例えば，問題４が考えられる。このような問題は，中点や合同条件を見ているだけでは出てこない。線対称という視点を得たからこそつくることができる問題である。本質を見抜くよさがここにある。

Ｔ１：DB=ECをいうのに，仮定は中点じゃないとダメかな?
Ｓ１：(質問の意味がよく理解できず困惑した様子)
（Tが再度，説明，発問する）
Ｔ２：中点以外の他の仮定でもDB=ECにならない？
Ｓ２：そういうわけじゃない
Ｓ３：２：１でもいいってこと？
Ｓ４：なる。
Ｓ５：二等辺三角形は変えてもいいんですか？
Ｔ３：二等辺三角形はそのまま。
Ｓ６：AD=AE
Ｔ４：んっ，Ｓ6くん，例えばどんなふうに仮定が変えられる?
Ｓ６：二等辺三角形が変わらないんですよね。じゃあ，AD=AE

授業記録1

② 授業の実際

第１時

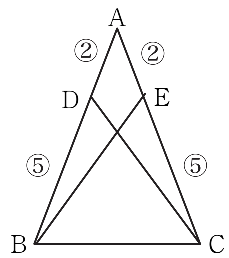
原題の証明を解決した後で，BE=CDの根拠を確認した。

課題「証明をもとにして結論がBE=CDとなる問題をつくろう」を提示し，考え方を全員が辿れるように，全員で考えを丁寧に進めた。

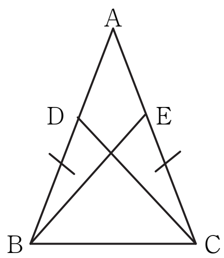
仮定「中点」を吟味する場面では，**授業記録１**のようなやりとりが展開された。

Ｔ１の発問に対して，初めその意味がよく分からない様子だったが，再度説明，発問をし直すと，意見が出始めた。一つの考えが出ると，それをきっかけに周囲も考えが浮かんだ様子だった。一例として「AD=AE」を全体で取り上げた後，自力解決させた。すると，**図１，２**の考えが出た。

図１の考えの説明は，以下の通りである。波線部から中点という条件を比でとらえ直し，AD：DB=AE：ECならばその具体的な比は何でもよいという一般性を見抜いていることが分かる。



（図１）AD：DB=AE：EC=2：5



（図２）DB=EC

Ｓ：さっきの問題では中点だからAD：DB＝１：１に直して，中点を変えるということは，その比率を変えるということで，なんでもいいけど，２：５にした。

このような一般性の理解は，**図２**においても必要である。DB=ECならば具体的な長さは何でもよいという理解がなければ，DB=ECという仮定は設定できない。本活動において，一般性の理解は重要であることが分かる。

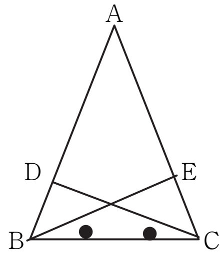
第２時

本時は，合同条件「２辺挟角」を「２角挟辺」に変えたときの仮定を考えることから始めた。「中点」を変える活動よりも難しく，悩んでいる生徒が多かった。それでも，**図３，４**の考えが出てきた。

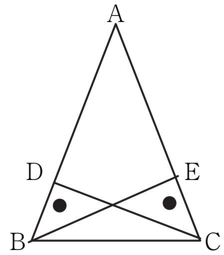
「３辺相等」に変えると結論BE=CDを使う必要があるので変えられないことを確認した後で,「直角三角形の斜辺と１鋭角」に変えることを考えた。徐々に考えに慣れてきた様子

で，多くの生徒が**図５**を考えることができた。

ここで，これまでつくった問題を振り返って，「点D，Eの位置について共通することはないですか？」と発問した。本質に気づかせる問いである。「AB，AC上にある」という意見はすぐに出るが，その後が続かなかった。そこで，Aの角の二等分線，すなわち底辺BCの垂直二等分線を引いて見せた。すると，すぐに「線対称」に気づく生徒が出てきた。

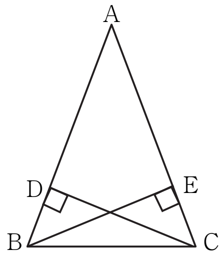


（図３）∠DCB=∠EBC



（図４）∠BDC=∠CEB

問題の本質である，線対称な位置で，同じ操作をして点D，Eを決めていること，このことは二等辺三角形が線対称であることに依存していることを確認した後で，それを利用した発展例として問題４を提示した。本質が明らかになったことによって，これまでにない発想で発展できることを示した。



（図５）∠BDC=∠CEB=90°

最後に，証明が発展の基礎になること，証明を振り返ることによって結論を成り立たせている根拠を明らかにできることをおさえ，本授業を終えた。

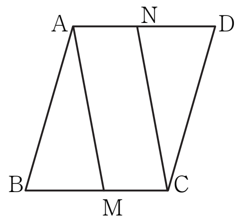
イ「平行四辺形」の問題の授業

① 本授業のねらいと教材

本授業のねらいは，二等辺三角形の探究を通して知った証明に基づく発展的な考えと発展の基礎としての証明のよさの理解をさらに深め，発展的に考える力と態度を養うことである。

教材は右の問題である。これは，生かす数学（杉山吉茂他，2007）や清水宏幸（2010）の実践で扱われた問題である。二等辺三角形と同様，この問題を原題とした問題づくりに取り組む。

問題　平行四辺形ABCDで，辺ADの中点をN，辺BCの中点をMとするとき，四角形AMCNは平行四辺形になることを証明しよう。



（証明２）　平行四辺形ABCDより，
AD//BC … ①，AD=BC … ②
②と仮定より，AN=1/2AD=1/2BC=MC … ③
①②③より，1組の対辺が等しくて平行なので，
四角形AMCNは平行四辺形

（証明３）　△ABMと△CDNで，
仮定より，AB=CD …①，∠B＝∠D …②
BM=１/２BC=１/２AD= DN…③
①②③より，2辺とその間の角がそれぞれ等しいので，△ABM≡△CDN
合同する図形の対応する辺の長さは等しいので，AM=CN …④
仮定より，MC=AN …⑤
④⑤より，2組の対辺がそれぞれ等しいので，
四角形AMCNは平行四辺形になる。

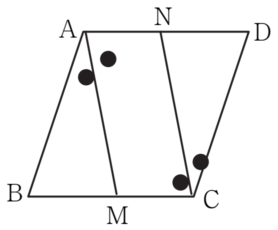
原題の証明は，平行四辺形になる条件５つのどれを使ってもできる。例えば，「１組の対辺が等しくて平行」を使う証明は証明2，「２組の対辺がそれぞれ等しい」を使う証明は証明３である。

これらの証明を基に発展させてみる。まずは証明２である。結論の平行四辺形を成り立たせている根拠は，平行四辺形になる条件「１組の対辺が等しくて平行」，平行四辺形の定義，性質，仮定「中点」である。

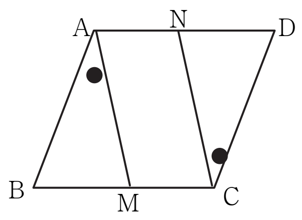
平行四辺形は問題の前提なので変えない。仮定「中点」は，AN=１/２AD＝１/２BC=MCの１/２の根拠として使われている。しかし，1/２である必要はない。例えば「BM：CN=２：1，DN：AM=２：１」や「AN=MC」に変えても，AN=MCは成り立つ。

次に，証明３を見てみる。四角形AMCNが平行四辺形になる根拠は，AM=CN，MC=ANの２組の対辺がそれぞれ等しいである。MC=ANの根拠は，平行四辺形の性質と仮定「中点」である。平行四辺形は変えないし，中点は証明２で変えたので，ここから新しい問題はつくれない。

一方のAM=CNに着目する。その根拠は△ABM≡△CDNである。その合同条件「２辺挟角」を「２角挟辺」にすると，**図６，７**のように発展できる。



（図６）∠A, ∠Cの二等分線



（図７）∠BAM=∠DCN

他にも，「直角三角形の斜辺と１鋭角」に変えて発展させることも考えられる。

そして，二等辺三角形と同様，つくった問題を，変わっていないところはないかという視点で振り返ってみる。すると，点M，Nが必ず点対称な位置にあることが見えてくる。つまり，点対称な平行四辺形の点対称な位置で，同じ操作をして点M，Nを決めているので，できる四角形も点対称，すなわち平行四辺形になるのである。

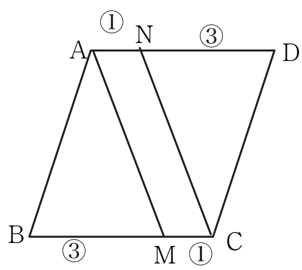
授業では，この本質を使ってさらに問題づくりを行う。点対称を使おうとすると，必然的に対角線やその交点，すなわち対称の中心にまで発想が広がる。また，点M，Nの２点だけでなく，平行四辺形の４つの頂点すべてを，点対称な位置にとることも考えられる。これらは点対称に気づかないと，思いつくことが難しい発展である。これが本質を見出す価値であり，生徒に感得させたいことである。

② 授業の実際

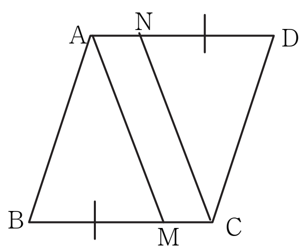
<u>第1，2時</u>

原題の自力解決では，「１組の対辺が等しくて平行」を使った証明２が最も多く，次いで「２組の対辺がそれぞれ等しい」を使った証明３が多かった。他に，「２組の対辺がそれぞれ平行」を使った証明が１人いた。全体では，証明２と証明３を取り上げた。

課題「証明をもとに,結論が平行四辺形AMCNとなる問題をつくろう」を提示後,まず証明２を振り返り，結論「平行四辺形AMCN」の根拠を探った。そして，仮定「中点」を変えて発展させる場面では，**図８，９，10**の考えが出た。**図８，10**の考えの説明は**授業記録３**である。



（図８）AN=１/４AD, CM=１/４BC

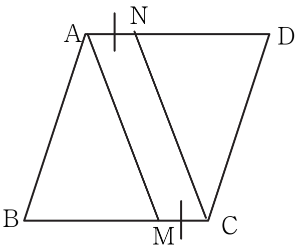


（図９）DN=BM

図８の説明のS２の発言か

ら，生徒は，証明をよんで新しい仮定を見出していることが分かる。**図10**の説明からは，いろいろな仮定が考えられるが，全てAN=MCに統合できることを見抜き，最も簡潔なAN=MCを仮定に設定したことが分かる。

（図８の説明）
S１：ANとMCの長さが同じと言いたいので，ANは１/3，NDを３だとすると，ANは１で１/3，NDはANの３倍で，1/３…（ここで間違いに気づいて，1/３を１/４に修正する）MCはBCの１/４になる。
T：どうして１：３の点をとろうと思ったの？
S２：Aさんの証明の③④で１/２を使っていたので。

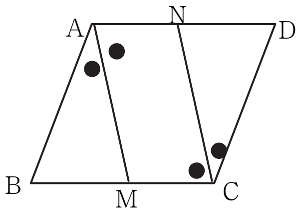


（図10）AN=CM

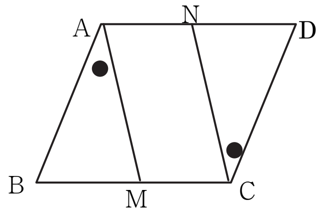
（図10の説明）
S：結果的にAN=MCがいえればいいので，それを最初から仮定にしてしまえばいいんじゃないかなと考えて，仮定にしました。

授業記録３

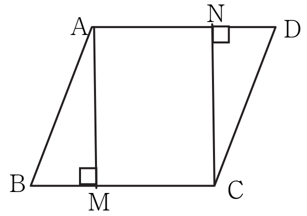
続いて，証明３の吟味に入った。⑤MC=ANの根拠「平行四辺形」「中点」からは新しい発展はないことを確認した上で，「△ABM≡△CDN」に着目し，その合同条件を「２角挟辺」に変えることを考えさせた。二等辺三角形の授業での経験もあり，生徒は活発に活動していた。発表された考えは次の通りである。



（図11）∠A, ∠Cの二等分線



（図12）∠BAM=∠DCN



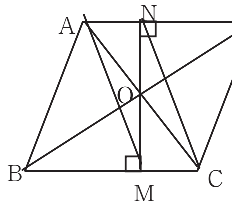
（図13）∠AMB=∠CND=90°

図13が「直角三角形の斜辺と１鋭角」も満たしていることを確認した後で，「この図(**図13**)を見て何とも思わない？」と問うた。すると，すぐに「四角形AMCNが長方形になるから，結論が平行四辺形にならない」と指摘した。すると，すぐに教室はざわついた。「長方形は平行四辺形か」という包摂関係に関する問いの発生である。すぐに「長方形でも平行四辺形の定義に当てはまるから大丈夫」という意見が出た。納得している様子の子どもが多かったが，これについては次時以降に詳しく取り上げることにした。

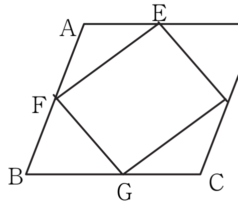
そして，これまでにつくった６つの問題を振り返り，「MとNの位置について共通していること，きまりはありませんか？」と問うた。本質に気づかせる問いである。二等辺三角形のときとは異なり，すぐに「点対称」という意見が出てきた。二等辺三角形の探究の効果であろう。さらに「どうしてMとNの位置が点対称に必ずなるの？」と問うたが，はっきりとした考えが出なかったので，次時に確認することにした。

第３時

まず，点M，Nが点対称の位置に必ずなる理由を確認した。その上で，点対称を使って問題をつくる活動に入った。考え方を学級で共有，確認するために，まずは全員で問題を考えた。そこでは，2つの意見が出てきた。

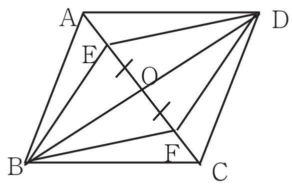


（図14）BC⊥OM, AD⊥ON

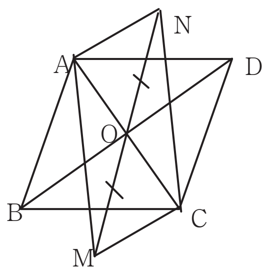


（図15）E, F, G, Hは中点

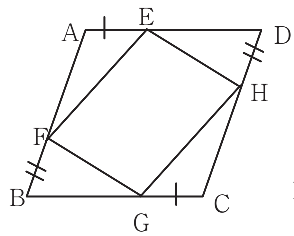
図15を受けて，点対称を使って決める点は２つに限らず，4つでもよいを確認し，問題づくりに入った。自力解決では，次々に問題をつくる生徒もいれば，どうやってつくっていいのか分からない生徒もいた。点対称の位置にとればよいという考えが難しかったようだ。それでも，多くの生徒が自分の考えを１つもつことができた。全体で確認した考えは次の通りである。



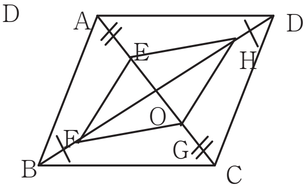
（図16）EO=FO



（図17）OM=ON

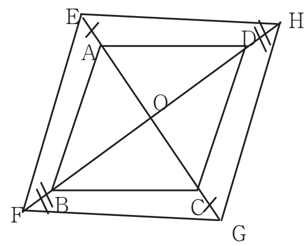


（図18）AE=CG, BF=DH



（図19）AE=CG, BF=DH

本質によって統一的に見られることを実感させるために，教科書や問題集に載っている平行四辺形の中に平行四辺形をつくる証明問題を見せた。そのほとんどを，自分たちがつくった問題で網羅していること，全ての問題が点対称の視点で統一的に見られることを確認した。

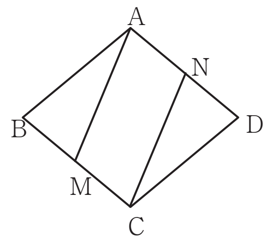


（図20）AE=CG, BF=DH

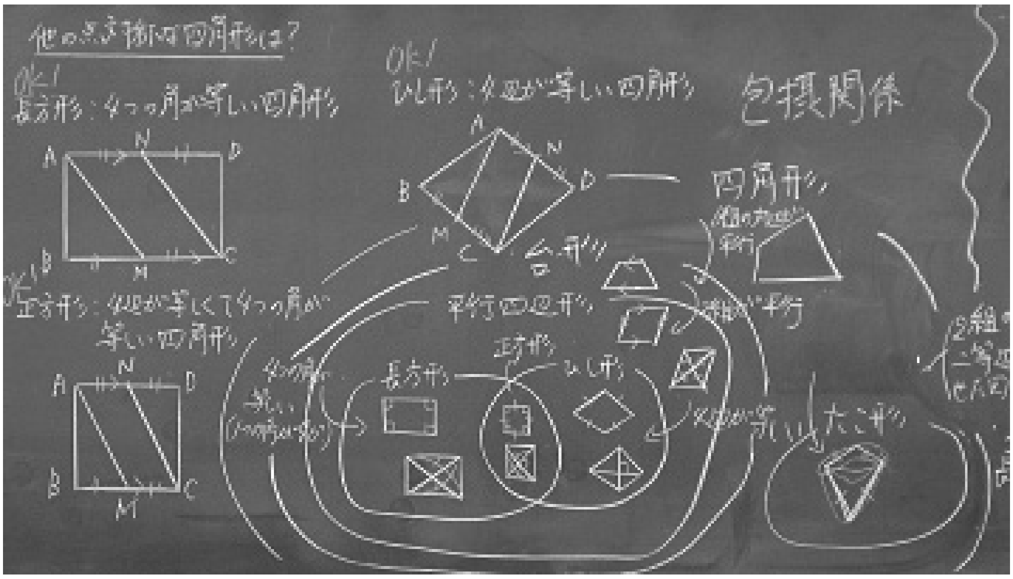
第4，5時

本時は，これまで変えてこなかった平行四辺形という条件に着目し，平行四辺形以外の点対称な四角形でも平行四辺形をつくることができるかを考えさせた。具体的には長方形，ひし形，正方形について，実際に図をかいて調べた。点M，Nに関する仮定は，原題と同じBC，DAの中点とした。

ひし形（**図21**）を確認する際，BC//ADかどうか曖昧な生徒がいた。そこでひし形の定義についての議論になった。この中で，平行四辺形とひし形の包摂関係が問題になり，さらには第２時で疑問として残されていた長方形と平行四辺形の関係，そして正方形，台形，たこ形も含めた包摂関係にまで議論が及んだ。以下は，この議論でつくられた四角形の包摂関係のベン図である。



（図21）



（図22）
完成した
ベン図

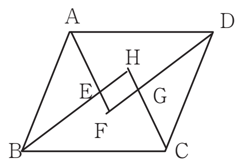
点対称な四角形はすべて平行四辺形であり，平行四辺形をつくれることを分かったところで，「線対称な四角形だったら？」という問いが生徒から出てきた。そこで，線対称な四角形として等脚台形[1]とたこ形，また対称性がない一般の四角形を検討した。M，Nの仮定は原題と同じ中点とした。これらの四角形では平行四辺形ができないことから，平行四辺形をつくるには点対称な四角形，平行四辺形という条件が欠かせないことを確認した。

最後に，発展の基礎になるという証明の役割を伝えて，本授業のまとめとした。

ウ「四角形の４角の二等分線でできる四角形」の問題の授業

① 本授業のねらいと教材

問題　平行四辺形ABCDで，右の図のように，4つの角の二等分線を引き，その交点をE，F，G，Hとする。このとき，四角形EFGHはどんな四角形ですか？



（証明４）　△AEBと△CGDで，
AD // BCから同側内角の和が180°より，
$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$
角の二等分線より，$\angle EAB + \angle EBA = 90°$
$\angle GCD + \angle GDC = 90°$
三角形の内角の和が180°より，
$\angle AEB = 180° - (\angle EAB + \angle EBA)$
$\angle CGD = 180° - (\angle GCD + \angle GDC)$
$\angle AEB = \angle CGD = 90°$
対頂角より，$\angle HEF = \angle FGH = 90°$…①
△AFDと△CHBで，
同様にして $\angle AFD = \angle CHB = 90°$…②
①②より，四角形EFGHで４つの角が全て90°より長方形である。

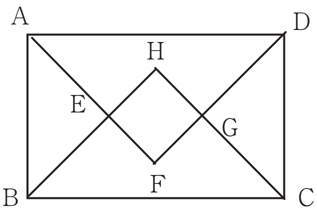
二等辺三角形と平行四辺形の授業において，線対称や点対称が本質であることや本質を見抜くよさを，生徒が十分に実感していないと感じた。その原因として，生徒にとって本質に目を向ける必然性が弱く，教師側の誘導が強い授業展開になったこと，また生徒に分かりやすい形で本質が顕在化しなかったことなどが考えられた。そこで，本授業は，証明に基づいて発展的に考察する中で本質が顕在化していく様相を生徒にみせることを通して，本質を明らかにするよさを感得させることをねらいとした。もちろん，それと同時に，これまでに養ってきた発展的に考える力と態度を深めることも目標とした。

扱う教材は，「四角形の４角の二等分線でできる四角形」の問題である。原題において四角形EFGHは長方形になる。その証

明は証明４である。

課題は「平行四辺形ABCDをいろいろな四角形に変えたとき，結論『長方形』を保てるかどうかを調べてみよう」である。この課題に対して，次のような活動を展開する。

まず平行四辺形を長方形に変えてみる（**図23**）。四角形EFGHは正方形になりそうである。その証明を試みると証明５のようになる。



（**図23**）

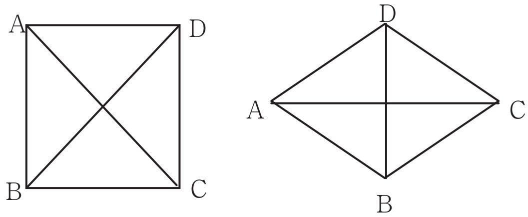
証明５から，結論は正方形になることが分かったので，包摂関係より結論「長方形」は保存されていることとも分かる。

また，四角形ABCDとEFGHの関係を見ると，四角形ABCDは平行四辺形から長方形に特殊化されており，同様に四角形EFGHも長方形から正方形に特殊化されている。これが分かると，さらに四角形ABCDを特殊化し，正方形にしてみる。**図24**のようになり，四角形EFGH自体ができない。ひし形も同様である。従って，四角形ABCDを正方形，ひし形にすると，結論「長方形」は保たれないことが分かる。

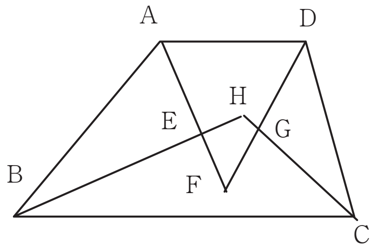
逆に，一般化して四角形ABCDを台形にしてみる（**図25**）。すると，四角形EFGHは明らかに長方形にはならない。

従って，結論が長方形となるのは，四角形ABCDが平行四辺形と長方形の場合ということになる。だが，これを結論として探究を止めては発展に乏しい。もう一歩踏み込んで，**図25**の四角形EFGHがこれまでの結論（原題と**図23**）と統一的にみることができないか考えてみる。しかし，図を見て

（証明５）　先の四角形EFGHが長方形の証明と同様にして，四角形EFGHの４つの角が90°… ①
△AFDと△CHBで，
長方形ABCDより，∠A=∠B＝∠C＝∠D＝90°
角の二等分線より，
∠FAD=∠FDA=∠HBC=∠HCB …②
対辺が等しいので，AD=BC …③
②③より１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので，△AFD≡△CHB
合同な図形で対応する辺の長さは等しく，②より△AFDと△CHBは二等辺三角形なので，
AF=CH=DF＝BH …④
△AEBと△CGDで，
同様にして，AE=BE=CG=DG …⑤
EF=AF－AE, FG=DF－DG
GH=CH－CG, HE=BH－BE
④⑤より，EF=FG=GH=HE …⑥
①⑥より，四角形EFGHは４つの辺が全て等しく，４つの角も全て等しいので，正方形になる。



（**図24**）



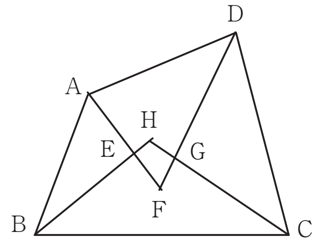
（**図25**）

（証明６）　△AEBと△CGDで，
AD // BCから同側内角の和が180°より，
∠A＋∠B＝∠C＋∠D＝180°
角の二等分線より，∠EAB+∠EBA=90°
∠GCD+∠GDC=90°
三角形の内角の和が180°より，
∠AEB=180°－（∠EAB＋∠EBA）
∠CGD=180°－（∠GCD＋∠GDC）
∠AEB=∠CGD=90°
対頂角より，∠HEF=∠FGH=90°
四角形EFGHは，∠HEF=∠FGH=90°の四角形となる。

