はしがき

改訂学習指導要領が小・中・高の各学校段階で完全実施され，各学校では，知識・技能を活用して課題を解決するための思考力，判断力，表現力等の育成，言語活動の充実，学習習慣の確立等を基本的な考え方として授業の改善が図られている。そして，特に，算数・数学科では，算数的活動や数学的活動を一層充実させ，児童・生徒が学んで身に付けたことがらを実生活や学習に活用することを重視し，学ぶ意欲を高め，学ぶことの意義や有用性を実感させる授業を具体化することが重要課題となっている。

このような新しい課題の背景には，現在の子ども達を取り巻く社会環境の変化，特に知識基盤社会への変化があり，さらにその子ども達が将来の社会で活動するために身に付けて欲しい資質や能力が，従来の学力観を超えたものである。OECDのPISA調査の根底にある「キー・コンピテンシー」という考え方や，国立教育政策研究所による「21世紀型能力」の概念等は，そのような資質や能力を展望したものである。

本研究「算数・数学科における『思考・判断・表現』の評価に関する研究」は，思考力・判断力・表現力等の育成とその評価という観点から，特に評価教材の開発，授業モデルの開発に取り組み，算数・数学科の学習指導の改善に寄与することを目的として２年間にわたって行われた。上記の今日的課題に対し，算数・数学科において育成するべき「思考・判断・表現」とその評価に関する実践研究を蓄積し，望ましい教材のあり方，授業場面での具体的な評価方法の検討を行った。その際，海外の研究・実践動向を視野に入れながら理論的考察を行うとともに，実際の教室での授業実践を行って，数学科における授業改善の方向を具体的に提示することを目指した。

研究会は，筑波大学東京キャンパス文京校舎を主たる会場として，教材や授業実践の検討を行うとともに，筑波大学附属学校研究会（於：筑波大学附属小学校）等に参加し授業観察や討議を行った。「思考力・表現力・判断力」の育成とその評価は，重要な課題であるがその具体化には様々な困難が伴う。本研究にも多くの課題が残されているが，今回の研究成果を生かして，さらに研究を深めていきたいと考えている。

本研究を進めるにあたり，「公益財団法人　日本教材文化研究財団」より多大なるご支援を賜りました。また，特に，同財団の鍛治紀彦氏には研究会の運営をはじめ様々な面でお世話になりました。心より感謝申し上げます。

平成26年７月

研究者代表　清水　美憲

目　　次

1　研究の概要

1．研究の目的

改訂学習指導要領の実施下，算数・数学科では，数学的活動を一層充実させ，児童・生徒が学んで身に付けたものを生活や学習に活用することを重視し学ぶ意欲を高め，学ぶことの意義や有用性を実感させることが，授業改善の重要課題となっている。また，全国学力・学習状況調査の結果からは，算数・数学科における「活用」の評価問題において，児童・生徒の「思考・判断・表現」に関する課題が浮き彫りになっている。

このような状況において，算数・数学科における思考力，判断力，表現力の育成とその評価に関する教材開発を行い，実践研究を蓄積することで，望ましい教材のあり方，授業場面での具体的な評価方法の検討等の必要性が生じている。

本研究は，思考力・判断力・表現力等の育成とその評価という観点から，算数・数学科における学習者の「思考・判断・表現」に関する評価教材の開発に取り組み，実践的検討を踏まえて学習指導の改善に寄与することを目的としている。

2．研究の方法

本研究の第１年次では，「思考・判断・表現」に関する評価について，諸外国で進められている新しい評価方法の開発動向や，OECDによるPISAやPIAACなど，数学的リテラシーの評価の検討も視野に，数学的活動や数学的プロセスに焦点を当てた評価教材の開発について，論点整理と，教材の分析・蓄積を行った。また，特に問題解決の方法や根拠について「説明すること」に焦点を当てた評価方法についても検討した。

第２年次には，思考力，判断力，表現力を育成する教材の開発と実践的な試行を引き続き行いながら，新教材を開発した。その際，従来の算数・数学教育では比較的扱われることの少なかった， PDCAサイクルに焦点化して判断や意思決定を問う評価問題や，数学的モデル化を想定した探究過程に焦点化して思考・表現を問う評価問題等，新しいタイプの評価問題の開発を意図した。

3．研究の経過と成果

本研究では，第１年次より，思考力，判断力，表現力を育成する教材開発の論点整理と研究動向の把握のために，アメリカにおいて2014年から導入されたCommon Core State Standardsに対応して開発されている探究型の評価課題，イギリスのプロジェクト・ボーランドマスによる評価課題について，資料を収集し，教材の具体的検討を行った。これらの評価課題群には，問題解決過程における数学的プロセスを評価するための枠組みと，児童・生徒の解答を評価するための評価規準（ルーブリック）が準備されているため，それらについて検討し，「思考・判断・表現」に焦点を当てた評価規準を検討した。

第２年次には，従来の算数・数学教育では比較的扱われることの少なかった，複数の解の選択が妥当なオープンエンドな状況化での判断を問う問題，PDCAサイクルに焦点化して判断や意思決定を問う評価問題，数学的モデル化を想定した探究過程に焦点化して思考・表現を問う評価問題等，新しいタイプの評価問題を開発した。

４．研究の組織

氏　名	所　　　属	分　　　担
清水美憲	筑波大学人間系 教授	研究の統括 （研究会の運営）
西村圭一	東京学芸大学教育学部 准教授	評価教材の開発の理論的検討 （渉外）
清野辰彦	山梨大学教育人間科学部 准教授	評価方法・評価モデルの理論的検討 （渉外）
花園隼人	東京学芸大学教育学部附属 高等学校教諭	評価教材の開発 高等学校での実践研究の推進
石井清和	埼玉県所沢市立伸栄小学校 教諭	評価教材の開発 小学校での実践研究の推進
栗田辰一朗	東京学芸大学教育学部附属 世田谷小学校教諭	評価教材の開発 小学校での実践研究の推進
永山香織	東京学芸大学教育学部附属 世田谷小学校教諭	評価教材の開発 小学校での実践研究の推進
榎本哲士	筑波大学大学院人間総合科学 研究科院生	評価教材の開発 中学校での実践研究の推進
大塚慎太郎	筑波大学大学院人間総合科学 研究科院生	評価に関する海外の研究･実践動向の 検討（アメリカを中心に）
小泉友香	筑波大学大学院人間総合科学 研究科院生	評価に関する海外の研究･実践動向の 検討（ドイツを中心に）
平林真伊	筑波大学大学院人間総合科学 研究科院生	評価に関する海外の研究動向の検討(統 計分野を中心に）書記（研究会の記録）
菅原恵美	東京学芸大学大学院教育研究科 院生	評価に関する海外の研究･実践動向の 検討（イギリスを中心に）

（平成26年３月現在）

2　数学科の思考力，判断力，表現力の育成とその評価の枠組み

筑波大学大学院人間系　教授　清水美憲

1　はじめに

現行の学習指導要領では，知識・技能を活用して課題を解決するための思考力，判断力，表現力等の育成，言語活動の充実，学習習慣の確立等を基本的な考え方として授業の改善が図られている。そして，特に，算数・数学科では，算数的活動や数学的活動を一層充実させ，児童・生徒が学んで身に付けたことがらを実生活や後の学習に活用することを重視し，学ぶ意欲を高め，学ぶことの意義や有用性を実感させる授業を具体化することが重要課題となっている。

一方，OECD/PISAの数学調査に端を発する近年の数学的リテラシー論が，我が国の学校数学における目標・内容・方法の再考を求めている（長崎，2009；浪川，2009；清水，2007)。すなわち，知識基盤社会で活動する社会人が身に付けておくべき数学的素養とは何か，また，それに先立って学校教育段階で児童・生徒が育むべき数学的能力とは何かといった問いを念頭に，学校数学の目標・内容・方法に位置付けて捉え直してみることが，教育上の重要な検討課題となっているのである。

その後も継続的に実施されているOECD/PISAやPIAAC（国際成人力調査）等の国際調査が，知識基盤社会に生きる市民に必要な数学的素養について，数学におけるリテラシーやニューメラシーをとらえる評価の枠組みと具体的な調査問題を提示して，いわば学校教育の外側から，学校数学の目標・内容・方法の再考を促す役割を果たしている。

以下では，OECD/PISAの数学調査の数学的リテラシー論を短く振り返りつつ，数学科における思考力，判断力，表現力（「思考・判断・表現」）について，数学内外の事象の考察において用いる数学的方法に焦点を当てた評価のあり方を考察する。特に，従来の数学教育ではあまり焦点化されてこなかったPDCAサイクルを生かす数学的探究活動や，モデルの改良を伴う数学的モデル化の学習指導のための教材開発を視野に，問題発見力や問題設定力を鍛えながら意思決定力やマネジメント能力を伸ばすという方向での学習指導とそのための評価における課題を検討する。

2　数学的リテラシー論からみた「思考・判断・表現」の評価の特質

（1）キー・コンピテンシー論からみた「思考・判断・表現」

OECD/PISA数学調査の計画・実施の中核は，「生きてはたらく数学的な知識と技能」と，その根底に必要な反省的考察の力や姿勢などをも込めた新しい立場からの「数学的リテラシー」を評価するという考え方である（OECD, 2006)。このOECD/PISAのリテラシー概念は，「DeSeCoプロジェクト」で規定された「キー・コンピテンシー」論に基づいて導かれている。

「キー・コンピテンシー」は，知識基盤社会において市民が活動するための３つの行為のカテゴリー，すなわち，相互作用的に道具を用いること，異質な集団で交流すること，自律的に活動することからなり，**表１**のように整理されている。

このうち，OECD/PISA調査が評価しようとしているのは，カテゴリー１のうち「１A:言語·シンボル·テキストを相互作用的に用いる能力」である。

表１：キー・コンピテンシー（OECD, 2005）

カテゴリー１：相互作用的に道具を用いる
　１A：言語・シンボル・テキストを相互作用的に用いる能力
　１B：知識や情報を相互作用的に用いる能力
　１C：技術を相互作用的に用いる能力
カテゴリー２：異質な集団で交流する
　２A：他人といい関係をつくる能力
　２B：協力する，チームで働く能力
　２C：争いを処理し，解決する能力
カテゴリー３：自律的に活動する
　３A：大きな展望の中で活動する能力
　３B：人生計画や個人的プロジェクトを設計し実行する能力
　３C：自らの権利，利害，限界やニーズを表明する能力