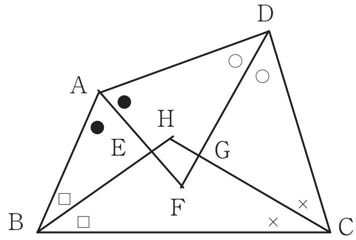
いるだけではなかなか見えてこないので，これまでの２つの証明に戻って考えてみる。四角形EFGHの４つの角が90°になる証明は同じであった。その考え方で**図25**をみると，∠HEF=∠HGF=90°になっていることがみえてくる。その証明は証明６である。

この証明をもって，四角形EFGHに関するより本質的な結論「∠HEF=∠HGF =90°の四角形」を得ることができた。もちろん，この結論は，これまでの結論「長方形」「正方形」も満たしている。

さらに，一般化して，四角形ABCDを一般の四角形にしてみる（**図26**）。



（図26）



（図27）

四角形EFGHは，長方形はもちろん，先ほど修正した∠HEF=∠HGF=90°の四角形でもない。このことは，∠HEF=∠HGF=90°の根拠が，AD//BCによる同側内角の和180°にあったことからも明らかである。では，先と同様に，この四角形もこれまでの結論と統一的にみることができないか，より本質的な結論がないかを探ってみる。先ほど証明に戻ることで本質が見えてきたので，ここでも証明に戻ってみる。

四角形ABCDの４つの角の二等分線を使っていたので，それぞれ記号をつける（**図27**）。そして，これまでの証明では，△AEBと△CGD，△AFDと△CHBを組で考えて，∠HEFと∠HGF，∠EHGと∠EFGの特徴を見出していた。同じように考えると，四角形EFGHの２組の対角の和がそれぞれ180°になっていることに気づく。その証明は証明７である。

これにより，結論は再修正され，より本質的な「２組の対角の和がそれぞれ180°の四角形」[2)]が得られる。もちろん，これはこれまでの結論にも通じている。

（証明７）　△ABEで三角形の内角の和と対頂角より，
∠AEB=180°－（∠EAB+∠EBA）=∠HEF
△CDGで同様にして，
∠CGD=180°－（∠GCD+∠GDC）=∠HGF
また，∠EAB+∠EBA+∠GCD+∠GDC
　　=360°×１/２=180°から，
∠HEF+∠HGF={180°－（∠EAB+∠EBA）}
　　　　　　+{180°－（∠GCD+∠GDC）}
=360°－（∠EAB+∠EBA+∠GCD+∠GDC）
=360°－180°=180° … ①
四角形の内角の和より，
∠EHG+∠EFG=360°－180°=180°
よって，四角形EFGHは２組の対角の和がそれぞれ180°の四角形

S１：長方形になるから，4つの角が90°になって，二等分線だから45°になって，△HBCで考えると，∠HBCと∠HCBが45°。三角形の内角の和から∠BHCが90°になる。∠BHCは四角形EFGHの１つの角だから，同じように反対の三角形も考えて全部90°になる。
T１：でも，四角形ABCDが平行四辺形の時も４つの角が90°になったよ。
S２：（四角形EFGHの４辺の）長さが等しくなる。
T２：長さが等しくなったんだよね。なんで，（四角形ABCDの）４つの角が90°になったら長さが等しくなるの？
S３：４つの角が90°で二等分線だから∠ABEとか全部45°になって，二等辺三角形が４つできた。
T３：二等辺三角形ができたことが，長さが等しくなることとどう関わっているの?もう少し詳しく説明できない?
S４：二等辺三角形の△AFD≡△CHB，△AEB≡△CGDで，AFとHCが等しくて，AEとGCも等しくなるから，等しいものから等しいものをひいているので，EFとHGは等しくなる。

授業記録４

では，結論「２組の対角の和がそれぞれ180°の四角形」の根拠は何だろうか。これまでの証明を振り返ると，四角形の内角の和360°，三角形の内角の和180°，角の二等分線の３つを使っていることが分かる。これらが，本問題において欠くことができない本質的な根拠ということになる。

このように，これまで本質と考えていた結論が成り立たない事象に出会うことによって，より本質的な結論を探る必然性が生まれ，本質が顕在化してくる。本質がみえると，その観点からこれまでの結論を統一的にみることができ，問題の新しい一面が見えてくる。これが本質を見出すおもしろさであろう。これを生徒に味わわせたい。そしてこのような経験を通して，本質を理解させ，本質を捉えることのよさを感得させたい。

② 授業の実際

<u>第1，2時</u>

原題の証明を確認後，四角形ABCDを長方形に変えた。図をかき，正方形になりそうだという見通しをもったところで，証明を全体で解決した。証明を振り返り，4つの角が90°になることを示す流れは，先の長方形の証明と同じであることを確認した上で，「四角形ABCDが長方形になると，どうして四角形EFGHが正方形になるか」を問うた。生徒の説明は**授業記録４**である。証明から，正方形になる根拠をよみとり，それと四角形ABCDの４つの角が90°になることを関連づけて考えていることが分かる。

四角形ABCDを特殊化すると四角形EFGHも特殊化されることに気付かせ，「次，四角形ABCDをどんな四角形にする？」と問うた。すると，「正方形」や「（包摂関係のベン図で）内側から外側にしたら（一般化）」という意見が出たので，これらを次時の課題とすることにした。

<u>第３時</u>

前時の意見を受け，本時は，まず四角形ABCDが台形の場合を考えさせた。四角形EFGHがどうなるかを予想させると，「平行四辺形」という考えが出た。四角形ABCDを一般化するので，同じように四角形EFGHも長方形から一般化されるだろうと考えたのである。また，「単なる四角形」という考えも出た。図をかいて確認すると，特徴のない「単なる四角形」と，生徒は判断した。

これまでの結論「長方形」や特殊一般の関係が崩れたことを確認した上で，「『長方形』や『特殊一般の関係』とは別に，これまでの結論と台形にしたときの結論で，変わっていない特徴はないか」と発問した。 なかなか見つからなかったので，四角形ABCDが平行四辺形や長方形の場合の証明に戻って，辺や角の特徴が何を根拠にして決まったのか，どういう考え方で証明されたのかを確認し，その観点で考えるように示唆した。自力解決後の全体確認の場面では，生徒は次のように説明した。

Ｔ１：結論は何になったの？
Ｓ１：∠HEFと∠HGFが90°の四角形です。
Ｓ：ほんとだ。 Ｓ：おお～。
Ｔ２：そうなる理由を説明してください。
Ｓ２：AD//BCなので，∠ADCと∠DCBの和は同側内角より180°で，角の二等分線なので∠GDCと∠GCDの和が90°ということが分かって，三角形の内角の和より∠CGD=90°が分かります。対頂角だから∠HGF=90°。△ABEも同様にして∠HEF=90°になります。

授業記録５

この説明を受け，結論をより本質的な「∠HEF=∠HGF=90°の四角形」に修正した。

続いて，四角形ABCDを一般の四角形にしても新しい結論「∠HEF=∠HGF=90°の四角形」ができるかを問うた。すると「成り立たない」という反応がすぐに返ってきた。生徒は，その理由を次のように述べた。∠HEF=∠HGF=90°の根拠を捉え，それに基づいて説明していることが分かる。

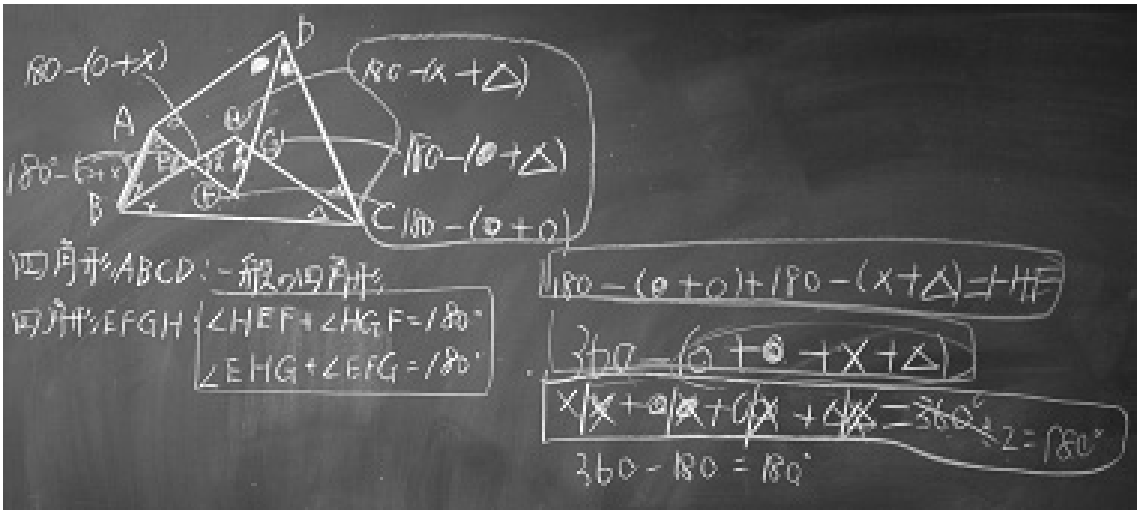
> S：AD//BCじゃないから同側内角の和が180°にならないから，二等分線を使っても，（∠EABと∠EBA，∠GDCと∠GCDの和が）90°にならない。

授業記録 6

図をかいて，∠HEF=∠HGF=90°にならないことを確認した後，台形の場合と同様，より本質的な特徴がないかを問い，次時の課題とした。

<u>第４時</u>

前時の課題「一般の四角形の場合を含めて四角形EFGHについてより本質的な特徴はないか」を考えさせた。そして，本質的な結論「２つの対角の和が180°の四角形」とその理由を確認した。発表された説明は，証明７と同じ流れであった。



（図28） 2 組の対角の和が180° になる説明の板書

より本質的な結論「２組の対角の和がそれぞれ180°の四角形」を得たところで，この根拠を問うた。すると，「二等分線」と「四角形の内角の和が360° 」が出てきた。これらの根拠は，これまでの証明においても根拠として効いているはずである。従って，これまでの証明のどこに出てくるかを問うた。以下は，台形の（証明３）において「四角形の内角の和が360° 」がどこに出てくるかを

> Ｔ１：台形の証明ではどこに出てくる？
> Ｓ１：同側内角の和？
> Ｓ：（証明には明確に出ていないので困っている）
> Ｓ２：どこかに出てくるはずですよね。
> Ｔ：Ｓ２さんが言うように出てくるはずだよね。
> Ｓ３：∠A＋∠B=180°が（四角形の内角の和と）結びついているんじゃないですか。
> Ｔ：どう結びついている？
> Ｓ４：∠A＋∠B=180°ということは，残りが180° なわけじゃないですか。だから，・・・。
> Ｔ：∠A＋∠B=180°がつながってそうだよね。
> Ｓ５：本当は，∠A＋∠B=180°のとなりに∠C＋∠D=180°がなければいけない。

議論している授業記録である。

S２から，「四角形の内角の和が360° 」が証明に出てくることを直観しているが，証明上には明確に出てこないので，証明をよみ，解釈していることが分かる。証明から根拠を明らかにしようとする生徒の主体的な姿であろう。

T：$\angle C+\angle D=180°$がなければいけないというけど， この証明の中のどこに隠れちゃったの？ S６：△CGDの「同様に」の中に隠れている。

授業記録７

「三角形の内角の和」も根拠であることを確認した後，四角形ABCDが正方形，ひし形，たこ形の場合は，四角形EFGHができないことを確認し，「四角形EFGHができない場合はどういう場合か」という更なる問いを投げかけ，探究を終えた。

5. 考察

（1） 発展の基礎としての証明のよさの感得について

本実践の最大の目的は，数学の創造発展の基礎としての証明のよさを，生徒に感得させることであった。この目的は達成されたのだろうか。「四角形の４角の二等分線でできる四角形」の授業後に，証明に基づく発展の３つの授業について書いた生徒の学習感想をみてみる。

本実践を通して，証明のよさを感得したことを示唆する学習感想は多く見られた。例えば，MSとKIは本質を明らかにする方法としての証明のよさを言及している。また，KKは，「証明は何のためか分からなかった」という疑問に対して，「問題の本質を見極められること」を学んだとして証明の意義について理解を深めていることが分かる。

・証明はただその問題が証明できるのではなく，条件を変えるとその図形の本質まで見えてくる。＜略＞本質を見抜くためには証明が必要で，証明をするには本質が必要なのかなと思った。図形において証明は本質を見ることや，考え学ぶことをするのにとってもいい方法だと思った。（MS） ・証明というのは，結局のところ，問題の本質を見つけるための一つの手段であることが分かった。（KI） ・それまで，証明は何のためか分からなかったが，授業を重ねるにつれて，証明からは問題の本質を見極められることを学び，問題を解く上で大切な過程なのだなと思った。（KK）

一方，TNは，証明を基に発展させる考えのよさを言及している。

問題をつくるときに証明をもとにするというのは，新鮮な発想だった。０から広げるのは難しいが，基になるものがあるとやりやすくなることが分かった。（TN）

また，証明のよさではないが，証明どうしのつながりに言及している記述もあった。

・どの証明もいろんな所でつながっているなと思った。１つの証明からそれが根拠になってまた証明につながっていく感じがした。（RI） ・証明にもピラミッドのような関係があるのだと感じた。１つできた証明，そしてもう１つできた証明，この２つをくって証明は成立する。弱肉強食のような世界が成り立っている。（YS）

YSは，「弱肉強食のような世界」という言葉で証明どうしのつながりを表現している。真意は定かではないが，証明どうしのつながりをその命題どうしのつながりと捉えれば，

「弱肉強食」という表現は，いくつかの命題をより一般的な命題で統合すること，つまり体系を想定しているように考えられる。また，RIの「１つの証明からそれが根拠になってまた証明につながっていく」という記述は，体系につながるものであろう。このような意識をもった生徒がいるという事実は，本実践が体系の考えの育成に寄与する可能性を示唆しているといえる。

以上のことから，総じて，本実践は，根拠を明らかにし，発展の基礎になるという証明のよさの感得に有効であったと考える。

（２）　発展的な考える力や態度の育成について

本実践では，数学の創造発展の基礎としての証明のよさの感得とともに，証明に基づいて発展的に考える力や態度の育成も意図していた。これに関する本実践の有効性を探ってみる。

証明に基づいて，結論が変わらないように仮定を変えて発展させるという考え方は，生徒にとって初めての経験だった。故に，証明に基づく発展は，多くの子どもにとって難しかったようだ。しかし，「二等辺三角形」「平行四辺形」「四角形の角の二等分線でできる四角形」と授業を重ねるにつれて，徐々にそうした考えに慣れ，できるようになっていった。実際，平行四辺形の授業後に書いた学習感想には，次のような記述が見られた。

・二等辺三角形のときを思い出してつくれば結構できました。条件を変えていくことでその図形の本質を知ることができたので良かったです。（MS）
・前回の70回目の授業で学んだことが生かせて良かったです。（KK）

また，「角の二等分線」の授業では，例えば四角形ABCDが長方形になると四角形EFGHが正方形になる理由を考える場面（**授業記録４**）や，四角形ABCDが台形のときの結論「∠HEF=∠HGF=90°の四角形」が一般の四角形では成り立たないことを説明する場面（**授業記録６**），さらには個々の証明について表面的な違いはあるが，本質的には同じであることを確信し，証明の表面上には出てこない本質的な根拠を見出そうと証明を解釈している場面（**授業記録７**）など，生徒は主体的に証明から根拠をよみ，根拠に基づいて考える姿が見られた。証明から根拠を明らかにしようとする態度が育ってきていることを示唆するものであろう。これと関連して，徐々に明らかになっていく本質の探究を，生徒が楽しんでいたことも，主体的に証明から根拠を見抜こうとする態度を後押ししていたようである。実際，本質の探究の楽しさを言及した学習感想がいくつか見られた。

・今までは証明はその問題で終わりと思っていたけど，その証明にはもっと深いものがあり，つながりがありました。新しい発見は見つけるととても楽しい。（MS）
・証明問題を解きながら思ったことは，全ての証明にきまりが使われていて，その中には例外なんて１つもないんだということです。そのきまりを証明問題を通して見つけていくのが楽しかったです。（MI）

これらのことは，証明に基づいて発展的に考える経験の蓄積が，発展的に考える力や態度の育成において有効であることを示していよう。特に，本実践では，連続して授業を設定したが，この連続性が，考え方の理解，活用，習熟というサイクルを，短期間で繰り返

し実現させ，発展的に考える力や態度の育成をより効果的にしたと思われる。さらに，その中で根拠や本質を求めるよさや楽しさを味わわせることが，証明に基づいて発展的に考える態度の育成を促しうることも確認できた。証明に基づいて発展的に考える場の継続的な設定をすること，および根拠や本質を求めるよさやそうした探究の楽しさを味わわせることが，発展的に考える力や態度の育成を意図した指導への示唆といえる。

（3）　本質を捉えることのよさの感得を意図した授業について

上述のように，「角の二等分線」の授業では，本質を明らかにする楽しさやよさの感得を促すことができた。このことは，主体的に証明から本質を明らかにしようとする生徒の姿や，以下のような本質のよさについて言及している学習感想が示していよう。

- 証明は１回１回条件，仮定にあわせてつくるものだと思っていたが，本質を見抜くことで同じような問題を解きやすくなった。（TN）
- 難しかったですが，数学の問題は基礎（本質）があって，ようやく難題になるわけで，基礎が見抜ければ「そんなことか！」と気づけるのだということに気づきました。（KK）
- 問題の条件を変えると本質が見えてきて，それを証明したり考えたりすることが楽しかった。（YH）

このように本質の理解を促した要因は，本質と考えていた結論が崩れ，次々により本質的な結論が顕在化してくる教材のおもしろさにあったといえる。上の学習感想でいえば，YHが本質が見えてくる楽しさを言及しているが，本質が顕在化し，顕在化した本質の眼でこれまでの結論を統合していく授業展開が，本質によって見通しがよくなったり，考えやすくなったりといったよさの感得につながったと思われる。

この点からすると，「二等辺三角形」「平行四辺形」の探究では多くの問題をつくったが，仮定の変更による図は，線対称や点対称を見出してからは様々に変化したものの，見出す以前は大きな変化がなかった。これが本質を実感できなかった一因であろう。一見，関係のないように見えるものが，同じとして見ることができるところに，本質のおもしろさ，よさがある。本質の理解には，これを経験できるような教材の提示が重要である。

6. おわりに

本研究の目的は，発展の基礎としての証明のよさの感得をめざし，「二等辺三角形」「平行四辺形」「四角形の角の二等分線でできる四角形」を教材とした３つの一連の証明に基づく発展に関する授業を実施し，その有効性を探ることであった。そのために，授業記録や生徒のノート記述，学習感想を分析した。

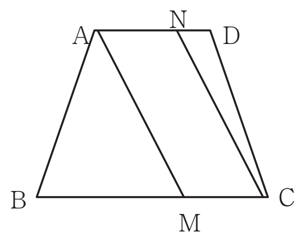
その結果，次のことが明らかになった。１つ目は，本実践を通して，根拠を明らかにする，発展の基礎になるという証明のよさを感得する生徒の姿が見られたことである。２つ目は，証明に基づく発展の授業を，連続的に３つ設定したことが，証明に基づいて発展的に考える力や態度の育成に有効であることを確認できたことである。３つ目は，本質の理解を促すには，本質と考えていた結論が崩れ，より本質的な結論が顕在化するような教材を扱う重要性が示唆されたことである。

今後の課題は２つある。第一に，本実践を精緻化することである。第二に，証明に基づいて発展的に考える力や態度は，本実践のように一時期に集中的に行うだけでは十分に養

うことはできない。中学校全体を通して系統的に指導する必要がある。例えば，1年生の作図や2，3年生での文字式の証明，さらには３年生での相似や円，三平方の定理といった図形の内容でも，証明説明に基づく発展を意図した授業はできると考える。また，証明に基づいて発展的に考察できることを，証明指導の一つの目標にした場合，2年生の証明指導がどのように行われるべきか再考する必要もある。中学校数学全体を見て，発展的に考える力や態度を養う指導の系統性を考える必要があるとともに，それによって証明に基づいて発展的に考える力や態度がどのように養われていくかを考察することが課題である。

註

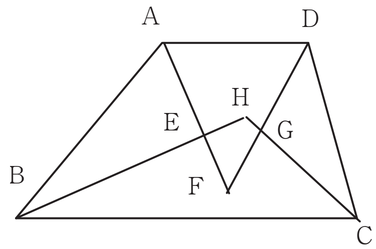
１）他学級において，等脚台形は，点M，Nの仮定をAN=CMにすれば平行四辺形をつくることができるという指摘が生徒から出た。これは，点対称ではなく，平行移動を使ってつくられた平行四辺形，すなわち線分AMを平行移動して線分CNに移る軌跡によってできる平行四辺形とみることができる（和田義信著作・講演集刊行会，2007，p.82）。



２）「２組の対角の和がそれぞれ180°の四角形」は，つまり「円に内接する四角形」である。ここでは，円周角の定理は未習なので，「円に内接する四角形」としての特徴付けはしなかった。

３）ここで考察対象となった証明は次の通りである。

（証明）△ABEで，AD//BCから同側内角の和より，
∠A＋∠B＝180°
角の二等分線より，∠EAB+∠EBA=90°
三角形の内角の和より，∠AEB=180°－（∠EAB+∠EBA）
=180°－90°=90°
対頂角より，∠HEF=∠AEB=90°・・・①
△CGDで同様にして，∠FGH=90°・・・②
①②より，四角形EFGHは∠HEF=∠FGH=90°の四角形



引用・参考文献

・「生かす算数・数学シリーズ」編集委員会（代表 杉山吉茂）（2007）『生かす数学中学２年』日本教材文化研究財団・東京書籍.

・小野雄祐（2008）「証明を振り返り活用する活動を通して，発展的に考察させる指導」日本数学教育学会誌，第90巻第11号，pp.2-10.

・清水宏幸（2010）「証明に基づいた発展的な指導（１）」『数学教育』No.637，明治図書，pp.102-105.

・清水宏幸（2010）「証明に基づいた発展的な指導（２）」『数学教育』No.638，明治図書，pp.102-105.

・杉山吉茂（1975）「証明の意味－demonstrationとproof－」日本数学教育学会誌，第57巻第５号，pp.23-27.
・杉山吉茂（1986）『公理的方法に基づく算数・数学の学習指導』東洋館出版社.
・和田義信 著作・講演集刊行会（2007）『和田義信著作・講演集６ 講演集４ 数学的な見方・考え方と教材研究（軽装版）』

異なるものが同じに見える見方を
—式による統合的な見方を育てる—

弘前大学教育学部教授　中野博之

1. はじめに

算数・数学を学校教育の場で考えるとき，「読み，書き，そろばん」の範囲を超えた目標を考える必要がある。小倉は「人は伝習的知識として数学を学ぶのではない。『人』として生きんがための数学を学ぶのである」として，算数・数学教育の意義を「科学的精神の開発」にあるとした（小倉，1973）。その上で数学教育の核心を「函数観念の養成にある」とした。そして，函数観念は科学的因果関係を語るものであるとして，こうした観念の養成こそ数学教育が目指すべきであることを主張した。

2000年頃から，大学生が分数計算ができないという実態が明らかにされ，日本の子どもの学力低下が社会問題化した（西村他，1999）。そのため，世論に押される形で2010年版の学習指導要領では算数・数学の授業時数が増加した。また，各学校では日常のドリル練習等に取り組み，全国学力調査の結果では，知識・技能を問うA調査については，小学校においてはその成果があらわれつつある。

その一方で，入試の成果を算数･数学の学力ととらえ，まさに，「読み，書き，そろばん」の範囲の中で子どもの能力の向上に躍起になり，小倉の述べた「人」として生きんがための算数・数学教育が忘れられてしまう状況になりつつある。

本来は，数学そのものの能力を伸ばすための学習と，数学を通して身につける能力を伸ばすための学習は，どちらも大切なものであり，子どもの実態に応じてバランスよく配置されるべきである。しかし，どちらかというと，上述のように数学そのものの能力を伸ばす学習に重点がおかれ，数学を通して人間を育てる学習は後回しにされる傾向がつよい。

そこで，本稿では，数学を通して身につけさせたい能力を育てるために考えるべき視点を提案したいと考えた。

2. 式から背景を考える（統合的な見方の育成）

中島は科学的な考え方の基盤として統合的な見方を挙げている。少々長くなるが以下に引用する。

「『統合』というのは，実は数学に特有な考えではなく，広く科学的な見方・考え方の基盤にある重要な考えでもある。すなわち，科学は，できるだけ少数の基本的であり根源的な法則に基づいて，対象としている領域の事象をとらえ，説明できるようにすることをねらいとしている。このことは，結局において，はじめは別個の事象についての法則として考えられたものを，新しくより根源的，包括的な法則を発見してそれによって統一したり，または，はじめの法則では説明できない事象が起こったときに，その事象にも適用できるように，もとの法則を拡張的に見直したりすることを求めていることになる。これが，科学の重要な仕事であり，科学の発展の方向を示すことになるわけである。」（中島，1981，p.130）

そして，中島は算数・数学で育てるべき「数学的な考え方」は，広くは科学的な考え方の一環であり，算数・数学教育の目標の中に科学的な精神，または，科学的な生活態度の育成を取り上げることは妥当なことであるとした。その上で統合的な見方の育成を主張した。こうした主張は小倉の主張する「生きんがための数学」と軌を一にするものと考えられる。

また，杉山も算数・数学教育を人間形成を助けるものとしてとらえ，創造的な算数・数学学習を可能にするものとして「公理的方法に基づく算数･数学の学習指導」を主張した（杉山，1986）。ここでは，算数・数学が多くの原理・法則を基に作られていることから，その原理・法則を明らかにする学習（「根拠を探る」）と，その原理・法則を積極的に活用する学習（「仮設をおいて考える」）を提唱している。このようにすることで，知識が原理や法則で統合され，忘れにくく，かつ，今後の学習を創造的なものとする源となるとしている（杉山，1997）。

これまで述べてきたように，統合的な見方は科学的な精神の重要なものであり，算数・数学教育でもその育成を図っていくべきものといえる。それは，事象の根本はなんであるのかを探ることであり，小倉の主張した因果関係を探る函数観念にも関連するものと考えられる。

その一方で，算数・数学教育がその独自性から，どのような統合的な見方を重視する必要があるのかも考える必要があろう。数学の特徴は形式性にある。具体的な事象は抽象して式に表すことで，具体的な事象の様々な要素を考えることなく形式的に処理される。つまり，式は数学の大きな特徴といえる。したがって，算数・数学教育では式による統合的な見方が重視されるべき１つの学習活動であると考える。

式による統合的な見方を子どもの言葉で置き換えると「式から同じことを探す」ということになるだろう。そのためには「式に表す」活動だけではなく，「式をよむ」活動も重視する必要がある。小学校では「式に表す」ことと ともに「式をよむ」ことを取り入れている。それは，具体的な場面を式という抽象的に表すとともに，式という抽象的な表象から具体的な場面を想像することを重視しているからである。

中学校，高校では具体的な事象といっても小学生が扱う事象からはかなり抽象度が上がっている。しかし，式をよみ，その本質的な構造がこれまでに学習した内容のどれと同じであるのかを考える活動は重視されるべきである。ともすると，学習の重点が受験の対策におかれがちとなり，問題の解法を別々に記憶することが重要な学習方法であるとされる現状ではなおさらのことであろう。

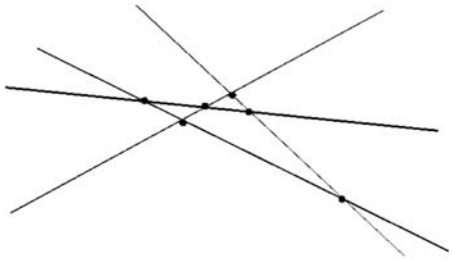
同じ演算記号を用いた式に表せるということは，本質的な構造が同じものであることを意味する。したがって，問題に直面したときにその本質的な構造を見抜き，式に表し解決策を導き出すということは，単に数学の問題を解く力を育てるだけではなく，生活を営む上でも大切な姿勢といえる。こうした姿勢を育てていく意味でも式に表す活動だけではなく，式をよみ，その本質的な構造を考える活動を中学校，高校でも取り入れていくべきであると考える。

そこで，式による統合的な見方を提案したいと考え，2つの教材について，教材研究として提示することとする。

3. 問題

（1）直線の交点を求める問題

A市では交差点１つにつき，1つのAEDを置くことにします。以下のような道路がA市には100本あるとき，AEDは何個必要でしょうか。

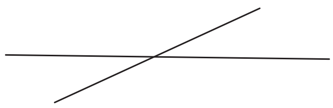


※３本の道路が交わっている交差点，または，平行な関係にある道路や
枝分かれしている道路はA市の中にはありません。

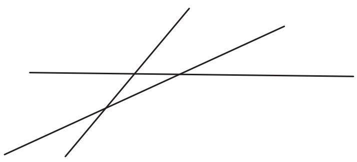
この問題を解くために道路を直線，交差点を交点とし，直線の本数とその交点の数を求めるという問題に置き換えることができる。こうした，直線とその交点の関係を求める問題は中学校，高校のどちらの入試問題でも出されることが多い。この問題ではいくつかの解法が考えられる。

①解法（その１）

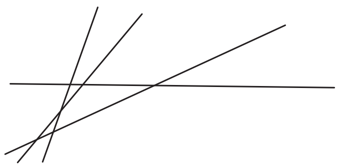
いきなり，直線を100本描くことは無理である。そこで，直線を１本ずつ増やしていき，交点の増え方の規則性を調べてみる。



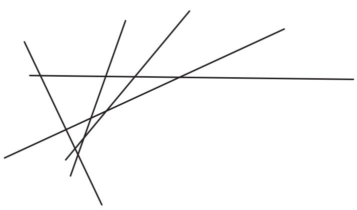
直線２本で交点１つ



直線３本で交点３つ



直線４本で交点６つ



直線５本で交点10こ

これだけでは，きまりは見えてこない。そこで，これを以下のような表にしてみる。

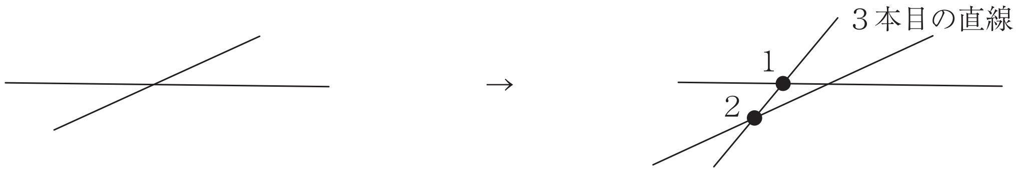
直線	1	2	3	4	5	6	7	…
交点	0	1	3	6	10	15		…

表を見ると交点の数が０から１で＋1，1から３で＋2，3から６で＋３と，差が１つずつ増えていることが分かる。このきまりにしたがえば，直線が100本のときの交点の数は以下のようになることが予想される。

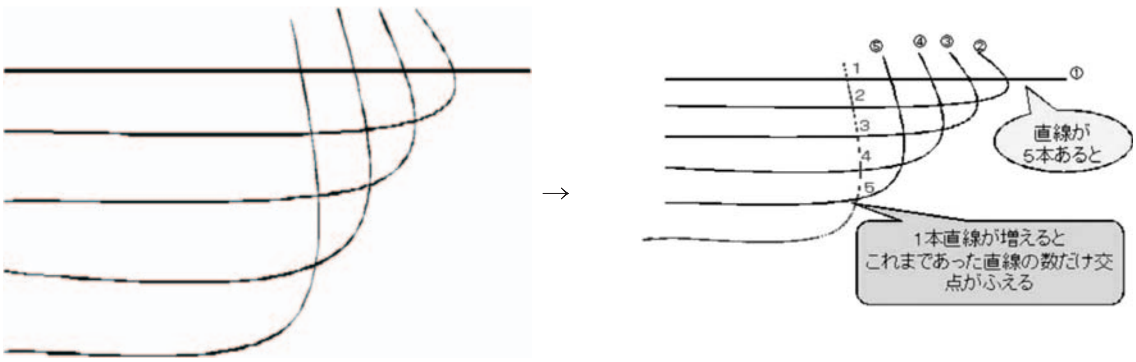
直線	1	2	3	4	5	6		99	100
交点	0	1	3	6	10	15			

＋１　＋２　＋３　＋４　＋５　…　＋98　＋99

したがって，100本のときの交点の数は１＋２＋３＋４＋…＋99を計算すればよいことになる。答えが求められればよいとするのなら，これで終わりとしてもよい。入試対策の学習であればそれでよいだろう。しかし，本当にこの式でよいのかを確かめるためには，なぜ，＋1，＋2，＋3，…と増えていくのか理由を問う必要がある。そこで，もう一度，直線を引きながら交点がどのように増えていくのかを観察してみることとする。最初の直線を増やし交点を数えた活動とはちがい，ここでは，交点の増え方に注意をするという目的をもって直線を引くことになる。



２本から３本に直線を増やすとき，3本目の直線はその前に存在していた２本の直線と交点をもつことになる。つまり，前に存在していた直線の本数だけ交点が増えていくのである。したがって，表では前の直線の本数分だけ交点が増えるということになるのである。これは次のような図で説明することができる。（この教材の場合，下記の図のような，直線を曲線に置き換えるアイディアのよさを扱うところで終わってしまうことが多い）



さて，交点の数を求める式は分かった。しかし，それをそのまま計算することはいかにも効率が悪い。そこで，工夫をして計算しようということになる。

まず，1＋２＋３＋…＋97＋98＋99という式をよく観察をする。このような等差数列の和を求める場合，1番目と１番最後，2番目と後ろから２番目，それぞれをたした値が同じとなることに気づくと計算が楽になる。そして，これが全てに通じていることも分かる。

$$1+2+3+\cdots+97+98+99$$

1番目…1	1番最後…99	$1+99=100$
2番目…2	後ろから2番目…98	$2+98=100$

そこで，次のように考えることができる。

$$\begin{array}{r} 1+2+3+\cdots+97+98+99 \\ +\quad 99+98+97+\cdots+3+2+1 \\ \hline 100+100+100+\cdots+100+100 \end{array}$$

したがって，交点の数は$100\times99\div2$という式で求めることができる。この式によって相当労力が軽減できる。

最後に，この解法について，一般化を図る。つまり，直線が何本のときでも交点の数値が求まるようにするわけである。これは，等差数列の和を求める公式をつくり出すときに活用される考え方であることはいうまでもない。

一般化のために，式を見ると，直線が100本であるとき，$100\times99\div2$となっている。つまり，直線がn本のときは

$$n(n-1)\div2\cdots\text{(a)}$$

という式で交点の数が求まる。

②解法（その2）

100本直線があるとき，1点で3本の直線が交わることや，互いに平行な直線がないことから1本の直線上には，その他の99本の直線との交点があると考えられる。したがって交点の数は100×99となるが，それぞれの直線で交点がお互い重なり合っているので

$$100\times99\div2$$

という式で直線が100本あるときの交点の数値が求められる。

そこで，この式についても一般化することを考える。つまり，直線がn本あるとき，それぞれの直線1本に自分を抜かした（$n-1$）ずつ交点があると考えられる。そして，100本のときと同じ様に重なりの分をとるから

$$n\times(n-1)\div2\cdots\text{(b)}$$

という式を得ることができる。

さて，この式を前述の（a）の式と比べてみると，全く同じ式であることが分かる。つまり，異なる考え方でも式は一致することが分かる。

③解法（その3）

高校生であれば，表から数列の一般項を求めることから直線が100本あるときの交点の数値を求めることができる。

直線	1	2	3	4	5	6		99	100
交点	0	1	3	6	10	15			

＋1　＋2　＋3　＋4　＋5　…　＋98　＋99

表の交点の数を数列と見ると

$$0,\quad 1,\quad 3,\quad 6,\quad 10,\quad 15,\quad \cdots$$

となる。この数列の１次の階差をとると

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\cdots$$

という，公差が１の等差数列が現れる。これを一般項を求める公式に当てはめると

$$0+\sum_{k=1}^{n-1} k = 0+(n-1)\times n\div 2$$

$$= n\times(n-1)\div 2\cdots(\mathrm{c})$$

という一般項が求められる。この一般項のnに100を代入することで，直線が100本あるときの交点の数値が求められるのであるが，この（c）を前の（a）（b）と比べると，一致していることが分かる。つまり，別々の考え方で求めたものが同じものとして，式を通してつながったことになる。

③式を見直す

３つの考え方で，直線がn本あるときの交点の数値を求める公式を求め，どれも

$$n\times（n-１）\div２$$

となることが分かった。この式を見直すこととする。この式を以下のように変形してみる。

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

この式のnに具体的な数値を入れてみる。

$$\frac{4\times 3}{2}\qquad\qquad \frac{5\times 4}{2}$$

これらの式から，これは，組み合わせを求めるときに使う式であることが分かるであろう。つまり，

$$\frac{n(n-1)}{2} = {}_n\mathrm{C}_2$$

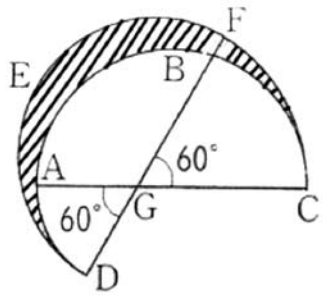
ということになる。すると，直線の交点を求める問題は，「２本の直線の選び方が何通りあるか」という問題に置き換えることができるのである。つまり，この問題の本質は，いくつかあるものから２つのものを選び出す組み合わせの数を求めることなのである。したがって，当初の問題であるAEDの数を求める問題は以下のような，組み合わせを求める問題と同じ構造をもっていることが分かる。

・100人がお互いに電話を掛け合うと何回電話をかけることになるか？

・100人がそれぞれ別の人と握手をします。全体で何回の握手が行われるでしょうか？

・100人の中から２人選ぶ選び方は何通り

（2）面積を求める問題



半円ABCと半円DEFの半径はともに9 cmです。
また，おうぎ形ADGとおうぎ形FGCの中心角はともに60°で，AGの長さは6 cmで，GCの長さは12cmです。円周率をπとして斜線部分の面積を求めなさい。

こうした問題も入試問題でよく出されるものである。この問題は全体から白抜きの部分を取り除くことで斜線の部分を求めることができる。そこで，まず，全体の面積を求めてみる。

半円DEF→ $9\times9\times\pi\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{81\pi}{2}$ (cm²)

おうぎ形FGC→$12\times12\times\pi\times\dfrac{1}{6}=24\pi$ (cm²)

この2つの部分を合わせると

$$\frac{81\pi}{2}+24\pi=\frac{129\pi}{2}\ (\mathrm{cm}^2)$$

次に白抜きの部分を求める。

半円ABC→ $9\times9\times\pi\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{81\pi}{2}$ (cm²)

おうぎ形ADG→ $6\times6\times\pi\times\dfrac{1}{6}=6\pi$ (cm²)

この2つの部分を合わせると

$$\frac{81\pi}{2}+6\pi=\frac{93\pi}{2}\ (\mathrm{cm}^2)$$

したがって，斜線の部分は

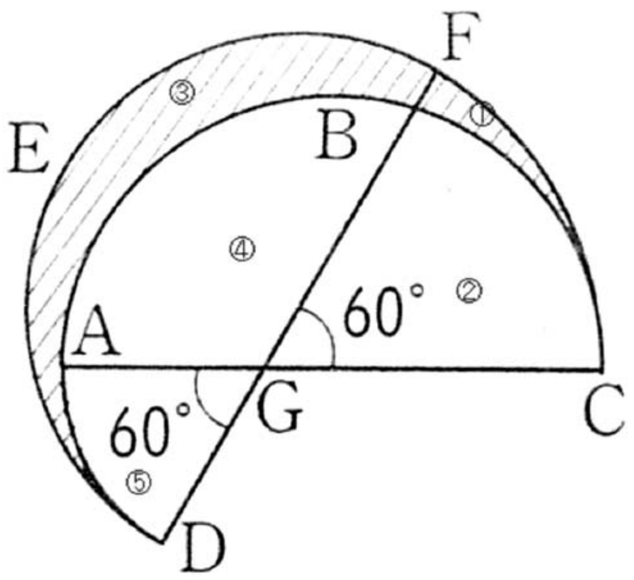
$$\frac{129\pi}{2}-\frac{93\pi}{2}=18\pi\ (\mathrm{cm}^2)$$

$18\pi\ \mathrm{cm}^2$

答えが出ればよしとするならこれで終わりである。ここまでなら，半円，おうぎ形をしっかり区別できれば小学生でも解ける問題である。しかし，計算された式をもう一度見直してみると無駄な計算をしていることが分かる。

$$\frac{129\pi}{2}-\frac{93\pi}{2}=\left(\frac{81\pi}{2}+24\pi\right)-\left(\frac{81\pi}{2}+6\pi\right)$$

この式から単純に24π－６πを計算すれば答えの数値が求められることが分かる。
この24π－６πを図にもどして考えると，大きいおうぎ形FGCから小さいおうぎ形ADGを引けば答えが求められるということになる。では，この式から分かった大きいおうぎ形FGCから小さいおうぎ形ADGを引くと，なぜ斜線の部分の面積を求められるのかを考えてみることにする。



図を上記のように①～⑤の部分に分けてみる。おうぎ形FGCはこの図から①＋②となる。したがって，①＋②から⑤を引くと斜線の部分である①＋③の面積が求められるのはなぜかを考えればよいということになる。式で表すと，

①＋②－⑤＝①＋③

となり，これを説明すればよいのである。まず，この式から，③＝②－⑤と考えられる。つまり，②から⑤を引いた面積は③に等しいということが考えられるのである。

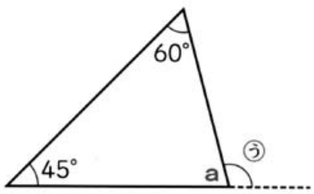
では，なぜ②から⑤を引いた面積は③に等しいのであろうか。そのことの解決の鍵は④の存在である。題意より半円ABCと半円DEFは面積が等しい。この等しい面積の半円の重なっている部分が④なのである。そして，等しい半円ABCと半円DEFから重なっている部分の④を取り除いた，残り同士は等しいことが分かる（半円DEFでは③＋⑤，半円ABCでは②)。これは，等しいものから等しいものを引いたら，残りは等しいという，ユークリッドの原論で公理（共通概念）とされているものである。つまり，この問題はこの原理を基に考えればよいことが分かる。式で表すと次のようになる。

②＋④＝半円
③＋⑤＋④＝半円
したがって，　半円－④＝②
半円－④＝③＋⑤

となり，等しいものから等しいものを引けば残りは等しいので，②＝③＋⑤となる。
つまり，②－⑤＝③となるので，大きいおうぎ形FGCから小さいおうぎ形ADGを引くと斜線の部分が求められるのである。

ここまで，答えの数値を求めた式から別の解法を導き出してきた。もちろん，解決の当初から，「等しいものから等しいものを引いたら残りは等しい」という原理（公理）を基に，大きいおうぎ形FGCから小さいおうぎ形ADGを引いて答えを求めようと考えつくこともあろう。

さて，こうしたことはここで初めて扱ったことなのであろうか。つまり「等しいものから等しいものを引いた残りは等しい」という原理を基に問題を解決したことが過去になかったか考えてみる。



例えば，右の図の「う」を求める場合aが未知であっても

180－a＝う

180－a＝（60＋45）　　より

う＝60＋45

と求めてきた。

つまり，等しいもの（180°）から等しいもの（a°）を引いた残りは等しいという原理（公理）を根底において解決をしてきたのである。これは，まさしく，前述の

半円－④＝②

半円－④＝③＋⑤

と同じことを表している。つまり，どちらも，「等しいものから等しいものを引くと，残りは等しいということを原理において（正しいものとして）問題を解決しているのである。このように，面積を求める問題も上記の角度を求める問題も同じ構造であることが式の考察から分かるのである。

4. おわりに

（1）答えが出てから始まる

前述の２つの問題は，どちらも答えの数値が出た後に考察を始めることから統合することに進んでいく。言い換えれば，答えが出ればそれでよしとする学習態度からは統合する活動は生まれてこない。子どもにこのような態度を育てるには，まず，教師が答えが出た後に，式を考察してこれまでに学習したことと統合しようとする姿勢を子どもに示す必要がある。なぜなら，考え方や態度だけを切り出して子どもに指導することはできないからである。考え方や態度は子ども自身が自分の頭で考え，その考えた過程を習慣化していくことでしか成長していかない。だからこそ，教師が自ら統合しようとする姿勢を子どもに示し，統合することのよさやおもしろさを子どもに示していくのである。

本稿では，2つの問題について実際の授業の形では提示してはいない。したがって，2つの問題の授業での展開の仕方は様々なものが考えられる。例えば，道路の問題であれば，一人一人に考える時間を確保し，それぞれが考えた解法を並べ，それぞれの解法の式が一致することを示す。その上で，組み合わせの問題への置き換えに気づくようにしていくことが考えられよう。

また，面積の問題では，図をしっかり観察させ，全体から部分を引くことで全員に答えを求めさせる。その後，式をよく観察させ，式の変形から大きなおうぎ形から小さなおうぎ形を引けば答えが求められることに気づかせ，その理由を考える活動に移る。そして，これまでの学習で同じようなことをしてこなかったのかを考えさせ，既習の学習内容との統合を図るようにする，という展開が考えられよう。展開の仕方は子どもの実態によって異なるが，どのような展開でも，答えが出れば終わりとするのではなく，統合しようという姿勢を常に教師がもち，子どもにその姿勢を示していくことが大切であろう。

（2）式を観察し，その背景にある無数の具体的な事象を想像する力

２つの問題とも，式をよく観察し，その背景にある具体的な事象を想像することによって統合する活動が進展している。背景にある具体的な事象を想像するには，事象を式に表現するだけではなく，式をよむこともできるだけ多く取り入れる必要がある。例えば，x^2を見たら正方形の面積を考える等，教師はできるだけ機会を逃さないようにしたい。こうした機会を逃さないためにも，授業の場面場面で教師は式をよむ活動が設定できるかどうかを常に意識していることが大切であろう。

（3）日常生活の本質的な構造を見抜き適切な数学の舞台に置き換える力の育成

杉山は統合的な見方について次のように述べている。

「いろいろな現象が，ある基本的な法則に基づいていることを知ることによって，それらをまとめてみることができる。また，いろいろな現象に共通する基本的な法則を認めていくということは，自然現象を究明するときにも，社会現象を究明するときにも大切な考え方であろう。～（略）～頭のよい人とそうでない人のちがいの一つは，多くのものごとを包括できるような基本的なきまりを自分にもっていて，それに基づいて，特殊な現象に対処できるかどうかにあるともいわれる。」（杉山，2006，p117～118）

算数・数学を日常生活に活用していく力を育てるためには，様々な事象を統合して包括的にとらえていく力が欠かせない。受験を勝ち抜くための算数・数学から日常生活をよりよく過ごすための算数・数学への拡張を図っていくためにも，これまで述べてきた式による統合だけではなく，証明による統合等，様々な算数・数学の学習場面で統合する活動を扱い，統合しようとする姿勢を子どもたちに育てていくようにしたい。

引用・参考文献

中島健三(1981)　「算数・数学教育と数学的な考え方」 金子書房　p.130
西村和雄・戸瀬信之・岡部恒治(1999)　「分数ができない大学生」 東洋経済新報社
小倉金之助(1973)　「数学教育の根本問題　小倉金之助著作集第四巻」 勁草書房
杉山吉茂(1986)　「公理的方法に基づく算数・数学の学習指導」 東洋館出版社
杉山吉茂編著(1997)　「少なく教えて多くを学ぶ算数指導」 明治図書
杉山吉茂(2006)　「豊かな算数教育をもとめて」 東洋館出版社

事象の幾何学化に焦点を当てた活用する力の育成について
―電車の中吊り広告の見え方の考察を通して―

東京学芸大学附属国際中等教育学校教諭　高橋広明

1．本実践の意図

本実践は現実場面の事象を数学的に考察することを通して，図形の学習を発展的に行うことを目的としている。「生かす数学」ではその冒頭で，「すべての子どもが数学を活用して現実世界の様々な事象を表現し，その仕組みを解明し，数学を用いて予想したり問題解決を行ったりすることができるような算数・数学教育が求められる」とした上で，必要な知識の理解を図ったのちに学んだ数学を用いて問題解決するのではなく，問題解決する中で必要な数学を学ぶような学習指導を求めている。特に図形の学習において，太田は「完成された図形の知識や体系を与えることに中心が置かれている現在の中学校の幾何教育を，生徒に幾何の世界を構成させるものに変えていこうという意図」のもとで教材研究および実践を行っている（太田(1997)）が，その目的は「生かす数学」の目指すものを具現化していると考えられる。本実践も太田の主張に与するものであり，結果として「生かす数学」の理念に沿ったものであると考える。

現実事象の問題を数学的に解決する数学的モデル化過程について，西村は右のサイクルを提示している。その中で数学的な問題場面から数学的モデルを得るための数学的モデル作成のフェーズにおいて西村は，「幾何学化しなければ，記号化や計量化，グラフ化ができないことが多い」ため，幾何学化の重要性を指摘している(西村(2003))。さらに本田らは現実世界の問題解決において重要な役割を果たす空間思考力を次の３つの力で捉え，その力の育成を目指した授業について考察している（本田・西村(2005)）。