このようなキー・コンピテンシー論に基づく数学的リテラシーの意味は，日常生活の場面や社会の様々な文脈で数学的な知識・技能が使えるかどうかという意味に止まらない。むしろ，個人が数学的な知識・技能を活用して情報を的確に理解して判断を下し，自分のおかれた状況を批判的・反省的にとらえる力を重視している。このことは，市民が身に付けるべき数学的リテラシー像を考える際に，数学的な知識・技能を身に付けているかどうかという数学の単なる実用的価値の確認を超えて，ある状況のなかで反省的に考察する力や姿勢などをも込めた視点からの考察が欠かせないことを示唆している。このような立場からみると，学校教育の出口での「思考・判断・表現」の評価の重要性が示唆される。

実際，OECD/PISA数学調査のペーパーテストの焦点の一つは，日常生活や社会生活の様々な問題場面で，学校数学で学んだ知識や技能を「役立つように使えるかどうか」を評価することにある。すなわち，現代社会で生きる個人が自分を取り巻く諸問題に対し，積極的かつ前向きに関わり，よりよい社会を目指すといった市民像が，調査の背後に想定されているのである。

この数学的リテラシーの評価では,「建設的で関心を持った思慮深い市民（reflective citizens)」として「確実な根拠に基づき判断を行い，数学に携わる力」を想定している。それゆえ，調査では，数学的知識を活用して判断すること，数学を用いてコミュニケーションすること，事象の特徴を数学的な観点から把握して表現すること，そして数学の果たす役割やその意義を知ること等の評価が意図されている。

このように学校教育の「出口」を問題にするキー・コンピテンシーという考え方に対し，いわばその「前段階」を考える必要がある。長崎（2009）は，数学的リテラシー論の立場から学校教育の役割を見直し，次のように指摘する。「学校教育では，子どものそれぞれ

の発達段階においてその能力を十分に伸ばすという実現の役割と，数学的リテラシーを育成するという準備の役割との二重の役割を考える必要がある」（p.24）

現行の学習指導要領が重視する知識・技能を活用して課題を解決するための思考力，判断力，表現力等の育成についても，このような視点から位置づけてみることが大切である。当該の学習活動や評価において，「思考・判断・表現」のどのような面に重点をおくかという意図の確認と，それが学校教育を終えたのちにはたらくどのような力を育成することになっているかという確認である。

（2）諸外国におけるプロセススタンダードの強調

上記のようなコンピテンシー論による学校数学の文脈への影響は，諸外国における目標論の設定にもみることができる。実際，数学科カリキュラム改革の世界の動向の一つに，学校数学の指導内容とその配列のみならず，数学学習で発揮されるべき能力（competencies），態度や学習傾向（dispositions）等の重要さを考慮に入れ，それを目標に明示する点に共通点がみられる。以下，２，３の他国の例を概観してみよう。

・オーストラリアの全国統一カリキュラム

オーストラリアでは従来から州毎にカリキュラムの基準の設定を行ってきたが，2010年から全国統一カリキュラムが策定された。この全国統一カリキュラムでは，内容の３領域「数と代数」，「計量（測定）と幾何」，「統計と確率」に対置する形で，数学的に習熟すること（proficiency）についてのスタンダードが設定された。

これらは，数学学習において，生徒が数学らしい行為をどのように行うかについての期待を述べたもので，次の４項目からなるスタンダードが設定されている。

・理解　・流暢さ（Fluency）　・問題解決　・推論

・アメリカの統一コアスタンダード

一方，アメリカでは，2010年6月に公表され，2014年から実施される予定の全米統一コアスタンダード（Common Core State Standards）の数学編に「数学的実践（mathematical practice）のためのスタンダード」（８項目）が以下のように示されている。これは，数学における活動で何を大切にすべきかを述べたものである。

・問題の意味がわかり粘り強く解決する
・抽象的に，量的に，推論する
・批判に耐えうる議論をし，他者の推論を批判する
・数学を用いてモデル化する
・適切な道具を戦略的に用いる
・正確さに絶えず注意する
・構造を求め利用する
・推論の連鎖において規則性を探し表現する

この全米統一コアスタンダードは，理解，問題解決，推論といった学習のプロセス面について，「数学らしい活動をするとはどういうことか」や「数学に長けた者はどんな特徴を示すか」を想定して，より踏み込んだ形で記述されている。

・スウェーデンの新カリキュラム

同様に，スウェーデンでも数学学習におけるプロセス面の充実が新たに強調されるようになった。具体的には，次のような過程や方法が重視されている。

・問題を定式化して解決したり，選択されたストラテジーや方法を評価したりする
・数学的な諸概念及びそれらの関係性を用いたり分析したりする
・計算や，ルーティン課題の解決のために，適切な方法を選択したり用いたりする
・数学的推論を適用したり，辿ったりする
・数式のような形式を用いて，議論したり，問いや計算や結論に説明を与えたりする

以上のように，これらの国では，問題解決，理解，流暢さや戦略性，推論，コミュニケーション，モデル化等についてのプロセススタンダードが示されており，個々の数学内容を学ぶ際に，それぞれのプロセスが質の高いものになるように配慮することを求めている。

わが国の中学校数学科の学習指導要領で示された数学的活動にも，このような数学的プロセスの強調がみられる。そして，他国のプロセススタンダードと比較してみると，「既習の数学を基にして，数や図形の性質などを見いだし，発展させる活動」では数学的推論や数学的理解が，また「日常生活や社会で数学を利用する活動」では数学的モデル化が，そして「数学的な表現を用いて，根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動」では，数学的表現とコミュニケーションが，それぞれ活動の中核に位置付けられるべきものであることが読み取れる。