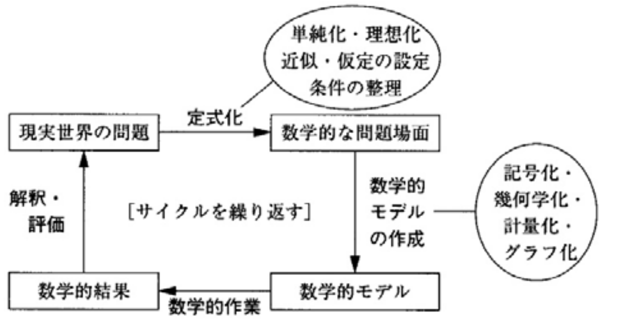


図１：数学的モデル化過程（西村（2001））

1）事象間の関係を表す，実際には見えない線をかく
2）事象を見る視点を変えて図に表す
3）２次元の図から３次元の事象を構成し直す

これらの空間思考力はいずれも重要なものであるが，これらの力はいずれも定性的な分析力や考察力と捉えることができる。一方で定量的な分析力や考察力も幾何学化の段階では重要である。現実事象を定量的に分析することができるのは，その事象を幾何学化し考察可能な数学的モデルを作成できたからこそなせることである。したがって定性的な考察と同様に定量的な考察も数学的モデル化においては重要な力であると考える。また現実事象を数学的な問題場面に変える定式化も数学的モデル化過程において大切なフェーズである。本実践では特にその中で条件の整理に焦点を当てたい。これは，現実事象を定式化する際には理想化や単純化をしたり，仮定を設定したりすることが不可欠であるが，それらの結

果として必要な情報は何かを判断し，条件を見出して整理することが求められるからである。これは直接図形の学習における空間思考力に結びつくものではないが，数学的モデル化過程においては育みたい力である。そこで本実践では本田らの空間思考力を参考にしながら，次の４つの力の育成を意図して構成した。

(a) 必要なデータを判断する力
(b) 考察にふさわしい視点を設定し，事象を幾何学化する力
(c) 投影面を設定する力
(d) 幾何学化した数学的対象について数学を活用して解決する力

それぞれの詳細については第３節で述べる。

2. 課題について

本課題は，かつてテレビで放映されていた「クイズ雑学王」で出題されていた以下の問題がもとになっている。

> 問題
> 　電車の中吊り広告をよく見ると，雑誌名が下の方に大きく書かれています。
> 　これは出版社側が考えたレイアウトで，ある大きなメリットがあるからなのです。
> 電車の中吊り広告で雑誌名が下の方に書かれている理由とは，一体なんでしょうか？

「広告の下の方に雑誌名をかけば，遠くからでも手前の広告と重ならずにその雑誌名が読めるから」というのが解答である。では実際に車内の広告はどのように見えるのだろうか。それを探究課題とした。

> 探究課題
> 　電車の車内で立っている人から車内の中吊り広告はどの範囲まで見えるだろうか。
> 正確に図示してみよう。

実際には，観察者から見て一番手前の広告とその奥の広告の２枚の見え方を図示することとした。

3. 本実践を通して育みたい力

前述したとおり，本実践では (a)～(d) の４つの力の育成を意図して構成している。本節ではその力一つ一つについて詳述する。

(a) 必要なデータを判断する力

授業で予め生徒に与えた情報は下に示した広告のサイズのみであった。広告は大きさにより２種類あるが，このうちB３ワイドの広告を見ることに統一した。

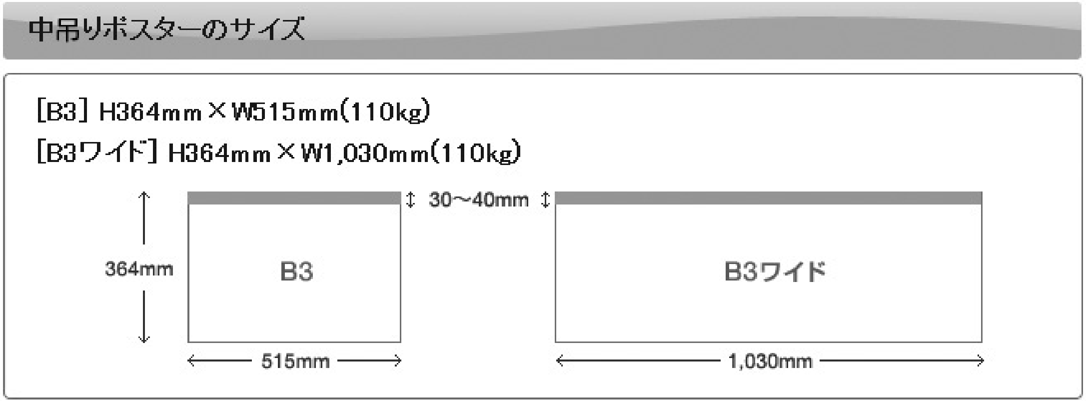


図２：中吊りポスターのサイズ

２枚の広告の見え方を図示するためにはこの他にどのような情報が必要であるかを考え，適切に判断できるようにしたい。

(b) 考察にふさわしい視点を設定し，事象を幾何学化する力

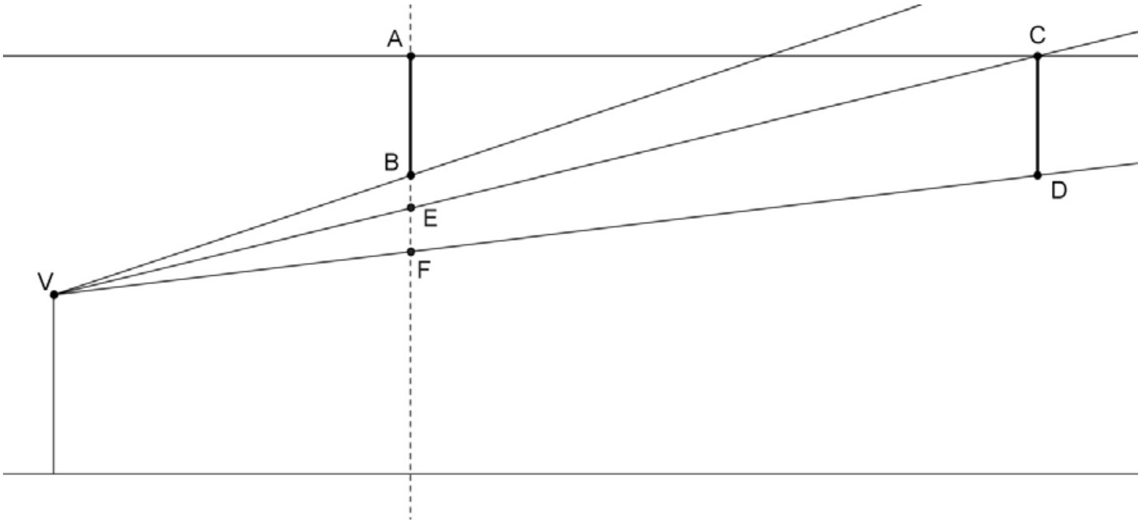
広告が見える範囲を正確に図示するためには，2枚目の広告はすべて見えるのか，あるいは一部が隠れてしまうのかを判断し，すべて見えるとしたらその間隔はどの程度か，一部が隠れる場合はどの程度隠れているのかを考察する必要がある。そのためには考察に適切な視点を定め事象を捉えることが必要になる。すなわちこの場合，真横からと真上からの視点が重要になる。さらに定量的な考察をするためには，真横や真上から見たものを幾何学化する必要がある。つまり広告や人を線分と考えたり，視線を直線と考えたりして，図形として表現することが必要となる。さらに定量的な考察のためには視線を描く必要もある。これは実際の事象には存在しない直線である。したがって見えない直線を自らかく必要がある。見えない線をかく力も，事象の幾何学化の観点からは重要である。

(c) 投影面を設定する力

事象がどのように見えるのかを図示する場合，奥行きのある３次元の対象を２次元の平面に表現することになる。空間図形を平面に表現する方法として，小学校から中学校にかけて，展開図・見取図・投影図（正投影）を学び，ぞれぞれの表現の利点や短所などを学習する。見取図も正投影図も投影図法である（見取図は斜投影図法）が，それらを描くとき，投影面を設定し，それに投影しているという意識は生徒にはほとんどないと思われる。さらに，これらはいずれも平行投影であるため，その視点は無限遠点である。したがってそれらの図法がある定まった視点から見ているという認識は持ちづらい。一方，実際に目で見た様子を図示しようとすると視点からの中心投影図，すなわち透視図が必要となる。透視図を描くためには意識的に投影面を設定しなくてはならない。したがってこの活動を通して，2次元の平面に表現することとはすなわち投影面へ投影した図である，という認識を持ち，その投影面を自ら設定できる力を育みたい。

(d) 幾何学化した数学的対象について数学を活用して解決する力

ひとたび幾何学化すればそれは数学の対象となる。したがって数学を活用して問題を解決することができる。本課題においては見え方を図示する場面で数学を活用することが必要となる。



上の図は２枚目の広告がすべて見える場合の側面図である。ここで，Vが視点，ABおよびCDが広告を表している。この図で既知のデータは‘視点から広告までの水平距離’，‘広告間の距離’，‘視点の高さ’，‘床から天井までの高さ’，‘広告の高さ’である。このとき，手前の広告に対する奥の広告の高さがEFに相当し，2枚の広告の隙間がBEに相当する。正確な図をかけばその距離を図ることによって２枚の広告の見え方を図示することができるが，正確に図をかくことは困難である。したがってこれらの長さは数学を活用して算出する必要がある。同様に，手前の広告に対して奥の広告の幅は平面図をもとに算出しなければならない。このように現実場面の事象について，学習した数学的内容を活用し，定量的な分析や考察をする力が求められる。

4. 授業の実際と考察

授業は次の４時間を設定した。

第１時	場面および課題提示と解決に必要なデータについての考察
第２時	班別での解決
第３時	練り上げ（奥の広告が全て見えるか一部が隠れるかの判断および投影面の確認）
第４時	練り上げ（図示に必要な数値の算出方法の確認および図の完成）

以下，(a)～(d) の観点について授業を考察する。

(a) 必要なデータを判断する力について

課題解決のためにどのようなデータが必要かを判断するためには，例えば広告の見え方は何によって決まるのかの見通しが重要である。この場合，広告の大きさと設置位置，および観察者の位置情報が必要になる。ワークシートを分析すると，多くの生徒はこれらの中で‘広告間の距離’および‘視点の高さ’についてのデータが必要であると認識していることが分かる。しかし，これだけしか記述できていない生徒も少なからず存在した。

次に多かったのが，これに加え床から天井までの距離と床から観察者までの視点の高さ情報である。このことから生徒は側面から見た図が必要であることを認識していたことが予想される。これは，広告が重なって見えても下の方は見える，というクイズの解答がこの課題の発端だったためであることが考えられる。一方で観察者の位置については，その情報が必要であることは認めつつも実際にどのようなデータが必要であるかまでは見通せていないと思われる記述が多数確認できた。下の記述がその典型である。観察者については“どの位置で”という記述となっている。それ以外の情報についてはすべて数値データとして得ることができる情報であるが，観察者の“位置”というだけではデータとして何を得ればよいのかが不明確である。考察に必要なデータを考える際には，収集または設定可能なレベルまで掘り下げて考えるべきであることを理解できるようにすることが授業では大切であろう。

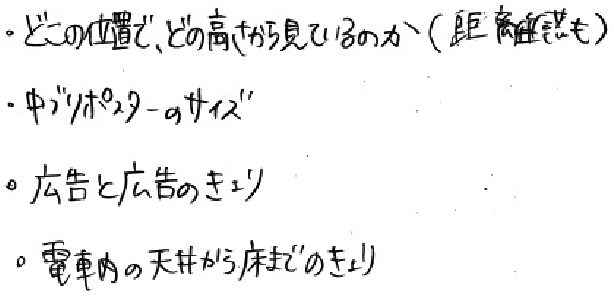


図３：観察者の位置情報が不明確な記述例

この観察者の位置については，縦方向は観察者と広告との水平距離を設定した。横方向については電車の端からの距離という意見もあったが，そのときは広告の車内における設置位置の情報も必要であることから，真に必要なのは広告との相対的な位置なので，広告の右端からの距離と授業では統一した。授業で確認したデータは以下の通りである。

広告間の距離	2240mm
床から天井までの高さ	2247mm
床から観察者までの視点の高さ（※）	1500mm（1650mm）
広告から観察者までの水平距離	2000mm
広告の右端から内側へ入った距離	200mm

（※）観察者の視点の高さについては生徒の反応に委ねたところ，中学生の平均的な視点の高さとして1500mmになった。この数値の場合では２枚目はすべて見えることになる。そこで１クラスだけ一般的な大人の視点の高さとして1650mmに設定した。この場合は２枚目が一部隠れて見えることになる。

解決に必要なデータは以上であるが，それ以上のデータを求める生徒もいる。その多くが視角に関するものであった。そこで首を固定したときの人間の一般的な視角は，水平方向が約200°, 垂直方法が上方向では50°, 下方向では75°であることを与えた。

(b) 考察にふさわしい視点を設定し，事象を幾何学化する力について

予想では，鳥瞰図を描きそれをもとに考察しようとする生徒が多くいることを想定していたが，実際はほとんどの生徒が側面図を描いてそこから考察しようとしていた。鳥瞰図

をかいている生徒も場面把握のためにその図をかき，実際の考察では側面図を用いているケースがほとんどであった（**図4**）。
また，場面把握の段階で，すでに側面図や平面図で考えている生徒も確認できた（**図5**）。

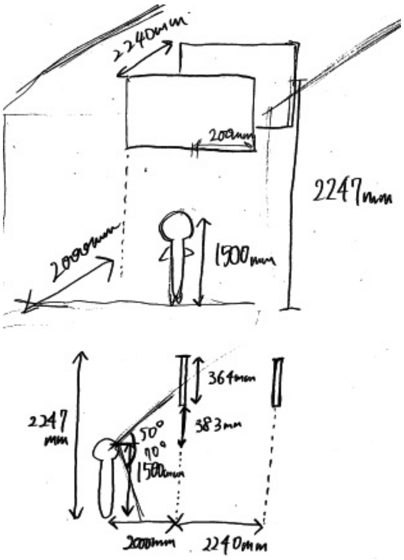


図4 ：鳥瞰図と側面図

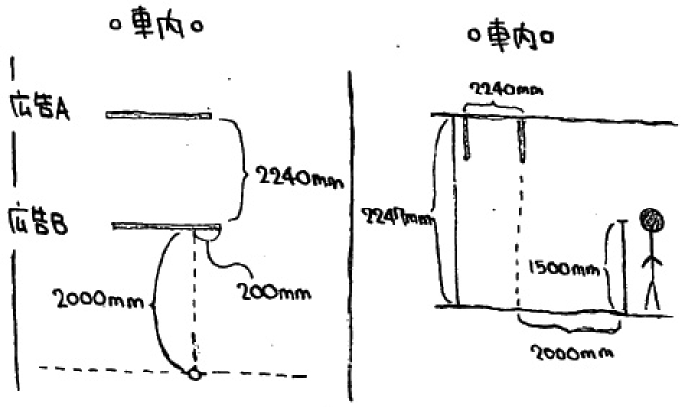


図5 ：平面図と側面図

生徒のワークシートを分析すると，側面からみるという点に関しては，適切に視点を定めて考察する力は，多くの生徒がすでに備わっていると判断してよいと考えられる。平面図についてはこの時点でその図をかいている生徒は圧倒的に少なかった。これはこの時点での問題意識が奥の広告がすべて見えるのか否かの判断であるため，平面図をもとに考察する必要性がまだなかったためである。したがって平面図という上からの視点で事象を捉えようとする力が備わっているかはこの時点では不確定である。なお，幾何学化に関しては，観察者を人間らしく装飾してかく生徒（**図6**のような例）は多くいたが，本質は線分と変わらない。さらに広告は厚さを無視して線分で表現したり，視点から伸びる本来見えない視線を直線で表したりすることも多くの生徒ができているようである。したがって，幾何学化する力も多くの生徒に備わっていると判断できそうである。幾何学化の力がこの時点である程度備わっているのは，かつて図形の学習において，箱ブランコの危険性を平行四辺形の性質に照らして考察する学習を行っており[1)]，そのときの経験が大きいのではないかと考えられる。

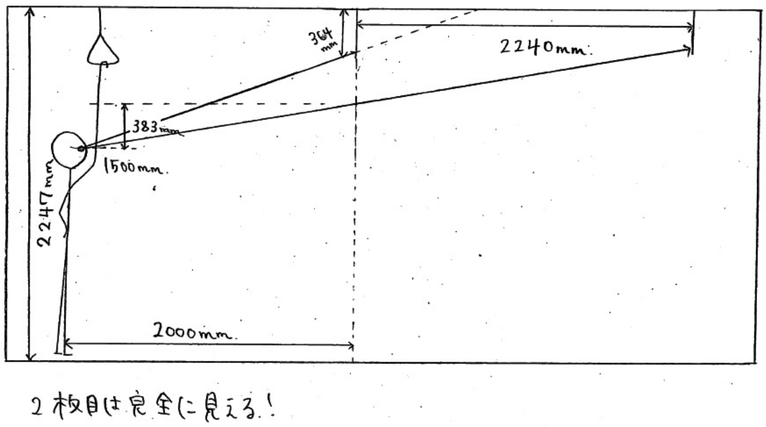


図6 ：側面図

この側面図を用いれば，奥の広告がすべて見えるのか，それとも一部が隠れるのかを判

断することができることも生徒は納得できているようである。授業ではあえて不正確な図（視点高を1500mmに設定したクラスでは正しくは奥の広告はすべて見えるので一部が隠れるような図を，視点高を1650mmに設定したクラスでは正しくは奥の広告の一部は隠れるのですべてが見えるような図）をそれぞれ提示し，なぜ自分たちの判断とは異なる結果になってしまうのかを問うたところ，提示した図が正しい縮尺で描かれていないためであることを生徒は直ちに指摘することができた。したがって，図を用いて判断する場合には正確な図をかかなくてはならないことを生徒は理解していると捉えることができる。

一方，奥の広告の見え方に関する判断に図を用いるのではなく，数値計算によって判断する生徒もいる。**図７**の生徒は，奥の広告の上端と手前の広告の下端とを直線で結び，奥の広告がすべて見えるための視点高の最大値を算出し，それよりも設定した視点高は低いので２枚目は全て見えると判断している。

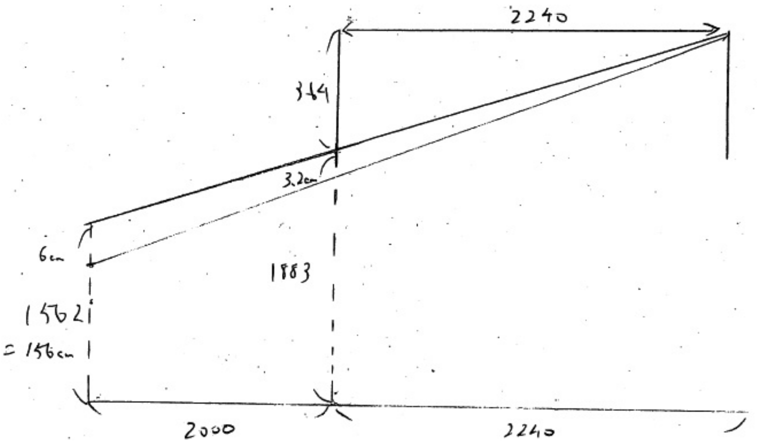


図７：数値で判断している例

また，奥の広告の一部が重なるように視点高を設定したあるクラスでは，視点と手前の広告の下端とを直線で結び，奥の広告が全て見えるための広告間の距離の最小値を求め，それよりも２枚目の広告が手前にあるので一部が隠れて見えるはずだと判断している（**図８**）。

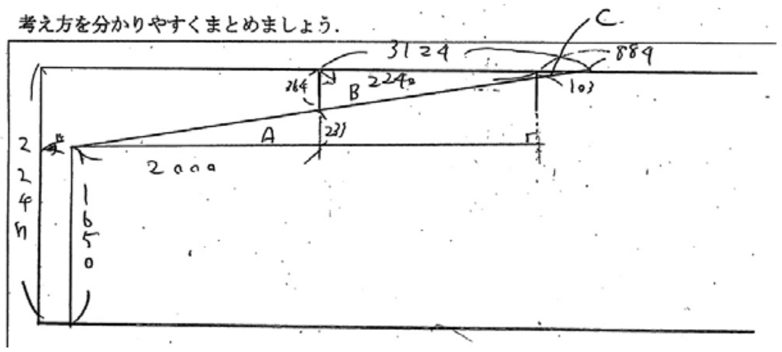


図８：数値で判断している例

この生徒と同じクラスの別の生徒は異なる判断方法をしている（**図９**）。この生徒は，視点と奥の広告の上端とを直線で結び，その直線と手前の広告との間隔をxとして相似比を用いてxの値を算出し，その値が負になってしまうので重なって見えるはずだと判断している。このように，図のみならず数量関係を用いて判断することも可能であることが認められた。

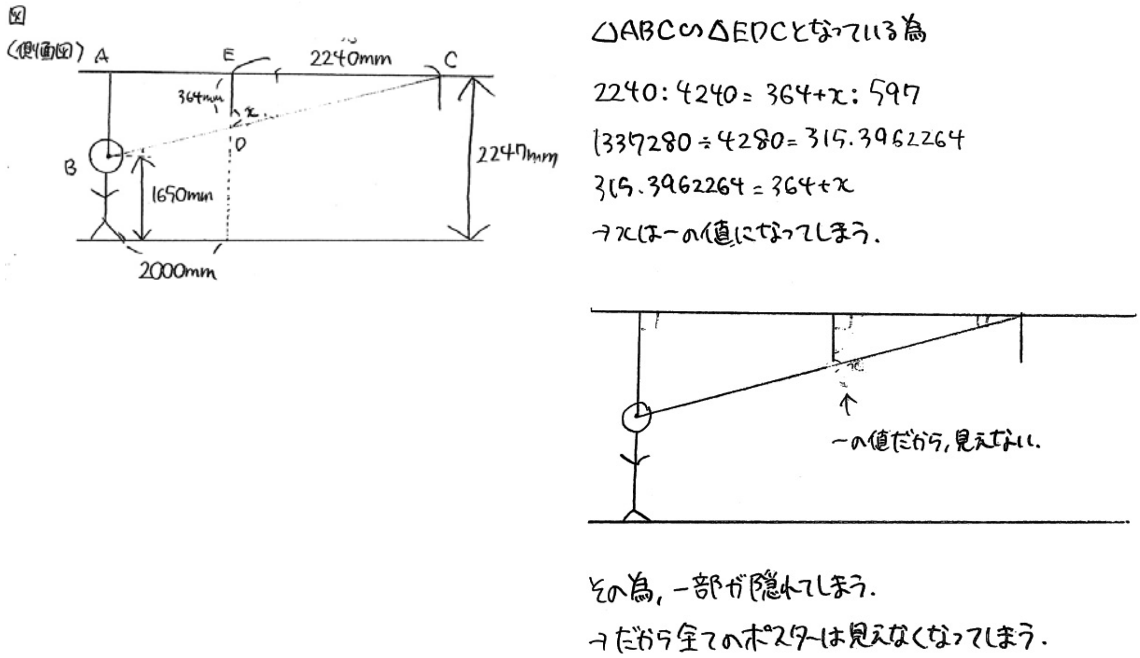


図９：数値で判断している例

(c) 投影面を設定する力について

授業では２枚目の広告が全て見えるのか一部が隠れてしまうのかを判断したのち，実際に図示する活動へと入っていった。以下は視点高1500mmのクラス，すなわち２枚目の広告が全て見える設定のあるクラスでの反応である。

まず側面図（**図10**）から奥の２枚目の広告は全て見えるという結論を基に，手前の１枚目に対してどのように見えるのかを確認した。具体的にはその位置と大きさについてである。これらについて，奥の広告の位置は手前の広告より下の方に見えること，かつ大きさは１枚目の広告よりも小さく見えるであろうことを確認し，およその図を板書した（**図11**）。この段階で，手前の広告の縦の長さは側面図では大きくかかれている広告の縦の長さに対応していることを確認し，このとき奥の広告の縦の長さは側面図ではどこに現れるのかを問うた。