（３）評価課題の構成の枠組み：問題場面・数学的内容・数学的プロセス

OECD/PISAの調査枠組みは，わが国の数学科カリキュラムにおける目標と内容に対する新しい展望を提供するものとなっている。とりわけ，数学的過程を支える能力群（コンピテンシー）を明示し，従来の数学教育で育成してきたはずの「学力」の捉え方がやや狭いものであったことを浮き彫りにした（清水，2009）。

周知の通り，OECD/PISAの枠組みでは，具体的な評価課題を作成する観点として，次の３つの構成要素が想定される。

・問題が埋め込まれた場面（状況）
・用いられる知識や技能の内容や形式
・用いられる過程（プロセス）

特に，数学的リテラシーの評価の枠組みの場合，数学的内容，数学的プロセス，数学が用いられる状況の３つの構成要素である。

評価課題では，評価対象者となる子どもにとって身近な問題場面（状況）を想定し，私的な生活上の場面や教育（学校生活）の場面，職業に関わる場面や地域社会などの公的な場面，さらには科学（数学）的場面などを設定する。

用いられる知識や技能の内容や形式については，OECD/PISAでは，学校教育の枠組み（例えば，日本の学習指導要領）には直接には対応していない。例えば，数学的リテラシーの評価では，課題の数学的内容について，伝統的な学校数学の領域に基づく捉え方ではなく，身の回りの事象にアプローチする際に用いられる基本的かつ包括的な数学的アイディアに焦点を当てる。

一方，用いられる過程（プロセス）の評価を考えることも重要である。例えば，数学的リテラシーでは，数学的過程で用いられる能力群について，思考と推論，論証，コミュニケーション，モデル化，問題設定と問題解決，表現などの能力が総合的に働くことを想定した問題が出題される。

このOECD/PISA数学調査は，様々な状況での問題を，数学的問題として定式化して解

決し，その結果を解釈する過程で発揮される複合的な能力を評価することをねらう。すなわち，その状況に含まれる要素を分析し，適切な推論によって結果を導き，その結果に基づく判断を表現したり伝達したりする能力である。この枠組みの新しさは，学習者が用いる数学的過程を支える能力群を明示したこと，事象を考察する際の大きな数学的アイディアの観点から数学的内容を整理したこと，問題が埋め込まれた状況・文脈を生徒の立場から分類したこと，そしてこれら３つの次元を組み合わせて数学的リテラシーの評価を位置付けたことにある。

「思考・判断・表現」の評価においても，数学的問題解決の過程や数学的モデル化の過程，あるいは数学的探究の過程に位置付けて，ある文脈に埋め込まれた問題場面，そこで用いられる数学的内容，そしてそこで用いられる数学的プロセスの３つの側面に焦点を当てた評価問題を作成することが考えられるであろう。次節では，この立場から，具体的に考えられる評価問題の開発の視点を挙げてみたい。

３　「思考・判断・表現」の評価課題開発の視点

（１）評価課題の構成の領域

PISA調査の焦点は，生徒が身に付けている知識･技能を現実の場面で使えるかどうかを調べることにある。そのために，評価課題の数学的内容についても，従来のような学校数学カリキュラムの領域や分野に基づくとらえ方ではなく，身の回りの事象にアプローチする際に用いられる基本的かつ包括的な数学的アイディアに第一義的な焦点が当てられた。

この焦点化の仕方の根底には，計算技能の習得や概念の理解よりも，身の回りの事象にみられるパターンや形の特徴，量，変化の様子などを数学的に読み解き，把握する力に焦点を当てることが重要だという考え方がある。PISA数学調査では，そのような数学的アイディアとして，例えば,「量」,「形」,「変化」,「不確実さ」などの基本的な観点（「大きなアイディア」）に関わる事象に対する数学的方法をとらえることが行われてきた。「科学技術の智」プロジェクト（北原他, 2008;浪川, 2009）では，この内容を「数量」「空間と形」「変化と関係」「データと確からしさ」の４つの観点からとらえている。

（２）学習過程の再考

数学的な知識・技能を活用して的確に判断を下し，自分のおかれた状況を批判的・反省的にとらえる力を育成する，という観点から学習過程を構想する場合，鍵となるのは数学化（*mathematisation*）の位置付けである。OECD/PISA数学調査の枠組みは，この数学化について，以下のような5つの下記過程を示し，結果的に現在の学校数学の学習活動が限られたものであることを示唆している（OECD, 2003, pp.38-40）。

①現実性に根ざした問題から始める。
②数学的概念によってその問題を組織し，問題に関連する数学を同定する。
③仮定をおいたり，一般化・形式化したりする過程を通して，徐々に問題の現実性を取り除いていく。このことによって状況の数学的特徴付けが進み，現実世界の問題を，状況を忠実に表現する数学の問題に変換する。
④数学の問題を解決する。
⑤現実的状況からみて，数学的な解の限界を特定することを含め，その解の意味を考える。

実際，従来の学校数学は，上記④に焦点を当ててきたとみられ，数学的リテラシーが必要とされ，また発揮される学習過程を，この一連の過程を経る学習活動として構成する必要がある。すなわち，現実性に根ざした問題を数学の問題に変換する過程（上記①～③），得られた数学的な解の意味を現実的状況から考える過程（上記⑤）である。