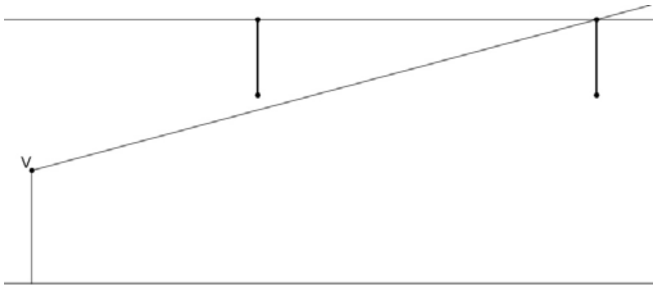


図10：側面図

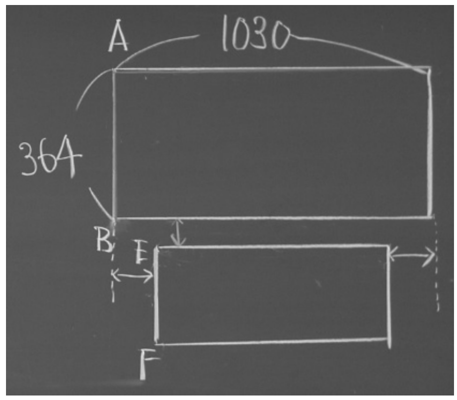


図11：板書

この問いに対してある生徒は，「もう１本線をかいた方が分かりやすい」と発言し，視点と奥の広告の下端を結ぶ直線を要求した（**図12**）。この生徒は先の側面図からすでに奥の広告の縦の長さの見かけの長さがどこに現れるのか分かっていたようであるが，他の生徒はすぐには分からなかったようである。しかししばらく時間をとると，**図13**のように直線ABをひき，EFが奥の広告の縦の長さに相当するという意見が出はじめた。そこでそう考えてよい根拠を尋ねると，「図は平面にかくので，CD（奥の広告の高さ）はAB（手前の広告の縦）と同じ面に見えるはず」というような反応を得ることができた。このように，自ら投影面を設定しているわけではないが，同一の平面上に見た目の長さが現れることは理解していると考えられる。

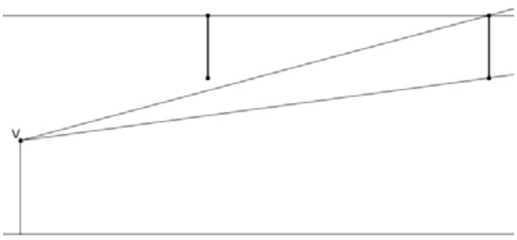


図12 ：側面図

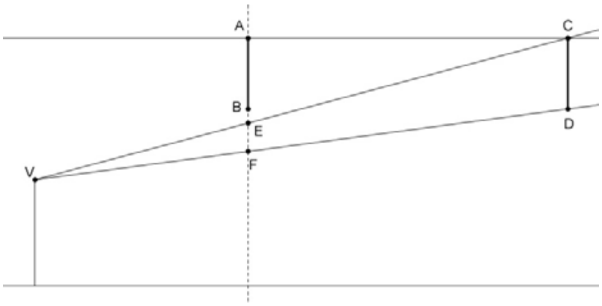


図13：側面図

一方で，横の長さはどの図のどこに現れるのかを問うたところ，先の側面図の考え方はすぐ表出したのに対し，平面図から判断できそうだという考えは直ちには反応として得られなかった。しばらく待ち，平面図を用いるという反応が得られたのち，視点Vから２枚の広告を見たとき，奥の広告の横の長さは平面図のどこに現れるのかを問うた（**図14**）。これも先の側面図ではすぐに反応が返ってきたのに対し，これについてはかなり時間をとって待っていてもなかなか意見として出てこなかった。平面図からは投影面をほとんど認識することができないと考えられる。これらのことから，前述の (a) では生徒は適切な視点から考察する力は備わっていると判断したが，実はそれは横からの視点，すなわち側面図からの考察に限定された力であったと考えることができそうである。その要因を考えると，今まで生徒は側面から事象を捉えて図形として考察する経験をいくつかしてきた。例えば前述の箱ブランコの危険性の考察であったり，ツールボックスの動きを考察したりする学習[2)]である。これらはいずれも側面図を用いた考察であった。しかし真上からの視点から考察する経験は今までなかった。その経験の違いにより，平面図を用いて考察するという考え方が出てこなかったものと考えられる。そのような状況下で，投影面を自ら設定するのは困難であったと考えられる。

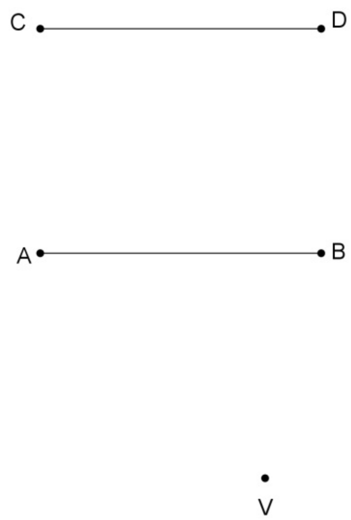


図14：平面図

(d) 幾何学化した数学的対象について数学を活用して解決する力について

ひとたび幾何学化すれば数学の舞台に乗るので，解決すべきゴールが明確化されたため

か，生徒は黙々と考察をしていた。ゴールはすなわちBEおよびEFの長さの算出である。これらが求まれば，2枚の広告を図示するための縦方向の長さがすべて確定することになる。

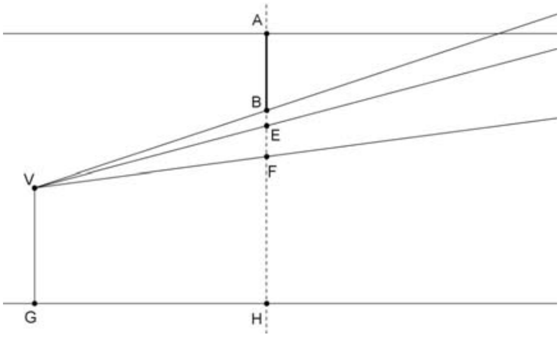


図15：広告が 2 枚ともすべて見える場合

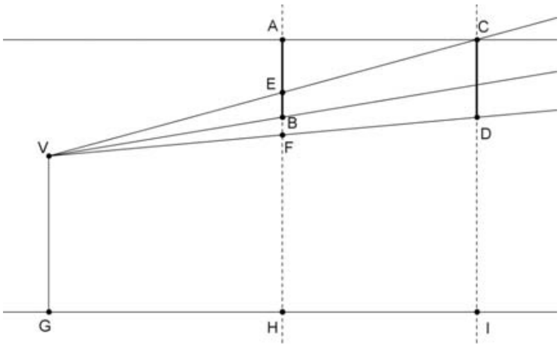


図16：奥の広告の一部が隠れる場合

これらの算出過程をワークシートから確認すると，学習した相似の考え方を用いて正しく算出できており，その導き方もいろいろな方法を見出すことができた。以下は奥の広告の一部が隠れる場合（**図16**）を扱ったクラスでの生徒のワークシートである。

図17の生徒は，△VIB∽△VHGをもとにまずGDの長さを算出し，次に△VBF∽△VGDをもとに奥の広告の見かけ上の縦の長さBFを算出している。

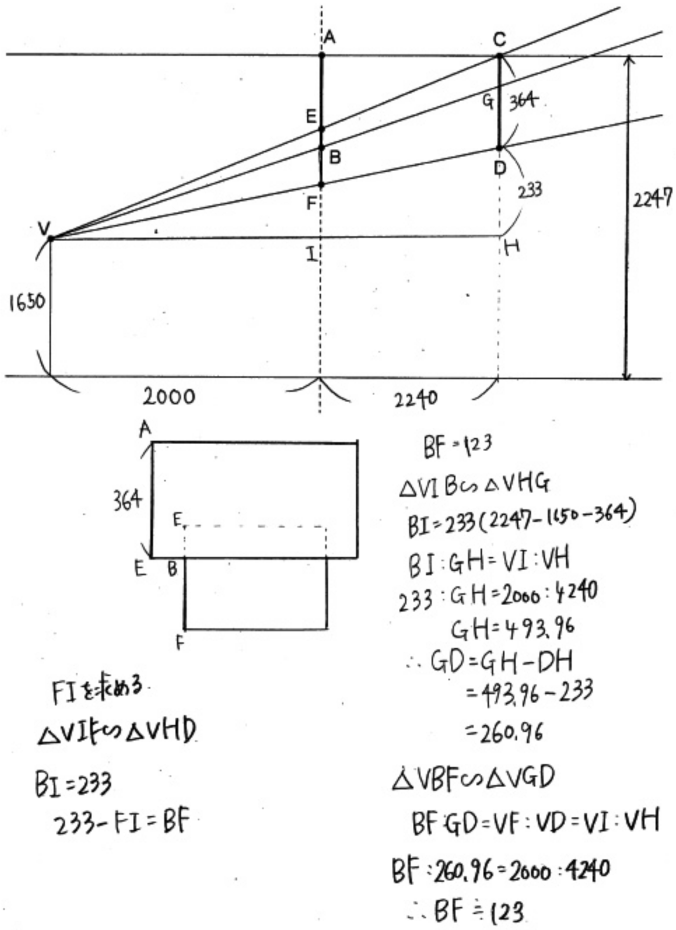


図17：生徒M.R.のワークシート

図18の生徒は，△VEG∽△VCHに着目してEGの長さを算出し，EB＝EG－BGとして重なっている部分EBを求めている。次に△VFG∽△VDHに着目してFGの長さを算出し，そこから奥の広告の見えている縦の長さBFを求めている。

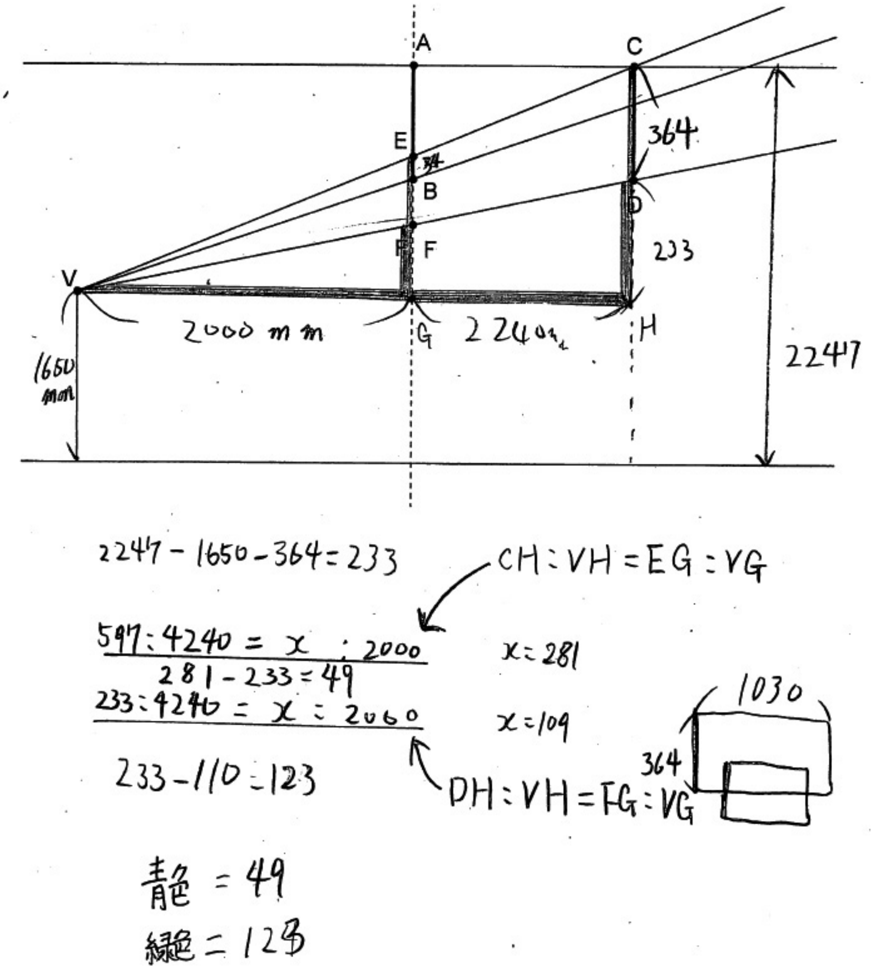
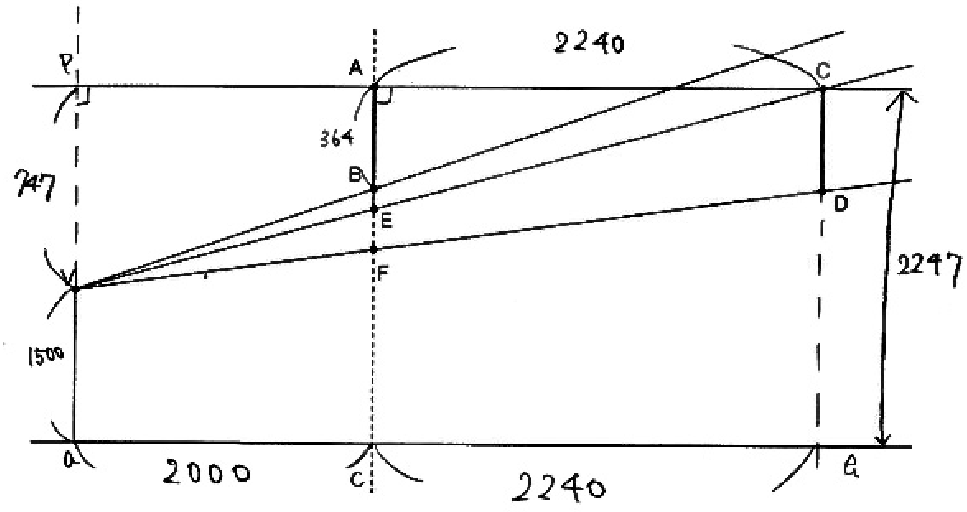


図18：生徒S.T.のワークシート

奥の広告がすべて見える場合（**図15**）を扱ったクラスでも，奥の広告の見かけ上の長さEFや隙間の長さBEを相似な三角形に着目して正しく算出している。

図19の生徒は，△CPV∽△CAEに着目してAEを算出し，それをもとに隙間の長さBEを求めている。奥の広告の縦の長さに対しては，△VEF∽△VCDに着目してEFを算出している。



PVの長さは、天井まで2247cmであることを使い、2247 - 1500 = 747

△VPCと△EACにおいて

∠PCV = ∠ACE (∠C共通)
∠VPC = ∠EAC = 90° (天井に直角に線をひいたから)

∴ △VPC ∽ △EAC

∴ CA : AE = CP : PV → 2240 : AE = 4240 : 747
→ 4240 AE = 1673280
→ AE ≒ ~~394.6~~ 395

∴ BE = 395 - 364 = 31

△VEFと△VCDにおいて

∠EVF = ∠CVD (∠V共通)
∠EFV = ∠CDV (PC//abなので同位角が等しい)

∴ △VEF ∽ △VCD

∴ VF : VD = FE : DC

平行線と比の関係から

ac : ab = FE : DC → 2000 : 4240 = FE : 364
→ 4240FE = 728000
→ FE ≒ ~~171.6~~ 172

A、BE ≒ 31mm、FE ≒ 172mm

図19：生徒S.R.のワークシート

図20の生徒は，視点から床に平行な直線を引き，相似な直角三角形に着目して奥の広告の見かけ上の縦の長さEF，および隙間の長さBEを算出しているものである。

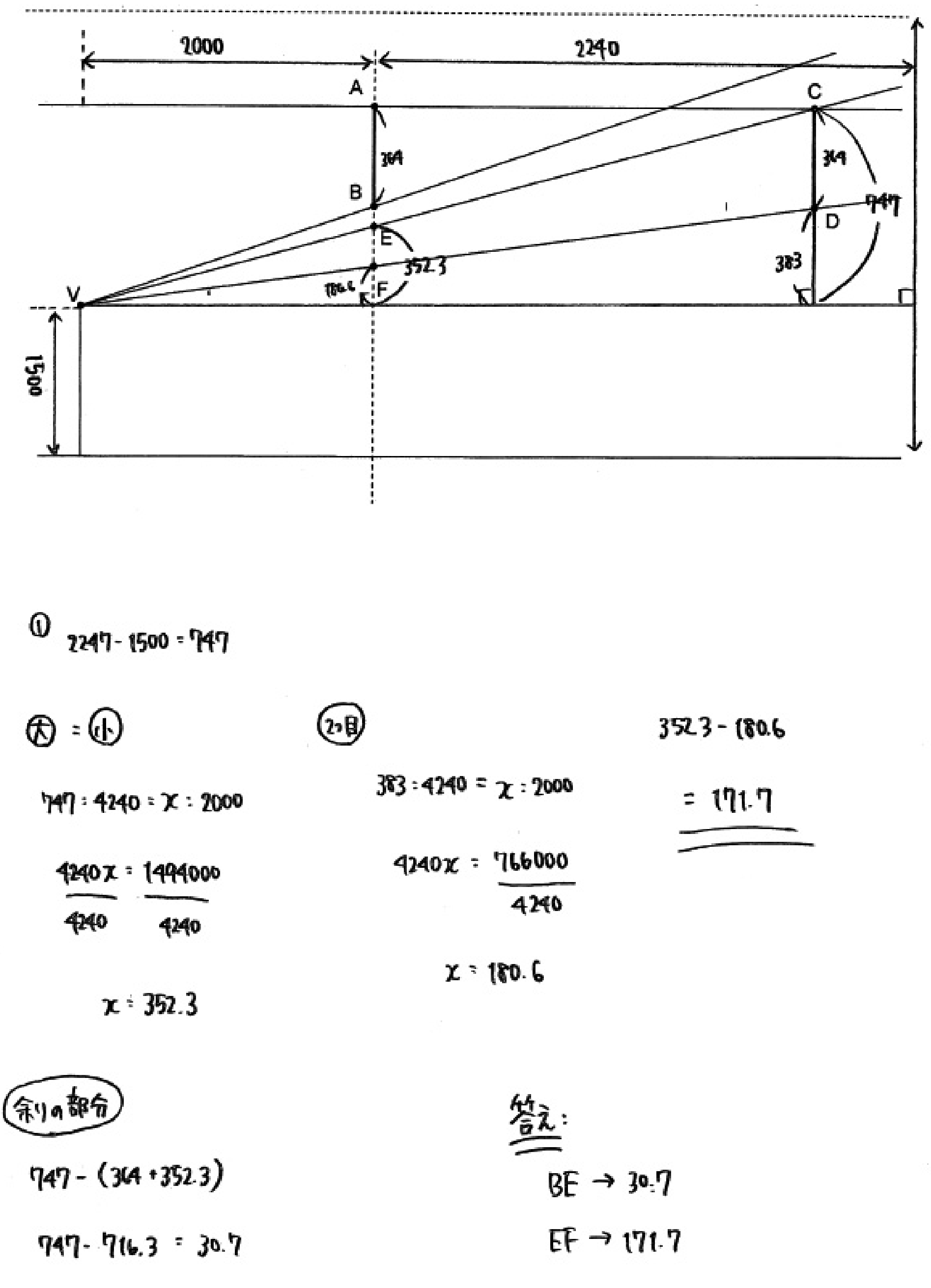


図20：生徒T.M.のワークシート

このように，現実場面の事象をもとにした場合でも，多様な考え方を共有することができることが確認できた。

5. 生徒レポートの分析

本実践後，次のようなレポート課題を生徒に課した。

課題

授業では２枚の広告の見え方について図示しました。その学習を踏まえて，以下のデータを基に３枚の広告の見え方を図示するとともに，その導き方を分かりやすく記述しましょう。

広告の大きさ	縦100 cm×横200 cm
広告間の距離	200 cm
床から天井までの高さ	350 cm
床から観察者の視点までの高さ	150 cm
一番手前の広告から観察者までの距離	150 cm
観察者の横方向の位置 （広告の右端から内側への距離）	50 cm

このレポートを分析すると，授業では把握しきれなかった生徒の実態を把握することができた。すなわち投影面についての理解である。広告の見え方を図示するときの重要なアイデアは，すべて同一平面上に投影して，必要な長さを算出することである。この理解がしっかりできている生徒もいる。

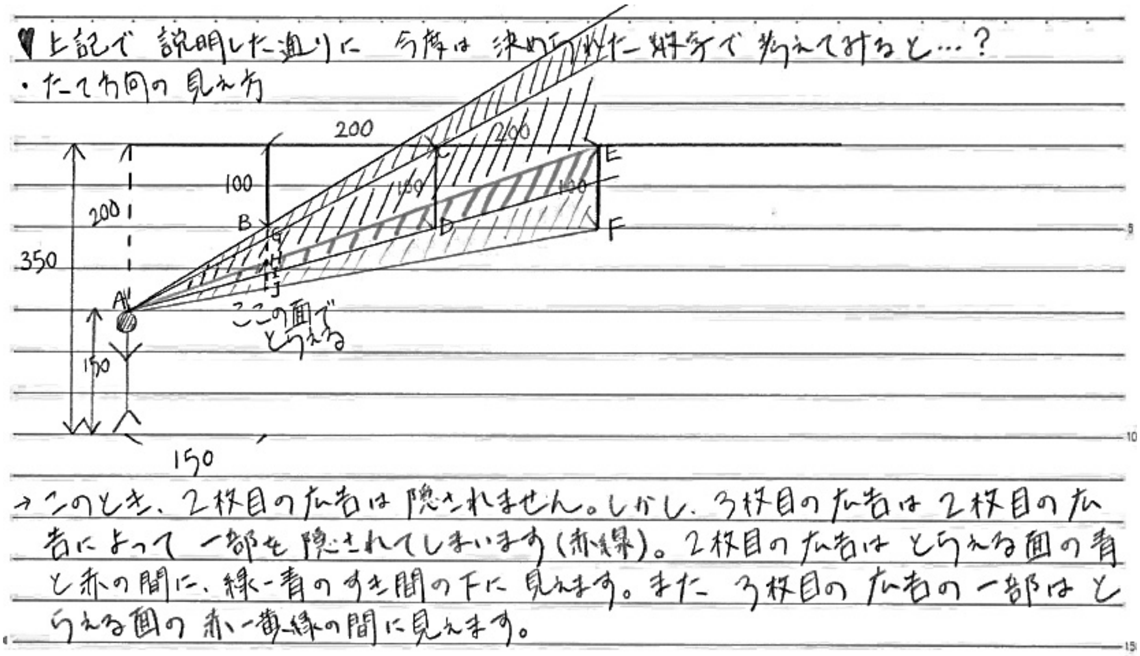


図21：正しく投影面を捉えている生徒

図21の生徒は，2枚目と３枚目の広告を一番手前の１枚目の広告と同じ平面でとらえる必要性を理解しており，それは記述にも表れている。この生徒の投影面の理解は確かなものであると考えられる。

一方で，投影面の理解が不十分である生徒も見られた。前節では，授業の中では，特に広告の縦の長さの算出について，同一平面上に見た目の高さが現れることを生徒はおおむ

ね理解していると判断できると述べた。しかしその理解は決して十分ではなかったようである。下は投影面の理解が不十分であった生徒の典型である。

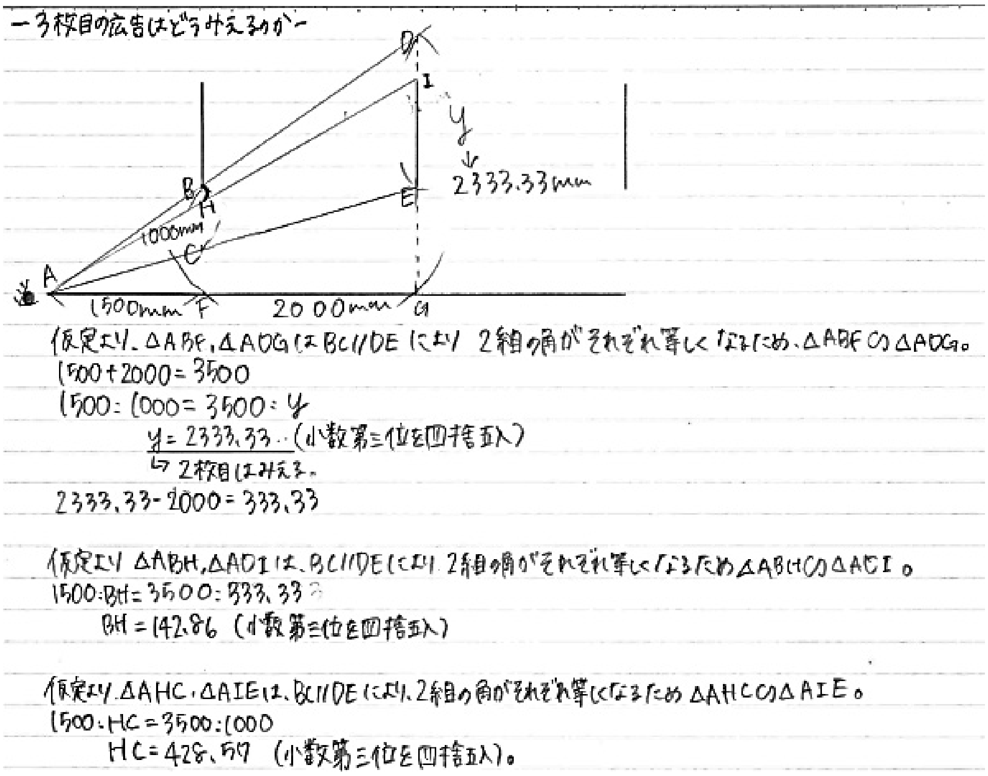


図22：生徒O.Y.のレポート（２枚目の広告の考察）

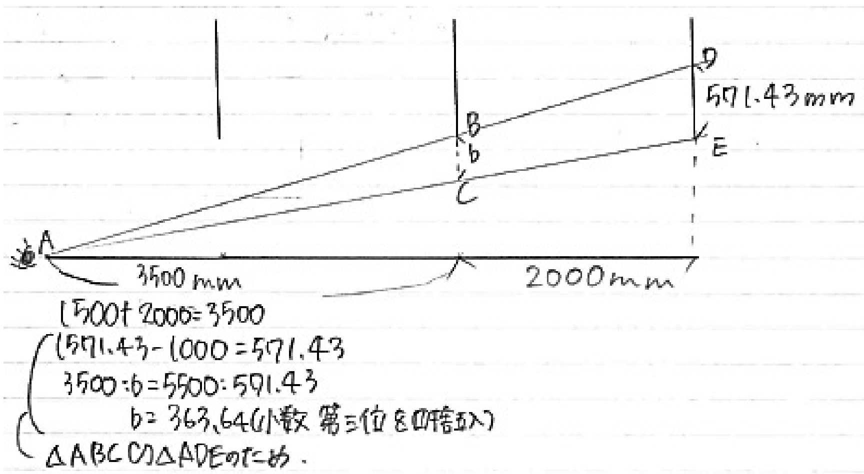


図23：生徒O.Y.のレポート（３枚目の広告の考察）

このレポートからわかるように，2枚目の広告は一番手前の１枚目の広告と同一平面に投影している（**図22**）一方で，3枚目の広告は２枚目の広告と同一平面に投影して算出している（**図23**）。このように，ペアごとは同一平面に投影しているが，すべてを同一平面に投影しなければいけないという理解が不十分な生徒が何人か確認できた。授業の中でもっと工夫した指導が必要だったと反省している。

6. まとめと今後の課題

既述のとおり，本実践は現実事象をもとに，(a)～(d)の４つの力を育むことを目的としている。それらの力を育むことができたかどうかは今後さらに検証を深める必要があるが，すでにそれらの力を備えている生徒も確認できた。これはそのような力が育まれる学習が過去になされており，その成果であると考えられる。やはり，ア・プリオリに備わっている力ではなく，経験させることによって育まれる力であるということであろう。したがって，このような授業を続けていくことで，これらの力の伸長がさらに図れるものと考えられる。このような実践していくことが重要であり，実践に値する教材を作成することが今後の課題である。

注

１）本校で使用しているオリジナルテキスト「TGUISS」の数学２において，次のような探究課題が用意されている。

探求 1 箱ブランコは危険!?