同様の観点から，以下のような課題解決型学習の形で学習活動を構成することも考えられる（渡辺，2008）：（ア）課題の設定，（イ）統計的データの問題への帰着，（ウ）データの収集，（エ）データの記述と分析，（オ）結果の統計的解釈，（カ）統計的に解釈された結果を元の課題の文脈と結びつけて考察し，他人に伝えること，（キ)結果に基づくアクション（予測，標準化，管理など）が想定できること，もしくは，新たに検証すべき仮説や課題を見出すこと。

（３）マネジメント（PDCA）の視点

全国学力・学習状況調査における「活用」の問題のねらいの一つは，PDCAサイクルで発揮される問題解決能力の評価にある。全国的な学力調査の実施方法等に関する専門家検討会議は，その報告書（2006）で示された問題作成の基本理念は次の通りである（p. 7)。

・身に付けておかなければ後の学年等の学習内容に影響を及ぼす内容や，実生活において不可欠であり常に活用できるようになっていることが望ましい知識・技能など（主として「知識」に関する問題)。
・知識・技能等を実生活の様々な場面に活用する力や，様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力などにかかわる内容（主として「活用」に関する問題)。

この基本理念に呼応する形で，全国学力・学習状況調査（中学校数学）では，「活用」の問題作成のために，数学的なプロセスを中核に据えた枠組みが設定されている。このプロセスは，数学的活動の諸相において活動を支え，またその活動を遂行するために必要となる資質や能力を示している。その意味では，出題された問題とその趣旨は，数学科の学習を通して身に付けることが期待される学力像を，具体的な文脈における問題解決に必要な資質や能力の形で例示しているものと解釈できる。特に，「様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力」に関する問題を出題し，そのような子どもの力を評価することが主要な柱の一つである。これは，構想を立て（Plan)，その構想に基づいて計画を実行し（Do)，実行した過程を点検し（Check)，さらに改善して次の行為に活かす（Action）というマネジメントサイクルを示している。

表２：PDCAサイクルとポリアの問題解決過程

マネジメント	ポリアの４つの相
（問題）	問題の理解
構想を立て（Plan）	計画の考案
その構想に基づいて計画を実行し（Do）	計画の実行
実行した過程を点検し（Check）	振り返り
改善して次の行為に活かす（Action）	

数学教育においては，従来から，G.ポリアのいう問題解決の４つの相を重視してきた。問題を理解し，計画を立て，それを実行し，振り返るという過程である。ポリアは，この４つの相に数学の問題解決に役立つ様々なアイディアを埋め込んだ。

これに対し，上記のPDCAサイクルは，生産管理や品質管理の手法に由来する。従来の数学科の指導では，教えるべき内容がまずあって，その内容をよりよく指導するために問題解決の形をとる。これに対し，現実世界には，過剰な情報の中から有用なものを選択して真の問題を見極めたり問題の条件を理想化したりする問題発見や問題形成の段階があり，PDCAサイクルはそこで生きる。

これらのプロセスの異同に着目すると，数学科の学習指導をより広い立場から捉える視点として，G.ポリアのいう「問題を理解すること」の前，及び「振り返ってみること」の後が注目される。すなわち，問題の発見と解決の後の発展，改善である。

全国学力・学習状況調査では，調査の枠組みのうち，「β：様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力」，及び「$\gamma 1$：他の事象との関係を捉えること」「$\gamma 2$：複数の事象を統合すること」「$\gamma 3$：多面的にものを見ること」がこの側面に対応している。

具体的には，数や図形に成り立つ性質を見出し，それが正しいことを説明するために方針を立てて実行し，必要に応じてそれを修正する活動，一度得られた結果を振り返って考えること，それをさらに結果を改善してよりよいものにすること，またさらに発展的に考えることなど，がある。

（４）オープンエンドアプローチによる問題解決と問題設定への着目

問題の設定という観点から注目されるものに，島田（1977）らによるオープンエンドアプローチや，BrownらによるWhat if not?がある。島田らは，数学科における高次目標の評価方法に関する開発研究の一環として，答えが一つに決まらない問題を取り入れた指導の研究を行った。例えば，「おはじきのちらばり」の問題では，以下のような場面で，どの場合のちらばりが最も大きいかを考える（**図１**）。

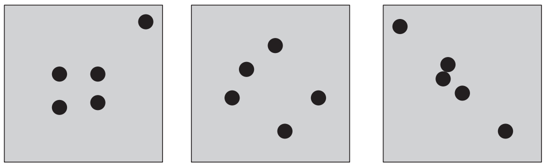


図１：おはじきのちらばり

このちらばりの程度を把握する仕方には，例えば，すべてのおはじきが含まれるような円を考えてその半径で大小を決める方法（**図２**）や，おはじきの位置を点とみて結んだ線分の長さの総和で大小を決める方法（**図３**）等がある。どの方法を用いるかによって，解答が変わってくることが重要である。

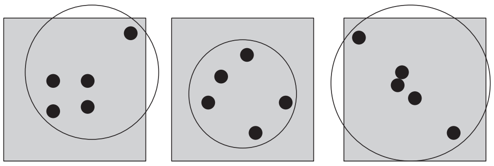


図２

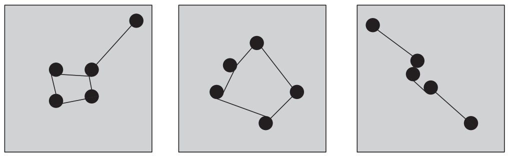


図３

（５）数学的モデル化における仮定の吟味とその改善

学校で学ぶ数学の力が社会生活において機能的に活用できるようになって身に付けられているかどうかが，数学教育に関する今日的動向の一つである。また，最近では，中学校の数学科の教科書にも，地球温暖化問題や，桜の開花日の予測の問題等を扱う数学的モデル化過程を想定した教材が掲載されるようになってきた。数学を実生活と関連させて学ぶためには，学習場面に身の回りの事象（「現実の世界」）を持ちこむことが大切になる。そのためには，現象や事象を数学の舞台に載せる過程，及び数学による処理の結果を現実の事象に戻す過程を大切にする必要がある。