「日本公園施設業協会」は，右のイラストのような箱ブランコを「公共の遊び場にふさわしくない遊具」と認め，製造中止を発表した。全国にこの箱ブランコを撤去する動きが広がっている。

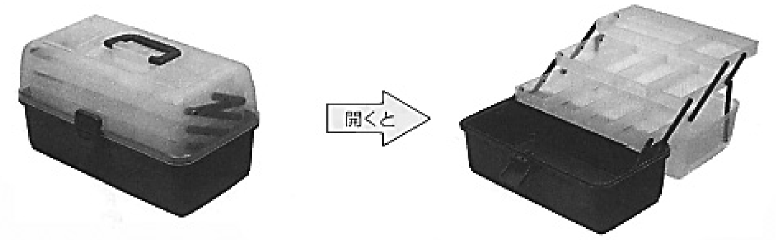
箱ブランコはどのような動きをするのだろうか。そして，どのようなところが危険なのだろうか。

この探究課題を通して，箱ブランコを側面図で表現し，平行四辺形になるための条件を考察する流れとなっている。この学習の中で，支柱や床などを厚みを無視した線分で表現する経験を積んでいる。

２）同じくTGUISS数学２では，次のような探究課題を通して，平行線の性質を学習する流れとなっている。

探求 1 ツールボックスを作ろう

裁縫道具，工具，つり道具などを入れるツールボックスには，使いやすさを考えたものが多く見られる。下の写真のツールボックスは，ふたを開けると中の３段のたなが同時に動くしくみになっている。このようなツールボックスのたなの動き方について調べてみよう。



この学習では，棚が常に平行に動くように棚を接続している留め具の取り付け位置を特定する内容が含まれている。その考察にはツールボックスを横から見た側面図が必要となる。この学習においても側面図が登場している。

参考・引用文献

太田伸也（1997），「生徒に幾何の世界を構成させる図形指導（２）－『写真に写る大きさと距離との関係』を題材に－」，日本数学教育学会誌第79巻第５号

本田千春・西村圭一（2005），「空間思考力の育成をめざす授業に関する研究－地図から風景をスケッチする教材を用いて－」，日本数学教育学会誌第87巻第７号

西村圭一（2001），「数学的モデル化の授業の枠組みに関する研究」，日本数学教育学会誌第83巻第11号

西村圭一（2003），「幾何学化をめざす授業の研究」，日本科学教育学会『科学教育研究』Vol.27，No.3

東京学芸大学附属国際中等教育学校数学教育研究会（2007），『TGUISS数学１』，正進社

東京学芸大学附属国際中等教育学校数学教育研究会（2008），『TGUISS数学２』，正進社

東京学芸大学附属国際中等教育学校数学教育研究会（2009），『TGUISS数学３』，正進社

東京学芸大学附属国際中等教育学校数学教育研究会（2010），『TGUISS数学４』，正進社

道路の横断における安全性と危険性

長野市立柳町中学校教諭　新井　仁

1.　単元名・小単元名（題材名）

「関数 $y=ax^2$」　・　「道路の横断における安全性と危険性」

2.　単元・小単元（題材）設定の理由

生徒は，第１学年で比例や反比例を学習するとともに，変化と対応，変数と変域，座標などの意味を学習し，第２学年では，基本的な関数の代表として一次関数を取り上げ，変化の割合など関数の調べ方を学習した。そして第３学年では，生徒が日常経験する具体的な事象の中から，比例，反比例，一次関数以外の代表として関数$y=ax^2$を取り扱う。この内容を中心として，既習の関数と比較しながら変化の割合やグラフなど関数の特徴をとらえるとともに，事象を関数$y=ax^2$としてとらえることによって，問題解決ができることを学習し，数学の有用性を実感して欲しいと願う。

身の回りで，関数$y=ax^2$でとらえられる事象として，自動車の速度と制動距離の関係が挙げられる。制動距離は理論上自動車の速度の二乗に比例するためである。そこで，自動車の時速と制動距離のデータに基づいて両者の関係をとらえ，さらに停止距離を時速の関数として表現することを試みる。そして，自分が道路を横断する場面を思い浮かべ，近づいてくる自動車の時速を具体的に想定して横断の可否を判断する基準を考えたり，道路をむやみに横断することの危険性を考えたりする授業を構想した。速度が２倍になると制動距離は４倍になり，さらに空走距離を加えると停止距離は想像以上に長くなる結果に，生徒は驚きを感じるだろう。そして，交通安全に対する意識も高まることも期待できる。以上のような理由により，本単元及び小単元（題材）を設定した。

3.　本時に寄せた教材化

（1）　生徒の実態

授業学級の生徒は，これまでに，例えば次のような学習を行った経験がある。

◇１学年「資料の活用」にて，生徒の登校時刻調査を行い，この資料に基づいて朝のあいさつ運動の合理的な方法を検討し，提案した。

◇２学年「一次関数」にて，学級担任の新車両購入に伴い，旧車両と新車両の給油におけるレシートから，それぞれの資料をグラフ化して燃料消費量の様子を分析し，新車両購入によってもたらされる環境保護への効果を明らかにするとともに，環境問題について考えた。

これらは一例であるが，いずれも現実事象から得られた資料に基づいて数学的な処理を行い，問題解決を行った学習である。このように，生徒は日常生活における数学の有用性を，具体的な学習を通して少なからず実感してきており，その手法や基本的な考え方もある程度身につけてきている。

（2）　素材とその分析

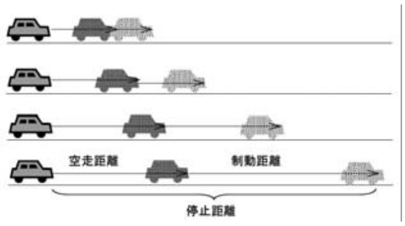


図 1

自動車の停止距離とは，自動車を停止しようと考えてからブレーキを踏むまでに走る「空走距離」と，実際にブレーキを踏んでから停止するまでの「制動距離」の和で得られる（**図 1**）。当然，速度が遅ければすぐ止まるが，速度が速ければ急ブレーキをかけてもすぐには止まらない。この空走距離と制動距離は，一般に次の式で求められる。

（空走距離）＝（反応時間[秒]）×（制動前の秒速[m／秒]）

（制動距離）＝（制動前の時速[km／時]$)^2$÷（254×摩擦係数※）<※**表 1** 参照>

空走距離とは，運転者が①危険を感じて急ブレーキが必要と判断した時点から，②アクセルペダルから足を動かし（反射時間0.4～0.5秒），③ブレーキペダルに足を乗せ（踏み替え時間0.2秒），④これを踏み込んでブレーキが効き始める（踏み込み時間0.1～0.3秒）時点までに走行する距離である。この間の制動措置を取るまでに要する時間を反応時間といい，個人差はあるが，平均的な反応時間は通常0.75秒とされている。

表 1　路面・タイヤ状況と摩擦係数

路面　／　タイヤ	摩擦係数
乾いたアスファルト･コンクリート／タイヤ良好	0.8
乾いたアスファルト･コンクリート／タイヤ普通	0.7
乾いたアスファルト･コンクリート／タイヤ摩耗	0.6
濡れたコンクリート	0.5
濡れたアスファルト	0.45～0.6
砂利道路	0.55
乾いた非舗装道路	0.65
濡れた非舗装道路	0.4～0.5
氷	0.07

そこで，反応時間0.75秒，時速$x$kmとして空走距離を求める式を整理すると，

（空走距離）＝0.75×（x×1000÷3600）≒0.21x

となる。つまり「（空走距離）＝0.21x」なので，空走距離は時速に比例するとみることができる。

また，乾いたアスファルトでタイヤが普通の場合の摩擦係数は0.7なので，このときの制動距離を求める式は，（制動距離）＝x^2÷（254×0.7）≒0.0056x^2となる。つまり「（制動距離）＝0.0056x^2」なので，制動距離は時速の2乗に比例する関数とみることができる。

（空走距離）＝0.21×50＝10.5m
（制動距離）＝0.0056×50^2＝14m
（停止距離）＝（空走距離）＋（制動距離）
　　　＝10.5＋14＝24.5m

ちなみに，導き出された式によれば，例えば時速50kmの場合は右のような結果になる。

表 2 は，ある自動車の時速と空走距離，制動距離を示している。この表から，自動車の時速と制動距離の関係をグラフに表すと，**図 2** のようになる。**表 2** の資料に基づいて点をプロットすると散布図が得られるが，

表 2

時速（km／時）	制動距離（m）
0	0
20	2.3
25	3.8
30	5.6
35	7.4
40	9.7
⋮	⋮
70	29.5
80	38.7

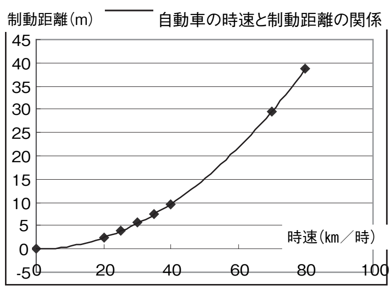


図 2

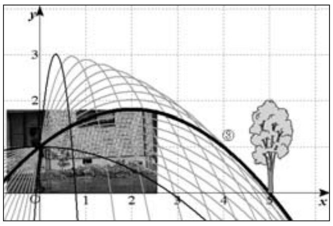
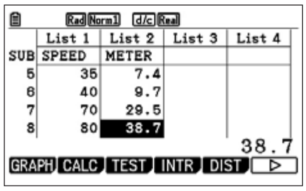
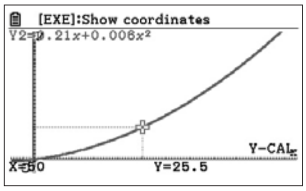
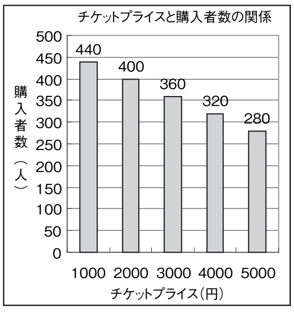
表の数値を観察したり，点の配列の様子を観察したりすることから，自動車の制動距離は時速の２乗に比例するととらえられそうだということがわかる。そこで時速$x$km，制動距離ymとして放物線で回帰したグラフ（二次回帰グラフ）を求めると，かなり高い精度で$y=0.006x^2$という式が得られる。

（３）　教材化

通学区が市街地にある本校の生徒にとって，交通量の多い道路を横断する場面は身近なことである。また，1学期に交通安全指導を行ったこともあり，自動車の速度と停止距離に関心をもつ生徒も多いだろう。しかし，時速と停止距離を単純に取り上げても，両者の関係を調べるだけで終わる可能性が高い。そこで，自分が道路を横断する場面を思い浮かべ，近づいてくる自動車の時速を具体的に想定して横断の可否を判断する基準を考えたり，道路をむやみに横断することの危険性を考えたりすることで，法定速度決定の背景なども見えてくるのではないかと考えた。そして，交通安全について考えを深められることにも期待したい。

なお，停止距離は空走距離と制動距離の和なので，基本的には$y=ax^2+bx$の形で得られるが，中学校での学習内容は$y=ax^2$に限られる。しかし，時速と制動距離について考察した後に空走距離を加えることによって，停止距離を得るようにする。そして，最終的には$y=ax^2+bx$の形の式とグラフを取り上げ，事象を１つの式で表すことの都合よさも実感できるようにしたい。

4.　単元の展開（全12時間）

学習活動	学習内容	時間
（1）　放水の数学　～5m先の植木に水を与えるための方法～		2
○ホースで水をまくときの水の軌跡を観察することを通して，放物線の特徴をとらえる。 	・事象の中から二乗に比例する量を見いだし，式に表すこと。 ・$y=ax^2$の式を求めたり，$y=ax^2$の特徴をとらえてグラフをかいたりすること。 ・$y=ax^2+bx+c$について，a，b，cの値を変化させたときのグラフの変化の様子を観察し，両者の関係を調べるとともに，グラフの増減や変域など，その特徴をとらえること。	
【問題演習】		1
（2）　停止距離の数学　～道路の横断における安全性と危険性～		
○停止距離を時速の関数としてとらえ，近づいてくる自動車の時速に応じて，横断の可否を判断する基準や横断することとの危険性を考える。 ○自転車の場合に置き換えて，自転車に乗るときの安全確保について考える。	・自動車の制動距離について考えること。 ・関数$y=ax^2+bx$を利用して，具体的な問題を解決すること。 ・数学的に導き出した結果に基づいて，現実事象について考察し，判断すること。   	2【本時第1時】
【問題演習】		1
（3）　チケットプライスの数学　～できるだけ多くの収益金が得られる価格設定～		2
○チケットプライスとチケット購入者数の数量関係から，収益金についてのグラフや式を作成し，数学的根拠に基づいて目的に応じた価格設定を検討する。	・一次関数でとらえた事象から，$y=ax^2+bx+c$の式を導き出し，グラフで表すこと。 ・グラフの特徴を読みとり，グラフを問題解決の道具として利用すること。 ・導かれた二次方程式を解くこと。  	
【問題演習】		1
（4）　いろいろな関数		2
○様々な現実事象の考察を通して，これまでに学習した関数以外にも様々な関数があることを知る。	・グラフが階段状になる関数について，グラフの特徴を調べたり，値の変化を調べたりすること。 ・指数関数，２乗に反比例する関数，べき乗関数について，値の変化を調べること。	
【総まとめ評価問題】		1

5. 本時案

（1） 授業の目標

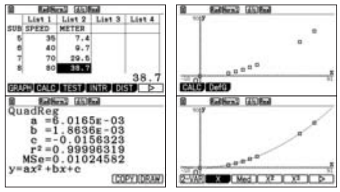
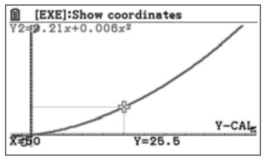
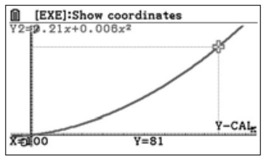
自動車の時速と停止距離の関係を調べる場面で，資料を散布図に表して観察することを通して，制動距離は時速の２乗に比例する関数としてとらえられることに着目し，停止距離を求める式を導き出して，近づいてくる自動車の速度に応じて横断の可否を判断する基準を考えたり，むやみに道路を横断することの危険性について数学的根拠に基づいて明らかにしたりすることができる。

（2） 展開

<table>
<tr><th colspan="2">段階</th><th>学習活動</th><th>予想される生徒の反応</th><th>◇教師の指導・援助 評価
※個に応じた指導</th><th>分</th><th>備考</th></tr>
<tr><td rowspan="4">課題把握</td><td>興味をもつ</td><td>1 映像を見て自動車の停止距離に興味をもつ。</td><td>ア 横断中の人，危ない！
イ 自動車の速度が遅ければ運転者が歩行者に気づいて止まってくれそうだけど，速ければすぐに止まれそうになくて危ない。
ウ 近づいてくる自動車の速度によって，道路を渡るかどうかの判断は変わる。
エ 自動車の速度と停止距離の関係がどのようになっているのか調べなければ，はっきりしたことはわからない。</td><td>◇自動車が急ブレーキをかけたときの映像を見せる。

◇「道路を渡ろうとしたときに自動車が近づいてきた場合，どの程度離れていたら渡ろうとするか？」と問いかける。
◇自動車の時速と停止距離，空走距離，制動距離について簡単に説明して，エのような発話を拾いながら問題を提示する。</td><td>3分</td><td>映像資料
モニター</td></tr>
<tr><td rowspan="3">問題をつかむ

見通しをもつ</td><td rowspan="3">2 問題を確認する。</td><td colspan="2">《問題》右の表は，自動車の時速と制動距離の資料です。この資料を参考にして，道路を横断しようとしたときに自動車が近づいてきた場合，自動車の速度に応じて，自動車からどれくらい離れていれば安全に横断できるか判断してみましょう。なお，時速$x$kmの時の空走距離は$0.21x$mになることはわかっています。
<table><tr><th>時速（km／時）</th><th>制動距離（m）</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>20</td><td>2.3</td></tr><tr><td>25</td><td>3.8</td></tr><tr><td>30</td><td>5.6</td></tr><tr><td>35</td><td>7.4</td></tr><tr><td>40</td><td>9.7</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>70</td><td>29.5</td></tr><tr><td>80</td><td>38.7</td></tr></table></td><td>4分</td><td>模造紙
資料</td></tr>
<tr><td>オ 時速が速くなれば，制動距離が長くなっている。
カ 時速が２倍になっても，制動距離は２倍以上になっているから，比例関係ではない。
キ 時速が２倍になると，制動距離は約４倍に近い。制動距離は時速の２乗に比例していそうだ。
ク 時速と制動距離の資料を散布図に表せば，両者の関係を表す式が得られて，停止距離を求める式が求められるはずだ。</td><td>◇必要に応じて，表から具体的な数値を取り上げて考えさせる。
◇（停止距離）＝$0.21x$＋（制動距離） となることを示し，制動距離をxの式で表せば，停止距離を求める式が得られることを確認する。
◇キ・クの発想を取り上げて，学習課題をすえる。
資料から回帰グラフを求めれば，予測や判断ができそうだと認める。
※見通しがもてない生徒には，散布図に表すことの意味を教える。</td><td></td><td>ワークシート
グラフ
関数電卓
プロジェクター</td></tr>
<tr><td colspan="2">《課題》時速$x$kmのときの停止距離をymとしてyをxの式で表し，時速に応じて安全に横断できる判断の基準を明らかにしよう。</td><td></td><td></td></tr>
</table>

追究	実践1	3　時速$x$km，停止距離ymとして，yをxの式で表し，予測結果をまとめる。	(a) グラフ関数電卓に時速と制動距離の資料を打ち込んで散布図をつくり，時速$x$kmのときの制動距離を表す式を求める。 (b)　空走距離を表す式（$0.21x$）と制動距離を表す式の和によって，y（停止距離）をx（時速）の式で表す。 ケ　散布図は，点がほぼ放物線状に並んでおり，制動距離はおよそ$0.006x^2$で得られる。 コ　停止距離(y)は，空走距離($0.21x$)と制動距離($0.006x^2$)の和だから，$y=0.21x+0.006x^2$という式になる。 サ　$y=0.21x+0.006x^2$のグラフに基づいて停止距離を調べると，次のようになる。	◇必要があれば，グラフ用紙を配る。 ◇グラフ関数電卓の操作で戸惑っている生徒には，個別に指導する。 ◇自力である程度予測結果が得られた場合には，近隣の生徒と比較したり相談したりしてもよいことを伝える。 ◇生徒が説明する内容に応じて画面を提示し，発表を補助する。  ◇$y=0.21x+0.006x^2$のグラフを用いて停止距離を求めたグラフ関数　電卓の画面を提示する。	25分	グラフ用紙 fx-CG20
	実践2	4　道路を横断することの安全性について考える。	シ　時速50kmでも停止距離は25.5mになる。プールよりも長い。 ス　時速100kmだと停止距離は81mになる。意外と長くて驚いた。時速が2倍になっても，停止距離は2倍よりはるかに長くなる。 セ　例えば，自動車が時速50kmで近づいてくるとしたら，停止距離は25m以上だから，少なくとも30m程度離れていないと，道路の横断は危険だろう。 ソ　時速が少し速くなっただけで，停止距離は格段に長くなる。時速50km以上で走る自動車なんてたくさんあるから，やたらと道路を横断するのは危険だ。 タ　法定速度は，危険回避のために決められているのだろう。運転者には守ってもらいたい。	  ◇可能な限り個々の生徒に実際にグラフ関数電卓を操作させ，様々な時速の場合を想定して調べさせ，考えさせたい。 ◇改めて，道路を安全に横断するための判断基準や，道路をむやみに横断することの危険性，法定速度などについて考えてみるように促す。 <板書計画>　学習課題 学習問題　(a)　(b) ○追究の見通し　その他追究の様子	10分	グラフ関数電卓の画面 
	確認	5　本時の追究結果を確認する。	チ　散布図に表すと，時速と制動距離の関係をとらえて式をつくることができ，道路の横断における危険性を考えることができた。 ツ　資料を基に判断したり考察したりするには，関数を使うと都合がよい場合があることがわかった。	◇事象を関数$y=ax^2$でとらえて，具体場面について考察する方法をまとめる。 散布図の点の並び方から関数関係をとらえることの有効性を述べる。 ※時速と制動距離の間に2乗に比例する関数関係があると認めたことを説明する。	5分	

まとめ	6 学習内容を振り返る。	テ F１カーの速度はかなり速いから，停止距離もすごく長くなるはずなのに，この問題を改善する技術はすごいものだ。 ト 身の回りには，関数関係が成り立つものとして考察できることが結構ありそうだ。	◇資料「F１カーの停止距離」を配布して，生徒の興味・関心を高めながら本時の追究を振り返る。 ◇次時は身近な自転車の運転に置き換えて，自分が自転車を運転する場合の安全確保について考えることを伝える。	3分	プリント

6. 授業の実際と考察

（1） 授業の実際［生徒の具体の姿を窓口として］

1）時速と制動距離の関係を散布図に表し，放物線のグラフになりそうだと見通しをもったN生

時速$x$kmにおける空走距離は0.21xmになることから，空走距離は時速の一次関数になると理解していたN生は，制動距離も空走距離と同じような増え方（一次関数）だろうと漠然とイメージしていたようだった。しかし，表で与えられた時速と制動距離の数値を見ると，制動距離は時速に対して一定の割合で長くなっているのではないことに気づいた。そこでN生は，時速と制動距離の関係をとらえるために，**表２**で与えられた数値をグラフ関数電卓に入力し，散布図を表示させて観察した（**図３**）。

散布図をスケッチしながら考えている様子を見ながら，教師はN生と次のように対話した。

教師１	時速と制動距離の関係は，どのようにとらえましたか？
生徒１ [N生]	最初，点は直線状に並ぶだろうと思ったのですが，数値を見るとそうでもなさそうだったので，とりあえず（グラフ関数電卓を使って）散布図にしてみました。
教師２	散布図の最初の方※1を見ると，直線状になっているように見えますが，直線ではいけないのですか？
生徒２ [N生]	確かにそう見えますが，時速が速い方まで含めて全体※2を眺めると，直線というよりも曲線という感じもします。
教師３	曲線といっても，どんな曲線になるのでしょうか。
生徒３ [N生]	たぶん放物線だと思うけれど…どうすれば放物線だと言い切れるか…

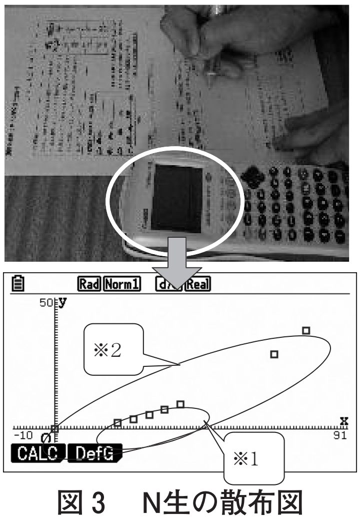


図３ N生の散布図

その後N生は，最初に与えられた数値を見直しながら，時速が２倍になると制動距離は約４倍になることに気づき，制動距離は時速の２乗に比例する関数だと考えてよさそうだと判断した。これにより，散布図の点の配列は放物線だと考え，放物線で回帰して関係を表す式を求めた。

N生は，時速が速くなれば制動距離も長くなるということは容易に予想して散布図を作成した。点の配列から曲線のグラフと考えられそうだと判断した後，教師の問いかけに基づいて「放物線になるとしたら，数値としてどのようなことがいえるか」ということを考え，制動距離は時速の２乗に比例するものととらえた。点の配列による図形的な印象だけで終わるのではなく，数値としての根拠を明らかにしようとした姿が伺える。

２）時速の増え方と制動距離の増え方について論議するH生とA生

H生は，数値の並び方を観察し，時速が２倍になると制動距離は約４倍になり，時速がさらに２倍になると制動距離もさらに約４倍になるととらえた。これは，時速が４倍になると制動距離は約16倍になることを示しており，自ら表にも書き加え，このことから放物線のグラフになると判断した。しかし，「スピードの遅いときは制動距離もみじかいけどスピードが速くなるにつれて制動距離も長くなっている」と記述するにとどまり（**図４**），数値では事象を正しくとらえていながら，言語では充分に表現し切れていない様子が伺える。そこで教師が空走距離と制動距離の増え方について問いかけると，隣にいたA生も交えて次のような対話となった。

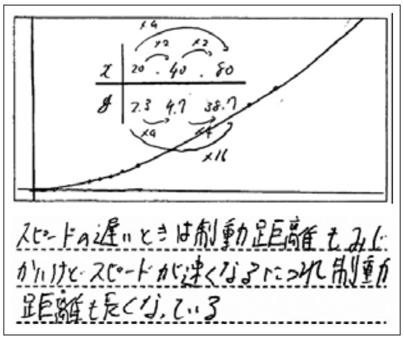


図４　H生の記述

教師４	制動距離の増え方は，空走距離と同じですか？
生徒４ [H生]	スピードが遅ければ制動距離は短く，速ければ長くなるというところは，空走距離と制動距離の増え方は同じような感じだと思います。
教師５	［隣にいたA生の記述（**図５**）を見ながら］Aさんも同じようなグラフ（散布図）をかいていますが，増え方についてはちょっと違う説明をしていますね。
生徒５ [A生]	点の並び方を見ると，最初の方（時速が遅い方の制動距離）はゆったりした感じに斜めになっているけれど，（時速が速くなるにつれて）斜めの感じがだんだん急になっているように見えます。
生徒６ [H生]	そうそう，そういうこと。僕も同じことを言いたいのだけれど，うまく言えなくて…。スピードが速くなると，制動距離は一段と長くなるという感じです。
教師６	なるほど。こういう増え方，どのような言葉で説明すれば正しく伝わるでしょうか？

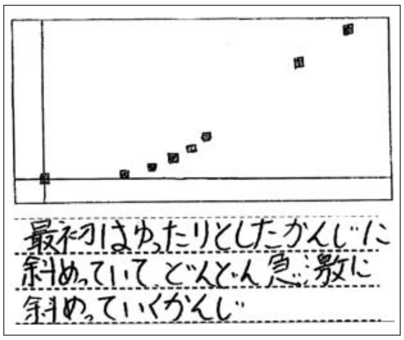


図５　A生の記述

H生は，数値の配列から制動距離は時速の２乗に比例するものととらえている様子が伺えるのだが，言語表現においては「２乗に比例する」とか「変化の割合」などの言葉を使うことができず，要を得ていない。

一方A生は，点の配列から制動距離の増え方がだんだん激しくなっていると考えられることを述べており，増加の仕方の特徴をとらえているが，これは点の配列から受ける印象のみで語っているものと考えられる。

教師の問いかけに基づいてグラフを見直す生徒

H生は数値からグラフが放物線になることの根拠を導き出しておきながら，放物線になることの説明において，導き出した根拠を十分に使っておらず，説明の要を得ていない。これは，表現力の高まりが不十分である実態を示している。また，教師とH生との対話に加わったA生は，散布図による点の配列から得た図形的な印象だけで状況を漠然ととらえており，数学的な根拠の所在はあいまいであった。この２名の生徒は，いずれも根拠に基づいた的確な表現が不十分だったが，全体追究においてそれぞれの考えを補完し，状況を正しく把握するに至った。

3）数学的結論に基づいて現実事象を語る生徒

追究により，時速$x$kmにおける制動距離はおよそ$0.006x^2$mになることを導いた後，停止距離ymは空走距離と制動距離の和で求められることから，$y = 0.21x + 0.006x^2$で得られることを確認し，学級全体での追究に入った。生徒は，数学的結論を現実事象に戻して考え，道路の横断における安全性と危険性について語り合った。

考えを発表するM生

生徒７ [S生]	時速100kmの時には，停止距離が81mだということになります。グラフを見ると，いくら車が遠くに見えていて安全だと思っても，スピードが速ければ止まるまでに長い距離が必要なので，道路をむやみに横断するのは危険だなと思いました。
生徒８ [F生]	通学するときに，「これくらいなら大丈夫だろう」と勝手に判断して道路を渡ることもあるけれど，時速50kmだとしても停止距離はおよそ25mで，そのくらいのスピードの車はたくさんあるから，気をつけなければいけないと思いました。通学カバンを持っていれば車にぶつかっても多少クッションになるかもしれないけれど，そもそも信号がある横断歩道や歩道橋を使って横断するように心がけたいです。
教師７	通学カバンがクッションになるとは…危険ですね。M君はどうですか？
生徒９ [M生]	僕は，登校するときに長野大通りを横断します。横断歩道の所まで行くと遠回りになるので，「これくらいだったら大丈夫だろう」と勝手に判断して，いけないことだとは思いつつ横断してしまうことがあります。車のスピードが速ければ危ないので，気をつけたいです。でも，車が見えなければ，だいたい大丈夫だろうと思うけれど…
生徒10 [I生]	時速40kmでも停止距離は18mだから，20mくらい離れていれば大丈夫だと思うけれど，運転者が歩行者に気づくかどうかはわからないし，20mも離れていれば運転者はブレーキを踏まないかもしれないから，やっぱりむやみに道路を横断することは危ないと思います。

（２）　授業の考察

１）ワークシートへの生徒の記述から

A生は，学習感想を右のようにまとめた(**図６**)。運転者の対応も無視できないことを述べながら，数学を使って道路横断の安全性と危険性について考えられたことに感激している。教師とH生との対話に加わり，漠然とした印象で済まされずに，数学的根拠を明らかにした結論を導くことができたことによって，数学の有用性を実感したものと考えられる。なお，「あのおば(じ)さん」とは，授業冒頭で流した動画（道路を横断する年配の方が危うく車に接触しそうになる場面を撮影したもの）に登場した人物のことである。

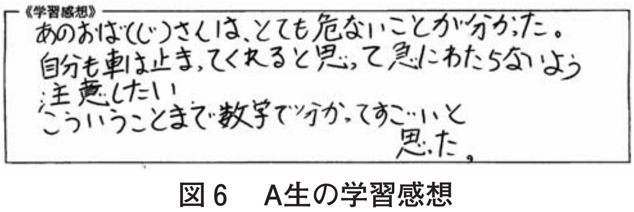

《学習感想》
あのおば(じ)さんは，とても危ないことが分かった。
自分も車は止まってくれると思って急にわたらないよう
注意したい
こういうことまで数学で分かってすごいと
思った。

図６　A生の学習感想

また，Y生は，学習感想を右のようにまとめた(**図７**)。停止距離に基づいて道路の横断における安全性を考えられたことの価値を認めており，日常生活における数学の有用性に気づいている様子が伺える。

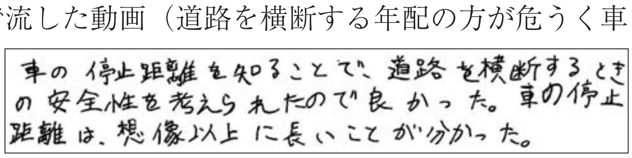

車の停止距離を知ることで，道路を横断するとき
の安全性を考えられたので良かった。車の停止
距離は，想像以上に長いことが分かった。

図７　Y生の学習感想

２）K生の学びの様子から

冒頭のK生は，決して数学が得意な生徒ではない。しかし，自ら散布図を作成して観察したり，友の発表を参考にしたりしながら結論を導き，追究を深めた。日頃の生活を振り返って道路横断における安全性と危険性について持論を述べ，さらに授業の最後に紹介したＦ１カーのブレーキ性能にまで興味を示している。数学の授業において，数学を使いながら，いつしか数学以外のことで論議する様子は，生徒が数学の有用性を実感している授業であることを示しているものと考えられる。

7. 結語と今後の課題

数学の問題の解き方を説明するようなことも表現力の一つだろう。しかし，生活経験上解決が必要となる対象について，数学を使って解決を試み，新たな数学を獲得しながら使った数学を根拠として主張できる力まで，表現力の質を高めたい。生徒が思いを巡らせ，日常生活と関連付けながら豊かなイメージを生み出す授業を具体化し，導いた数学的結論に基づいて語り合う授業を追い求めると，それは自然に学問の有用性に触れることになり，「敬愛の心」の具現につながるものではなかろうか。

なお，本実践では歩行者である生徒の立場から考察したが，運転者の立場から考察すれば，違った視点で結論を導き出すことが期待できたと思われる。これについては今後の課題としたい。

いずれにしても，魅力ある教材の開発に基づいた授業実践が何よりも大切であろう。

『生かす数学』における最小二乗法の扱いに関する再検討

山梨大学教育人間科学部准教授　清野辰彦

1. はじめに

『生かす数学』（杉山吉茂代表，2007）は，身の回りの問題を定式化して数学的モデルを作成し，数学的処理により数学的結論を導きだし，そしてその結論を元の事象に対して解釈・評価し，結論が不適切，不十分な場合，考察を続けるという所謂，数学的モデル化過程[1)]（三輪辰郎，1982）を重視して作成された教科書である。また，グラフ関数電卓等のテクノロジーを積極的に活用することを意図して作成された教科書である。

グラフ関数電卓を積極的に活用することは，時間と労力の軽減につながるとともに，問題解決の仕方も広がるという利点がある。なぜなら，グラフ関数電卓では，多数の「生のデータ」を表に入力すれば，瞬時に散布図を描くことができるからである。また，描いた散布図を基にデータの傾向を捉え，回帰直線や回帰曲線を容易に描くことも可能である。グラフ関数電卓を用いることによって，定式化への接近の仕方も変わってくるのである[2)]。

現実事象の数理的な考察において，グラフ関数電卓は，有用な探求の道具，学習の道具になる。それ故，より豊かな学習を行っていくためにも，グラフ関数電卓を積極的に活用していくことは望ましいと考える。だが，グラフ関数電卓を学習指導に位置づけていった場合，新たに考えなければならない問題も出てくる。その１つが，回帰直線を求める方法として，どのような方法をどの程度まで授業において扱うのかという問題である。

グラフ関数電卓を用いて回帰直線を求める場合，一般的に用いられている方法が，最小二乗法である。この方法は，回帰曲線を求める際にも用いることができる汎用性の高い方法である。それ故，最小二乗法の基本的な考え方をより早期に扱いたい。だが，最小二乗法は，複雑な計算を必要とするため，早期に導入するならば，扱い方の程度を熟慮するとともに，その学習指導について明確にする必要がある。

『生かす数学』では，「中学２年」において，データに対して，最小二乗法による回帰直線を引き，予測するという活動が想定されているが，その際，最小二乗法には触れられていない。最小二乗法による回帰直線の意味と求め方について扱われるのは，「高校数学Ⅰ，数学SA」である。本稿では，最小二乗法を扱う学年について再考するとともに，最小二乗法の基本的な考え方を理解させ，価値のある学習にするための指導について考察する。この視点は，テクノロジーを学習指導に積極的に位置づけた際の検討事項の１つになると考えられる。

本稿の目的は，実験データや統計データの回帰分析を行う際に重要となる最小二乗法の基本的な考え方の理解を目指した学習指導について考察するとともに，『生かす数学』における位置づけを検討することである。

2. 最小二乗法を用いた回帰直線の生成

最小二乗法を用いた回帰直線の生成について述べる。なお，以下で示す記述は，中学生を対象とした記述ではない。

N個のデータ（x_1, y_1），（x_2, y_2），…，（x_n, y_n）に対して，最小二乗法を用いて回帰直線を求めるとする。いま，実測値と予測値との差を「残差」と呼び，求めたい回帰直線を$y=ax+b$とする（**図１**）。

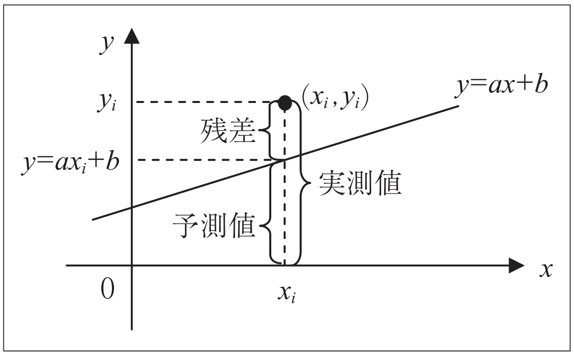


図１　実測値と予測値と残差の関係

（x_i, y_i）に対する残差をd_iとすると，$d_i=y_i-(ax_i+b)$と表すことができる。これらの用語を用いると，最小二乗法とは，実測値と予測値との差である残差の二乗の和を最小にするa, bの値を求める方法となる。換言すれば，$\sum_{i=1}^{n} d_i^2=\sum_{i=1}^{n}\{y_i-(ax_i+b)\}^2$を最小にする$a$, bを求めて，回帰直線を決定する方法である。

$\sum_{i=1}^{n} d_i^2$をQとする。この関数が最小値をとる点では，各変数に関する偏導関数が０でなければならない。よって，$\frac{\partial Q}{\partial a}=0\cdots①$, $\frac{\partial Q}{\partial b}=0\cdots②$となる。

$$①より，\frac{\partial Q}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i-ax_i-b)=0\cdots③$$

$$②より，\frac{\partial Q}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)=0\cdots④$$

$$④より，\sum_{i=1}^{n} y_i-a\sum_{i=1}^{n} x_i-b\sum_{i=1}^{n} 1=0.$$

よって，$n\bar{y}=an\bar{x}+bn$両辺をnでわると，$\bar{y}=a\bar{x}+b\cdots⑤$が得られる（$\bar{x}$, $\bar{y}$は，平均の記号である）。このことは，最小二乗法によって求めた回帰直線が，必ずそれぞれのデータの平均値を通ることを意味している。

$$③より，\sum_{i=1}^{n} x_iy_i-a\sum_{i=1}^{n} x_i^2-b\sum_{i=1}^{n} x_i=0\cdots⑥$$

$$⑥のbに⑤を代入すると，\sum_{i=1}^{n} x_iy_i-a\sum_{i=1}^{n} x_i^2-(\bar{y}-a\bar{x})\sum_{i=1}^{n} x_i=0\cdots⑦$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} x_iy_i-a\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i+a\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i=0$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} x_iy_i-a\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\sum_{i=1}^{n} x_i+\frac{a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2=0$$

$$\therefore a=\frac{n\sum_{i=1}^{n} x_iy_i-\sum_{i=1}^{n} x_i\sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\cdots⑧$$

xの分散は，$\sigma_x{}^2=\dfrac{n\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{n^2}$と表現でき，$x$，$y$の共分散は，

$\sigma_{xy}=\dfrac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n^2}$と表現できるので，⑧は，$a=\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x{}^2}$…⑨と表現できる。

また，⑤より，$b=\bar{y}-a\bar{x}=\bar{y}-\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x{}^2}\bar{x}$であるから，$y-\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x{}^2}x+\bar{y}-\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x{}^2}\bar{x}$..

故に，求める回帰直線は，$y-\bar{y}=\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x{}^2}(x-\bar{x})$である。

3. 先行研究における最小二乗法の指導の分析

現実事象の数理的な考察において，グラフ関数電卓を用いて，最小二乗法による回帰分析を行い，学習を展開している先行研究は少なくない（例えば，大澤（1996），西村ら（1997），大澤（1998），植野（1999），Maxら（2001），佐伯ら（2003a），佐伯ら（2003b），西村（2005），新井（2006），新井ら（2010））。これらの先行研究に関し，最小二乗法の扱いについて分析した。だが，最小二乗法の考え方に関し，どのように，どの程度学習したのかについては，明記されていなかった。

最小二乗法は，**2．**で示したように，複雑な内容と表現を含んでいる。それ故，グラフ関数電卓を用いて，最小二乗法による回帰直線を引く際，最小二乗法の考え方について触れられない場合が多い。特に，中学校段階においては，その傾向が強い。また，触れたとしても，その内容について踏み込んで学習することはほとんどない。

だが，最小二乗法を用いて回帰直線を求める活動を重視していくならば，最小二乗法の基本的な考え方については，理解する必要があると考える。Zelkowskiら（2008）も，下記に示すように，筆者と同様な考えを述べている。

> 「最小二乗法は，我々が日常生活において使用するモデルを創り出す際に，用いることができる強力で適用範囲が広い統計的な道具である。しかし，しばしば，『ブラックボックス』として教えられる。つまり，生徒は，その方法の背後にある概念を理解することなしに，電卓のボタンを押したり，モデルを得たりしている。もし，生徒がその概念を用いるならば，少なくともインフォーマルで直観的な理解を持たなければならない」（p.47）

本稿における最小二乗法の基本的な考え方の理解とは，二乗することの意味理解（１つのはずれ値によって大きな影響を受ける），具体的な残差に対して，その二乗の和を最小にする方法の理解である。なお，線形回帰を推定する際，最小二乗法を用いてよいことの理論的根拠（例えば，ガウス＝マルコフ定理など）に関する理解は含まない。

次に，最小二乗法の基本的な考え方について，どのように学習していくことが可能であるのかを考察している先行研究に焦点をあて，その要点を整理する。

Vonder Embse（1997）は，最小二乗法による回帰直線は，残差の二乗の和を最小にする直線であることを踏まえた上で，**図２**のように，図形ソフトを用いて，試行錯誤しなが

ら回帰直線を探し求める学習活動を構想している。

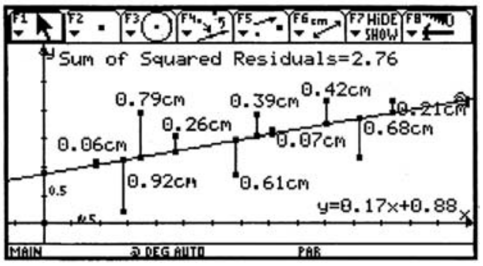


図２　試行錯誤による回帰直線の特定

生徒たちは，画面上にある直線を動かしながら，残差の二乗の和が最小になる場合を探すとともに，別の機能を用いて特定していた最小二乗法による回帰直線と見出した直線を比較する活動を行うのである。また，回帰直線を特定した後，説明変量（x）と目的変量（y）の平均値（$\bar{x}$，$\bar{y}$）をグラフ上にとり，その位置について気づくことはないかを尋ね，平均値が，回帰直線上にあることに気付かせようとしている。

Vonder Embseの最大の特徴は，試行錯誤しながら，残差の二乗の和が最小になる直線を実際に求めている点である。だが，最小二乗法の基本的な考え方の理解という点から考えたとき，残差の二乗の和の表示を見ながら，その値が最小になる直線を探し出す作業に，価値を見出すことができない。生徒は，これまでの学習において，データに対して適合すると思われる直線を目分量で引いてきている。最小二乗法による回帰直線のよさの１つは，目分量ではなく，数学的根拠に基づいて１つの直線を決定できる点にある。そのよさを生徒たちに感得させることが重要となるが，上述した方法では，感得することが難しいと考えられる。

また，平均値（$\bar{x}$，$\bar{y}$）が，回帰直線上にあるという特徴は，興味深いことであるため，生徒に気付かせることは価値がある。だが，ただ気付かせることで活動は終えている。事実に気付かせるだけでなく，その事実を活かした活動を考えたい。

Lesser（1999）は，説明変量をx，目的変量をy，求める回帰直線を$y=a+bx$とした時，$\sum[y_i-(a+bx_i)]^2$を最小にするaとbを求めたいが，2つの変数a，bを含んでいるために，生徒にとって求めることが難しいとして，Vonder Embse（1997）のアイディアを引用している。そのアイディアとは，回帰直線が平均値（$\bar{x}$，$\bar{y}$）を通るというアイディアである。この考えを基にすると，求める回帰直線は，$y=(\bar{y}-b\bar{x})+bx$と表すことができるため，問題は，$\sum[y_i-((\bar{y}-b\bar{x})+bx_i)]^2$を最小にする$b$を求める問題へと変容させることができる。つまり，変数を１つ減少させ，問題の困難性を軽減しているのである。
$\sum[y_i-((\bar{y}-b\bar{x})+bx_i)]^2$を展開し，$b^2$の項，$b$の項で整理すると，
$b^2[(\sum x_i^2)-n(\bar{x})^2]-2b[-n\bar{x}\bar{y}+(\sum x_iy_i)]+\sum(y_i-\bar{y})^2$となる。この式を平方完成すると，$b$の値が求まり，$a=\bar{y}-b\bar{x}$より$a$も求まると述べている。

Lesserの特徴は，最小二乗法による回帰直線が平均値($\bar{x}$，$\bar{y}$)を通るという内容を活用し，２変数を含む$\sum[y_i-(a+bx_i)]^2$の最小値問題を１変数の最小値問題に変容させている点である。また，二次関数の最小値を求める際に行う平方完成を積極的に行っている点も特徴である。だが，我が国のカリキュラムの現状を考えると，「Σ」を用いた処理が含まれているため，高等学校２年生以上でなければ，上記の方法を行うことはできない。グラフ関数電

卓を用いて学習を行っていく出発点となる中学生にとって，適当な内容と表現に変えることが課題である。

Burkeら（2007）は，説明変量をx，目的変量をyとした際に，最小二乗法による回帰直線の式を$y=mx+b$ではなく，$y=m(x-\bar{x})+k$と表現し，生徒がmとkを探求する展開を構想している。その理由は，生徒に回帰直線が平均値$(\bar{x},\ \bar{y})$を通ることを見出させるためである。実際に生徒が活動を行う際には，グラフ関数電卓の表計算機能を用いる。その活動の際，２つの活動を想定している。１つは，Vonder Embse（1997）と同様に，試行錯誤によって，mとkを求める活動である。もう１つは，平方完成を用いる活動である。具体的には，mの値を例えば0.5にし，7つの実測値に対して，残差の二乗の和を求め，kに関する二次式を得る。そして，その式を平方完成し，最小となる際のkの値を求め，その値が，$\bar{y}$になっていることを導くのである。また，7つの実測値に対する残差の二乗の和，つまり$\sum_{i=1}^{7}\{y_i-(mx_i+k)\}^2$を$m$と$k$の式で表し，それぞれを平方完成して，最小となる$m$と$k$の値を求めている。

Burkeらの特徴は，最小二乗法による回帰直線の式を$y=mx+b$ではなく，$y=m(x-\bar{x})+k$と表現し，探求を行っている点である。これは，回帰直線が平均値（$\bar{x}$，$\bar{y}$）を通ることの発見につながる可能性があるが，なぜ，わざわざ直線を$y=m(x-\bar{x})+k$と表すのかについては，生徒には伝わらないであろう。

もう一つの特徴は，具体的な実測値に対して，残差の二乗の和を文字を用いて表現し，得られた二次式に対する代数的な処理を施している点である。この点が参考になる。なぜなら，最小二乗法にはじめて触れる中学生に対して，最小二乗法の基本的な考え方の理解を目指したとき，N個のデータに対する回帰直線を考察する必要はないと考えるからである。中学生では，数個の具体的なデータに対して考察を行い，「Σ」を用いることができる高等学校において，N個のデータを対象とした考察を改めて行えばよいと考える。

4. 『生かす数学』における最小二乗法の扱い

『生かす数学』では，最小二乗法による回帰直線の意味と求め方について，「高校数学Ⅰ，数学SA」において扱っている。具体的には，第５単元「データの処理」である。

最小二乗法が登場するまでの流れを整理すると以下のようになる。

①国や地方自治体にとって，喫煙が重要な問題であるという問題意識から，「2004年の日本の１人あたりの喫煙本数は2662本，10万人あたりの心筋梗塞による死亡者数は127人である。もし，この喫煙本数が半減すると，死亡者数はどのくらいになるか，考えてみよう」という課題に取り組む。