このように算数･数学を活用して現実世界の問題を解決する過程は，「数学的モデル化過程」とよばれる。この過程は，大きくみると，下記のような４つの下位の過程から構成されている（三輪，1983）。

①現実の世界の問題を数学的モデルに定式化する（たとえば，問題場面から式を立てたり，集めたデータをグラフに表現したりする）。

②数学的モデルについて，数学的な処理を行う（たとえば，式を計算して解を求めたり，グラフを用いて結論を導いたりする）。

③得られた結果を解釈・評価し，現実の世界と比較する。

④問題のより進んだ定式化（よりよいモデル化）を図る。

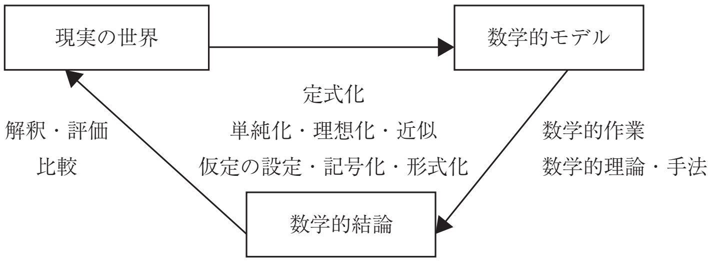


図４：数学的モデル化過程（三輪，1983，p.120）

このような数学的モデル化の過程を経て，現実世界の問題を解決する場合，それを数学の問題に定式化するために，条件を単純化したり理想化したりして数学的モデルを作成する必要があるし，得られた解を現実に戻して評価する必要がある。

（６）初等教育段階における「思考・判断・表現」の評価

前述のように，長崎（2009）は，数学的リテラシー論の立場から学校教育の役割を見直し，次のように指摘する。「学校教育では，子どものそれぞれの発達段階においてその能力を十分に伸ばすという実現の役割と，数学的リテラシーを育成するという準備の役割との二重の役割を考える必要がある」（p.24）。

しかし，そのような数学的リテラシーの育成のための「準備」を規定するのは容易なことではない。清水（2013a）は，そのような作業を行う上での論点を確認するために，ある事象を考察する際に用いられる数学的能力を評価する問題を構成することを通して，数学的リテラシーの「原型」を描き出す基礎作業を試みた。その際，現在の学校数学の目標や内容を規定する学習指導要領を前提とせずに評価課題を開発し，その検討を行うことで論点の析出を試みた。

課題の一例は，「たつの子太郎」の問題である。この課題は，「数量」に関する問題場面を扱うもので，問題場面の中で，児童が自ら必要な情報を補って，適切な「単位」を設定し，その単位を用いて大きさを評価し，必要な設計をすることが求められる（**図５**）。

現在の算数科では，このような「単位」についての扱いは，「量と測定」領域の指導において，「測定の４段階」の一部を構成する「任意単位による測定」の段階において典型的にみられる。しかし，そのような学習場面では，学習対象となる標準単位の導入のための過渡的な学習場面として活動が展開される。しかし，日常の場面では，あるもののいくつ分，という観点から測り取ったり数値化したりすることによって処理することが多い。さらに，課題１の「りゅう」の絵は，全体の一部しか表現されておらず，この情報に基づいて「りゅう」をつくるためには，「数学の外」の知識に基づく判断が必要になる。従来の算数・数学における評価問題では，そのような日常的な知識を解答の根拠にすることは避けられてきた。

課題１

けんたさんのクラスでは，「たつの子太郎」のげきをするために，大きなりゅうをつくることになりました。ところが，りゅうの大きさがわからないので，絵本をみて調べる事にしました。

たつの子太郎

上の絵は，「たつの子太郎」が，りゅうに乗っている様子です。この図から考えると，りゅうの長さは何メートルくらいだと思いますか。こたえとそのわけを書いてください。

図５：評価問題「たつの子太郎」（清水, 2013b）

以上のように，この課題では，情報を読み取って自ら適切な「単位」を設定し，その単位を用いて大きさを評価し，必要な設計をすることが求められる。「げきをする」という現実的な文脈への配慮と，自ら見出す単位の利用とが求められる点に，キー・コンピテンシーに対応する（広義の）「道具を相互作用的に用いる能力」が用いられることを想定している。

公立小学校第４～第６学年児童486名を対象とした調査の結果は，現実の場面で情報を補いつつ自ら単位を設定してりゅうの長さを求め，その根拠を説明できた児童が，各学年で約３～４割程度みられた一方，「げきをする」という現実場面からくる要請を考察内容として配慮した児童は非常に少数であった。このことは，評価課題における文脈の設定の難しさを示しており，文脈設定が評価課題の設計における重要な検討事項であることを示唆している。この結果は，数学的リテラシーの評価課題の構成において，問題場面において児童が用いる数学的方法の質的な差異に着目する一方で，児童が巻き込まれる適切な文脈設定が必須であることを示している。