②データを散布図に表し，メジアン－メジアン直線（Med-Med線）を引き，死亡者数を予測する。その際，直線の引き方も学習する。

③残差の和を調べるとともに，残差の和を調べることの長所と短所を考えさせる。

④残差の二乗の和を調べる。

⑤残差の二乗の和が最小になるように，直線の式を決める方法が次のように提示される。

求める直線を $y=ax+b$ とおくと，データ $(x_i,\ y_i)$ に対して，その残差 d_i は

$$d_i=y_i-(ax_i+b)$$

となる。したがって，残差の2乗の和は

$$\Sigma d_i{}^2=\Sigma\{y_i-(ax_i+b)\}^2$$

これを展開して整理すると

$$\Sigma d_i{}^2=[A](a+[B]b+[C])^2+[D](b+[E])^2+[F] \quad \cdots\ (1)$$

となる。

ここで，$[A]>0$，$[D]>0$ となるので，残差を最小にするには，2つの$(\quad)^2$が0になるように a，b を決めればよいことになる。すなわち

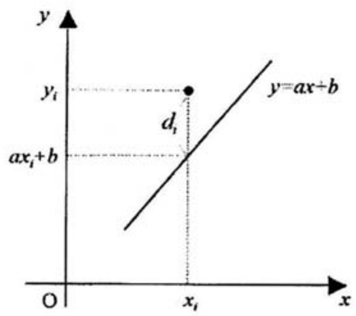
$$b=-[E]=\frac{\Sigma x_i{}^2\Sigma y_i-\Sigma x_i\Sigma x_iy_i}{n\Sigma x_i{}^2-(\Sigma x_i)^2}$$

$$a=[B][E]-[C]=\frac{n\Sigma x_iy_i+\Sigma x_i\Sigma y_i}{n\Sigma x_i{}^2-(\Sigma x_i)^2}$$

このとき，(1)は $[F]$，すなわち

$$\Sigma d_i^2=(1-r^2)\,\Sigma(y_i-\overline{y})^2$$

となるので，残差の2乗の和は，r^2 が1に近いほど，すなわち，相関係数 r の絶対値が1に近いほど小さくなることがわかる。



$[A]=\Sigma x_i{}^2$

$[B]=\dfrac{\Sigma x_i}{\Sigma x_i{}^2}$

$[C]=-\dfrac{\Sigma x_iy_i}{\Sigma x_i{}^2}$

$[D]=n-\dfrac{(\Sigma x_i)^2}{\Sigma x_i{}^2}$

$[E]=\dfrac{-\Sigma x_i{}^2\Sigma y_i+\Sigma x_i\Sigma x_iy_i}{n\Sigma x_i{}^2-(\Sigma x_i)^2}$

$[F]=(1-r^2)\,\Sigma(y_i-\overline{y})^2$

ただし，n はデータの個数，$\overline{y}$ はデータ y_i の平均，r は相関係数

図3　最小二乗法による回帰直線の求め方（p.71）

⑥はずれ値の影響に関する最小二乗法による回帰直線とメジアン－メジアン直線の比較をする。

メジアン－メジアン直線から回帰直線について考察している点，最小二乗法による回帰直線とメジアン－メジアン直線をはずれ値の影響という観点から比較している点がおもしろい。だが，**図3**が示しているように，文字の処理が難しい。次節では，中学校において最小二乗法を扱うことを想定し，最小二乗法の基本的な考え方を理解させ，価値のある学習にするための指導について考察する。

5. 最小二乗法の基本的な考え方の理解を目指した学習指導

（1）学習指導の柱について

グラフ関数電卓の回帰機能を用いて現実事象を考察する活動を潤沢に取り入れていく段階を中学校段階として考えているので，以下で述べる学習指導は，中学生を対象として記述する。

先行研究の考察を踏まえ，最小二乗法の基本的な考え方の理解を目指した学習指導では，以下の３点を柱として，授業を構成する。

① N個のデータに対する回帰直線を考察するのではなく，具体的ないくつかのデータに対する回帰直線を考察する。つまり，具体的なデータに対する回帰直線の式を求めることを通して，「残差の二乗の和を最小にする」ことの意味の理解をねらいとする。

② 説明変量をx，目的変量をyとした際，最小二乗法による回帰直線が，説明変量のデータの平均値と目的変量のデータの平均値を座標とする（$\bar{x}$，$\bar{y}$）を通るという特徴を活用する。

③ 回帰直線は，「残差の二乗の和」が最小になるように，直線を動かしながら求めるのではなく，二次関数の最小値を求める活動を通して求める。つまり，回帰直線が平均値($\bar{x}$，$\bar{y}$)を通るという特徴を基にして，回帰直線の切片を傾きの文字で表現し，二次関数の最小値問題に帰着するのである。また，最小値を求める際には，平方完成を行って求めるのではなく，二次関数の式のよみや二次関数のグラフを描き，グラフの形状から最小となるxの値を求める活動を行う。

上記の学習指導を想定すると，中学校の中でも，乗法公式と二乗に比例する関数を学習する中学校３年生が適当な学年であると考える。また，学習する単元は，通常の場合，「二乗に比例する関数」を，『生かす数学』の場合，「事象と関数」を想定している。

（２）学習指導の具体的な展開

①授業において扱う問題

授業は，データが線形の傾向を示しているが，目分量によって，回帰直線を引くことが難しいと感じるデータを用い，現実事象の問題解決を目的として展開する。その際，生徒が，説明変量（x）のデータの平均値，目的変量（y）のデータの平均値の算出を行うことが期待できるデータを扱う。具体的な問題の一例を以下に示す[3)]。

日本のプロ野球には，セ・リーグとパ・リーグという２リーグがあり，それぞれ６球団ずつのチームで構成されている。毎年，高い勝利数を得て，優勝するために，次年度のシリーズが始まる前，各チームは，有能な選手を獲得し，チーム力を高めようとする。

あなたは，チームの現状をふまえ，どのような選手を獲得すればよいかをチームの代表者に助言する仕事をしているとする。

問題(a) どのような選手を獲得すればよいかを説明するために，まず，勝利数と関係が深いと考えられる項目（打席，安打等）を見出すことにした。下に示す2011年度の成績データを基に，勝利数と関係が深いと考えられる項目をあげ，関係が深いと考えた理由を説明せよ。

チーム	勝利数	打席	安打	被安打	本塁打	被本塁打	得点	失点
セ・リーグ								
中日	75	5235	1044	1093	82	73	419	410
ヤクルト	70	5321	1132	1192	85	93	484	504
巨人	71	5242	1145	1097	108	74	471	417

阪神	68	5245	1206	1049	80	64	482	443
広島	60	5272	1136	1160	52	83	439	496
横浜	47	5198	1106	1271	78	117	423	587
パ・リーグ								
ソフトバンク	88	5338	1271	987	90	67	550	351
日本ハム	72	5284	1189	1164	86	57	482	418
西武	68	5427	1204	1233	103	81	571	522
オリックス	69	5316	1172	1194	76	75	478	518
楽天	66	5207	1140	1179	53	79	432	464
ロッテ	54	5339	1146	1272	46	76	432	533

問題(b) 勝利数をy軸，「得点－失点」の値をx軸に設定し，2011年度と2010年度[4]のデータに対する散布図を描きなさい。

過去５年間の優勝チームの平均勝利数は，80.8勝であった。描いた散布図を利用して，80.8勝の時の「得点－失点」の値を予測せよ。

問題(c) １つのチームを選択し，そのチームの場合，どのような選手を獲得するのがよいかを（b）の結果をふまえて説明せよ。

問題（b）では，勝利数を目的変量（y）とし，様々な項目（打席，安打，本塁打等）を説明変量（x）として捉え，散布図に表現していく。

図４　左は説明変量が打席数，右は安打数

そして，散布図を見ながら，説明変量が大きければ大きいほど，目的変量の数値も大きくなっている場合を探っていく。探る中で，チームが勝つためには，打つだけでなく守る（打たせない）ことが重要であることに気づき，打撃と守備の両面を備えた説明変量を作り，散布図に表していくと考えられる。例えば，「安打数－被安打数」，「得点－失点」である。

図５　左は説明変量が「安打数ー被安打数」，右は「得点ー失点」

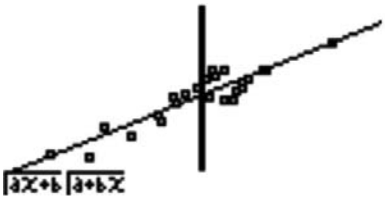
説明変量を「得点－失点」とした場合，**図５**が示しているように，データは右上がりの直線付近に並んでいると捉えることができる。すなわち，「得点－失点」が大きくなるにつれ，勝利数が大きくなると捉えることができる。

これまでの教材の多くは，1つずつの目的変量と説明変量が提示され，それら２つの変

量間の関係に関する数学的モデルの作成が学習の主活動であった。だが，事象を数理的に考察する能力の育成を考えたとき，目的変量と関係が強いと考えられる説明変量を探すこと自体が重要であり，問題（a）は，その能力を育成する学習場面として位置づけられる。以下では，問題（a）を考察した後に提示される問題（b）を用いた学習指導について述べる。

②学習指導の具体的な展開

問題（b）の解決では，目分量ではなく，グラフ関数電卓を用いて，最小二乗法による回帰直線を描いて予測をする活動を行う（**図 6**）。



LinearReg(ax+b)
a =0.09953307
b =69
r =0.92144188
r²=0.84905514
MSe=15.8080431
y=ax+b
COPY DRAW

図 6　最小二乗法による回帰直線

得られた直線であるy=0.0995x＋69のyの値に80.8を代入し，約118点（「得点－失点」）という結果を得た後，描いた回帰直線について考察していく。そこでまず，最小二乗法の意味を確認していく。具体的には，以下に示す内容を確認する。「ここで引いた直線は，最小二乗法による回帰直線と言う。これは，各点からこの直線まで縦軸と平行にひいた線分の長さ（残差）に着目し，この残差の２乗をすべて加えた値が最小になるように引いた直線である。」

次に，描いた回帰直線が，ある座標を通ることを指摘し，座標を問う。その問いに対して，根拠は不明確であるが，バランスをとる（$\bar{x}$，$\bar{y}$）を通るのではないかという発言が予想される。そこで，を求め，その座標である（0，69）を**図 6** の中にとると，回帰直線上にのることが確認される。また，他の場合において，同様なことが成立するのかを確かめるために，2011年のみのデータに対しても，回帰直線を描き，（$\bar{x}$，$\bar{y}$）の位置を確認する。この活動によって，最小二乗法による回帰直線上に，説明変量（x）のデータの平均値と目的変量（y）のデータの平均値を座標とする点が存在するという特徴を帰納的に導くのである。

その後，なぜ，最小二乗法による回帰直線が（$\bar{x}$，$\bar{y}$）を通るのかを考える[5)]。今，x，y 平面上にデータを表す点A_1，A_2，A_3があり，そのデータの回帰直線をmとする。また，点A_1，A_2，A_3のx座標の平均値とy座標の平均値を座標とする点をGとする。さらに，A_1，A_2，A_3からmに対して，y軸に平行になるように下した際の交点をそれぞれ点B_1，B_2，B_3とする。ここで，A_1，A_2，A_3，Gを通り，mに平行な直線を引いた際のy軸との交点をA_1'，A_2'，A_3'，G'とし，mとy軸との交点をP'とする（**図 7**）。そして，A_1'，A_2'，A_3'，P，G'のy座標をそれぞれa_1，a_2，a_3，p，gとする。

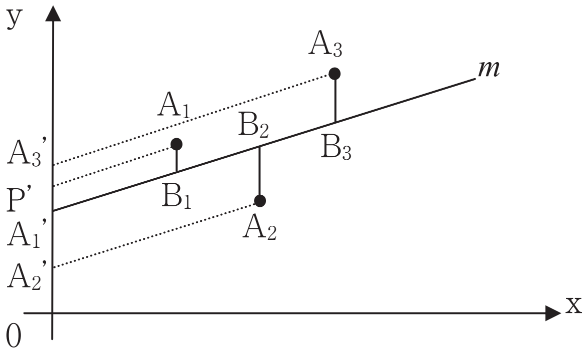


図7　各点の位置を表す図

最小二乗法の定義に戻り，$A_1B_1^2+A_2B_2^2+A_3B_3^2$の値を最小にすることが目標であることを確認し，$A_1B_1^2+A_2B_2^2+A_3B_3^2=PA_1^2+PA_2^2+PA_3^2=(p-a_1)^2+(p-a_2)^2+(p-a_3)^2$を導く。
G'との関係を考えたいので，さらに次のように式変形する。

$$(p-a_1)^2+(p-a_2)^2+(p-a_3)^2=(g-a_1)^2+(g-a_2)^2+(g-a_3)^2+3(g-p)^2$$

a_1，a_2，a_3，gは定数であるので，上記の式が最小となるのは，$g-p=0$の時，つまり$g=p$の時である。同様に，**図7**の各線を延長していき，x軸との交点を決め，x座標についても考える。G'，P'からの延長線とx軸との交点をそれぞれG''，P''とし，そのx座標をg'，p'とすると，$g'=p'$が得られる。すなわち，回帰直線mは，x座標の平均値とy座標の平均値を座標とする点Gを通る。

次に，最小二乗法による回帰直線を実際に求める活動に移る。求める回帰直線を$y=ax+b$とすると，この回帰直線が（$\bar{x}$，$\bar{y}$）を通るので，$\bar{y}=a\bar{x}+b$が得られる。つまり，$b=\bar{y}-a\bar{x}$である。この式に，$\bar{x}=0$，$\bar{y}=69$を代入すると，$b=69$となり，求める回帰直線は，$y=ax+69$となる。

そして，最小二乗法の定義を想起しながら，残差，残差の二乗，残差の二乗の和を求める（**表1**）。

表1　残差と残差の二乗（データの一部）

y	x	$ax+69$	残差	残差の二乗
75	9	$9a+69$	$75-(9a+69)$	$(-9a+6)^2$
70	-20	$-20a+69$	$70-(20a+69)$	$(20a+1)^2$
71	54	$54a+69$	$71-(54a+69)$	$(-54a+2)^2$
…	…	…	…	…

残差の二乗の和をSとすると，$S=197462a^2-39308a+2304$になる。ここで，Sの値を最小にする時のaの値を求める。その際，次の考えが想定される。式をよみながら，aの値を特定していく考えである。$a=1$と$a=2$の時を比較してみると，$197462a^2$の項の影響が大きいため，Sの値は$a=2$の時の方が大きくなる。つまり，aの値が1よりも大きければ大きいほど，Sの値は大きくなっていく。$a=-1$未満の場合も同様である。なお，aの値が負の時，$-39308a$が正の値を示すため，Sが最小値をとるのは，$0 \leqq a < 1$の範囲の時となる。ここで，$a=0$とすると$S=2304$，$a=0.1$とすると$S=347.82$，$a=0.2$とすると$S=2340.88$となる

ので，放物線の対称性より，aが0.1付近の時，最小になると考えられる。そこで，a=0.1付近におけるいくつかのSの値を調べ，グラフに描いていく。

表 2　　a=0.1付近におけるSの値

a	0.09	0.11	0.095	0.099	0.101
S	365.72	369.41	351.83	347.83	348.20

この活動を通じて，Sが最小になると考えられるaの値を特定していく。また，最後にグラフ関数電卓の最小値機能を用いて，値を確認する(**図 8**)。そして，導かれる回帰直線の式は，y=0.0995x＋69であり，**図 6** と比較してみても，同じ式が得られていることを確認する。

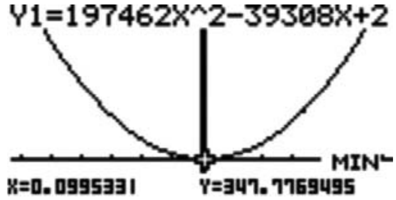


図 8　グラフ関数電卓の最小値機能を用いて特定した最小値

上述した回帰直線の傾きを求める経験を通して，最小二乗法の基本的な考え方を理解するとともに，二次関数に対する理解も深まると考える。ここに，「二乗に比例する関数」や「事象と関数」（『生かす数学』の場合）の単元において，この題材を扱う理由がある。中学校の段階では，1つずつ点を取りながら，グラフの形状を描き，最小値を求める経験をし，高等学校の段階において，最小値をより簡潔に，代数的に求める方法として，平方完成による方法を学習すればよいと考える。

6. 結論と今後の課題

本稿の目的は，実験データや統計データの回帰分析を行う際に重要となる最小二乗法の基本的な考え方の理解を目指した学習指導について考察するとともに，『生かす数学』における位置づけを検討することであった。

そのために，グラフ関数電卓を用いて，実験データや統計データの回帰分析を積極的に行っている国外の先行研究では，最小二乗法をどのように，どの程度学習しているのかを分析した。

本稿では，その分析を踏まえ，最小二乗法の基本的な考え方の理解を目指した学習指導の柱を次の３点とした。

① 具体的なデータに対する回帰直線の式を求めることを通して，「残差の二乗の和を最小にする」ことの意味を理解できるようにする。

② 最小二乗法による回帰直線が，説明変量のデータの平均値と目的変量のデータの平均値を通るという特徴を活用する。

③ 回帰直線を求める活動は，二次関数の最小値を求める活動と連動させながら展開する。

グラフ関数電卓を積極的に用いることを前提とした際のカリキュラムの内容と系列を見直すことが，今後の課題である。また，中学校の関数の学習において，どのような手法による回帰直線をどの内容に対して扱うのか，またその際の教材を何が適切かを吟味するこ

とも課題である。

註

1）．数学的モデル化過程をより詳細に記述しようとする試みは，数学の応用を教授する必要性と重要性が認識され，数学の応用に関する論文や報告が公刊されはじめた1960～1970年ころから行われ（Clements，1989），その後，様々な数学的モデル化過程が提起された。三輪辰郎（1982）の枠組みは，Pollak（1970，1979）において記述されている数学的モデル化過程をより精緻化した枠組みとなっている。具体的には，以下のものである。

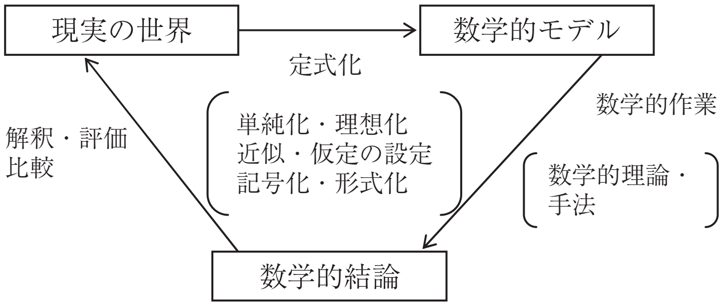
「まず，それまでの経験・観察をもとにして，ある事象が探求を要するという認識があるという前提の下で，

（１）その事象に光を当てるように，数学的問題に定式化する（定式化）

（２）定式化した問題を解く（数学的作業）

（３）得られた数学的結果をもとの事象と関連づけて，その有効さを検討し，評価する（解釈，評価）

（４）問題のより進んだ定式化をはかる（より良いモデル化）」（p.286）



2）．佐伯昭彦（2005）は，テクノロジーを実データ解析の補助とすることにより，次の利点が得られるとしている（pp.100-101）。

利点１：機械的な計算やグラフ化の労力を軽減することにより，数学的モデリング過程の解釈・検証等に時間をかけることができる。

利点２：コンピュータで数値的，代数的，グラフ的に実行した結果を探究することにより，問題場面が多角的に分析でき，現象をより良く理解することができる。

利点３：テクノロジーが持つ機能（例えば，回帰モデル機能や最大値・最小値を求める機能など）を活用することにより，中学校段階でも未学習や高度な内容の現象を取り扱うことが可能である。さらに，不得手な生徒にとっても同様に数学的モデリングの活動に取り組むことができる。

3）．本教材は，Data Analysis and Baseball（Gary Talsma,1999）を参考にして作成した。その論文では，1997年のメジャーリーグのチームに関する様々なデータ（勝利数，敗戦数，打席数，得点，失点，ヒット，二塁打，三塁打，本塁打，総塁数，四球，「得点－失点」が表として提示され，それらを散布図に描き，探究を行っているが，授業を想定し，どのデータを提示するか，どのような問題として提示するかまでは考察していない。

4）．2010年度プロ野球成績データ

チーム	勝利数	打席	安打	被安打	本塁打	被本塁打	得点	失点
セ・リーグ								
中日	79	5441	1229	1189	119	121	539	521
阪神	78	5629	1458	1301	173	138	740	640
巨人	79	5510	1311	1278	226	140	711	617
ヤクルト	72	5582	1304	1312	124	146	617	621
広島	58	5503	1278	1423	104	171	596	737
横浜	48	5404	1234	1440	117	176	521	743
パ・リーグ								
ソフトバンク	76	5482	1308	1221	134	99	638	615
西武	78	5576	1317	1357	150	131	680	642
ロッテ	75	5681	1350	1307	126	123	708	635
日本ハム	74	5504	1330	1259	91	121	612	548
オリックス	69	5562	1337	1328	146	110	644	628
楽天	62	5493	1290	1331	95	129	576	635

5）．下田虎美（1944）において記述されている多角形の重心の考えを用いず記述した。なお，この論文の存在は，田中義久氏（弘前大学）から教えていただいた。

引用・参考文献

新井仁（2006）「スギ花粉飛散量予測を題材とした関数領域の指導について」日本数学教育学会誌，第88巻第11号，pp.11-18.

新井仁，西村圭一（2010）「データに対する多面的な見方を育成する数学的モデリングの教材開発」日本科学教育学会年会論文集34, pp.133-136.

Charles Vonder Embse（1997）Visualizing Least-Square Lines of Best Fit. *The Mathematics Teacher*,Vol.90,No.5. pp.404-408.

R.R.Clements（1989）*Mathematical modeling-A case study approach-*.Cambridge University Press.

Gary Talsma（1999）Data Analysis and Baseball, *The Mathematics Teacher* Vol.92,No.8,pp.738-742.

Jeremy Zelkowski,Robert Mayes（2008）Applied Algebra：The Modeling Technique of Least Squares.*The Mathematics Teacher*,Vol.102,No.1. pp.46-51.

Lawrence M.Lesser（1999）Making the Black Box Transparent.*The Mathematics Teacher*,Vol.92,No.9, pp.780-784.

Maurice J.Burke,Ted R.Hodgson（2007）Using Technology to Optimize and Generalize：The Least-Squares Line,*The Mathematics Teacher*, Vol.101,No.2. pp.102-107.

Max.Stephens，柳本哲（2001）『総合学習に生きる数学教育』明治図書.

三輪辰郎（1982）「モデル化」『現代教育学の基礎』筑波大学教育学研究会編，pp.286-289.

西村圭一，柗元新一郎，植野美穂（1997）「数学的モデル化教材の評価に関する研究」学芸大数学教育研究第９号，pp.41-54.

西村圭一（2005）「数学と社会をつなげる力を育成する１次関数の学習指導に関する研究：『仮説を立てる』『検証する』に焦点を当てて」日本数学教育学会数学教育論文発表会論文集 38, pp.157-162.

大澤弘典（1996）「現実場面に基づく問題解決－グラフ電卓を利用した合科的授業展開を通して

－」日本数学教育学会誌，第78巻第９号，pp.16-20.
大澤弘典（1998）「数学的モデリングにグラフ電卓の利用を図った教材例－テープレコーダのカウンター問題－」日本数学教育学会誌，第80巻第９号，pp.30-33.
H.O.Pollak（1970）Applications of Mathematics. *Mathematics Education* 69*th Yearbook of the National Society for the Study of Education*，University of Chicago Press，pp.311-334.
H.O.Pollak（1979）The interaction between mathematics and other school subjects，In Unesco, *New trends in mathematics teaching*，Vol.Ⅳ，pp.232-248.
佐伯昭彦，氏家亮子（2003a）「数学的モデリング過程における学習者の実データ解析方法－『お湯の冷め方』実験での数学的モデルの解釈・評価・より良いモデル化－」日本数学教育学会誌，第85巻第３号,pp.12-21.
佐伯昭彦，氏家亮子（2003b）「数学的モデルの妥当性に関する学習者の検討方法－回帰モデル機能を用いたより良いモデル化－」日本科学教育学会誌，科学教育研究，Vol.27，No.5，pp.354-361.
佐伯昭彦（2005）『テクノロジーを活用した数学的活動の教材開発とその有効性に関する研究』兵庫教育大学大学院連合学校教育学研究科博士論文.
杉山吉茂代表（2007）『生かす数学：高校数学Ⅰ 高校数学A』盈進社.
下田虎美（1944）「最小自乗法ヲ避ケテ最適直線ヲ求ムル方法」日本数学教育会第26巻.pp.32-38.
田島稔，小牧和雄（1996）『最小二乗法の理論とその応用』（改訂版）東洋書店.
植野美穂（1999）「グラフ電卓を用いた高校数学教材の開発」『新しい算数・数学教育の実践をめざして』東洋館出版社,pp.193-203.