（７）統計的探究活動における「思考・判断・表現」の評価

算数・数学科では，国際的な通用性，内容の系統性の確保や小・中学校の学習の円滑な接続等の観点から，統計の内容の充実が図られている。それは，小学校での数量関係領域を強化し，中学校での「資料の活用」の新設によって統計に関する内容を位置付けて充実し，さらに高等学校で統計の内容を学習する「データの分析」を「数学Ⅰ」に位置付けることによって必修化したことに現れている。

統計領域での「思考・判断・表現」の評価を考えると，実社会の生活で，データに基づいて的確に結果を導き，その結果に基づいて判断でき，それを他者に的確に伝えることのできるコミュニケーション力をもった「賢い統計使用者」がイメージされる。実際，現在

の社会では，必要なデータを集め，そのデータに基づいて適切な判断を行い，それに基づいて行動を決定したり，その結果を根拠として人と議論したりすることが非常に大切である。そのようなデータとの「付き合い」方として重要な５つの視点がある。（渡辺，2008）

・全体のばらつきを測り，現状の傾向を把握する（分布をよむ）
・層別して，グループ間の特徴を比較し，違いをみつける
・変数間の関連性をみて，因果構造と要因効果を知る
・時間系列に沿って，変化のトレンドやパターンの特徴をつかむ
・データを分類する

また，自然現象や社会現象へのアプローチの基本には，測る，予測する，制御するということがある。そのことを踏まえたデータ分析の方法には，次のようなものがある（ベネッセコーポレーション，2010)。ある問題（事象）を考察するために，要因の候補がどのような性格のものかによって，分析の手法を使い分けるのである。

・比較する（グループ間の特徴を比較して違いを見る）
・関係を調べる（数値として表せる要因候補と目的がどういう関係なのかを調べる）
・傾向をつかむ（時間の推移に伴う傾向の変化を見る）

学校教育の出口で，生徒にこのような力が身に付いているようにするために，それぞれの学校段階で行われるべき活動や身に付けるべきスキルや思考力を明らかにし，その育成のために適切な教材を開発することは最も難しく，しかし最も大切な作業であるように思われる。

高度に情報化が進んだ知識基盤社会といわれる今日の状況下では，ある事象についてのデータから，事象にみられる変化や傾向（トレンド）を読み解いて判断や意思決定をする能力を伸ばすことは，重要な教育課題である。特に，ある事象についてのデータから要因間の関係を調べたり，時間経過に伴う変動の傾向を調べたりすることは，ますます重要になってきている。このようにデータを収集したり分析したりする過程における「思考・判断・表現」の評価のための教材開発も重要な検討課題である。

4　まとめと今後の課題

OECD/PISA数学調査に端を発する今日的数学的リテラシー論は，今日の社会に生きる市民に必要な数学的能力とは何かを考察する上で，また現在の学校数学の目標・内容・方法を再考する上で示唆的である。PISAの結果の公表では，数学の「学力」の国際比較による科学的データの提供という側面に報道の焦点が当てられ，平均得点の国際比較などに関心が集まる。しかし，この調査において中核となっているのは，「生きてはたらく数学的な知識と技能」と，その根底にある反省的考察の力や姿勢などをも込めた新しい立場からの「数学的リテラシー」という考え方である。

このような立場から，算数・数学科における思考力，判断力，表現力の育成とその評価に関する教材開発を行い，実践研究を蓄積することによって，望ましい教材のあり方や授業場面での具体的な評価方法を検討する必要が生じている。

本章で検討したように，算数・数学科における思考力，判断力，表現力の評価においては，問題発見力や問題設定力，さらには数学を活用した意思決定力やマネジメント能力という視点からの検討も必要である。また，「オープンエンドアプローチ」による教材とその

開発の視点を参考にしたり，モデル化における第２，第３のサイクルを想定した評価問題を検討したりすることによって，従来の評価においては十分に光が当てられてこなかった面について，具体的な検討をすることが必要である。

〈引用参考文献〉

北原和夫他（2008）『21世紀の科学技術リテラシー像～豊かに生きる智～プロジェクト数理科学専門部会報告書』（http://www.science-for-all.jp/）

国立教育政策研究所（2004）『PISA2003調査　評価の枠組：OECD生徒の学習到達度調査』ぎょうせい

島田茂（編）（1977）『算数・数学科のオープンエンドアプローチ』みずうみ書房

清水美憲（2007）「数学的リテラシー論が提起する数学教育の新しい展望」（小寺隆幸，清水美憲編）『世界をひらく数学的リテラシー』明石書店

清水美憲（2012）「評価問題作成における数学的なプロセスへの焦点化－全国学力・学習状況調査（中学校数学）の動向と課題－」日本数学教育学会誌・数学教育，94（9）, 30-33.

清水美憲（2013a)「数学的リテラシーの評価課題の構成に関する一考察―小学校児童を対象とした評価課題の設計とその分析―」日本数学教育学会誌数学教育学論究・秋期研究大会特集号

清水美憲（2013b)「『数学の方法』領域の設定と他教科への越境―算数科カリキュラム再構成の視点―」算数授業研究第86号，算数授業論究IV，pp.12-15.

全国的な学力調査の実施方法等に関する専門家検討会議（2006）『全国的な学力調査の具体的な実施方法等について（報告）』文部科学省

長崎栄三，阿部好貴（2007）「我が国の数学教育におけるリテラシーとその研究に関する動向」日本数学教育学会誌・数学教育，第89巻9号，pp. 11-20

浪川幸彦（2009）「日本における数学的リテラシー像策定の試み―『科学技術の智』プロジェクト数理科学専門部会報告書―」日本数学教育学会誌・数学教育，91（9）, 21-30.

ベネッセコーポレーション（2010），『数コミBook―データに基づく客観的なコミュニケーション力を鍛える』Benesse

渡辺美智子（2008）『身近にある統計―事例から学ぶやさしい統計の活用方法―』品質月刊委員会

Brown, S.I. & Walter（1985） What if not: The art of problem posing. Addison

Common Core State Standards Initiative（2010）. *Common Core State Standards for Mathematics* , http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf.

Organisation for Economic Co-operation and Development（2009） PISA 2009 Assessment Framework: Key Competencies in Reading, Mathematical and Science.（国立教育政策研究所監訳（2010）『PISA 2009年調査評価の枠組み：OECD生徒の学習到達度調査』明石書店）

Organisation for Economic Co-operation and Development（2005） *The Definition and Selection of Key Competencies: Executive Summary* .（「コンピテンシーの定義と選択［概要］」，ドミニク・S・ライチェン, ローラ・H・サルガニク編著, 立花慶裕監訳『キー・コンピテンシー―国際標準の学力をめざして』明石書店）

OECD（2006）Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006（国立教育政策研究所（2007）『生きるための知識と技能３：OECD生徒の学習到達度調査（PISA）2006年調査国際結果報告書』ぎょうせい）

Polya, G.（1957）*How to Solve It 2nd Edition*. Princeton, N. J.: Princeton University Press （柿内賢信訳（1975）『いかにして問題をとくか』第11版，丸善）

UNESCO（2005）*Education for All: Literacy fro Life. Education for All Global Monitoring Report 2006*. The author

3　算数・数学科における「思考・判断・表現」の評価問題の開発
－日常的な事象の幾何学化を例に－

東京学芸大学教育学部　准教授　西村圭一

1　はじめに

本書の拙稿「算数・数学科におけるルーブリックを用いた『思考・判断・表現』の評価の展望」（p.84）で，水準（想定される「思考・判断・表現」の習得状態のモデル）や系統に基づく評価問題を開発することが課題であることを述べた。とりわけ，内容ごとのまとまりで学習が展開される日本の算数・数学の学習ではあまり光が当てられてこなかったプロセスの評価問題の開発が要請されることを指摘した。そこで，本稿では，そのような評価問題の開発のプロトタイプとして，日常的な事象を幾何学化することに関する「思考・判断・表現」の評価問題を提案する。

その際，子どもが習得している「思考・判断・表現」を最大限に発揮できるようにするために，紙に印刷された問題を個人で読み解き，解決させ，その結果を回収，採点し，返却するという，従来の評価観を一旦脇に置くことにする。すなわち，問題場面の説明を教師がしたり，映像を用いたりすること，個別解決の後，グループ等で協働して一つの解答を作成すること，解決過程や解決結果を発表することなどを含めた評価を考えていくことにする。

2　日常的な事象を幾何学化する評価問題の枠組み

幾何学化とは，事象を，その位置や大きさ，形等だけを抽象し，図形に表すことである。事象を幾何学化することにより，図形の性質を用いて調べたり，関数関係を見出したりすることが可能になることがある。

事象の幾何学化に関しては，松元（2007）が，「静的」「動的」と「見える線を捨象する」「見えない線をかく」の２つの次元からなる教材の枠組みを提案している。西村（2008）は，それを精緻化し，事象の状態（静的・動的）と事象の表し方（平面的・空間的／見える線のみで構成，見えない線をかく）の２軸８項目から成る枠組みを提案した（**表１**）。

表１　幾何学化を要する問題の枠組み

	平面的		空間的	
	見える線のみで構成（V）	見えない線をかく（U）	見える線のみで構成（V）	見えない線をかく（U）
静的				
動的				

「静的」は事象が静止した状態での考察が可能な問題場面であるのに対して，「動的」は事象が動く様子を考察の対象とする問題場面である。「平面的」は１つの平面図や側面図に表すことで考察が可能な問題場面であるのに対して，「空間的」は複数の投影図や見取り図での考察が必要な問題場面である。また，「見える線のみで構成」とは，実在する物体を

捨象して直線や線分と捉えることであるのに対して，「見えない線をかく」は，事象間の関係等を表す直線や線分を見出すことである。（なお，事象の辺の比や角の大きさを保持した縮図に表すかどうかの判断は，主として問題場面に依存することなので，問題の枠組みには加えていない。）

本稿では，この枠組みに基づいて，日常的な事象を幾何学化することに関する水準を次のように設定する。

水準Ⅰ：静的な事象の目に見える構成要素を捨象し，図に表す。

水準Ⅱ：動的な事象の目に見える構成要素を捨象したり，静的な事象における構成要素間の関係を表す目に見えない線を抽出したりして，図に表す。

水準Ⅲ：動的な事象における構成要素間の関係を表す目に見えない線を抽出し図に表したり，静的な事象の目に見える構成要素を捨象し視点の位置を変えた複数の図に表したりする。

水準Ⅳ：動的な事象の目に見える構成要素を捨象したり，静的な事象における構成要素間の関係を表す目に見えない線を抽出したりして，視点の位置を変えた複数の図に表す。

水準Ⅴ：動的な事象における構成要素間の関係を表す目に見えない線を抽出し，視点の位置を変えた複数の図に表す。

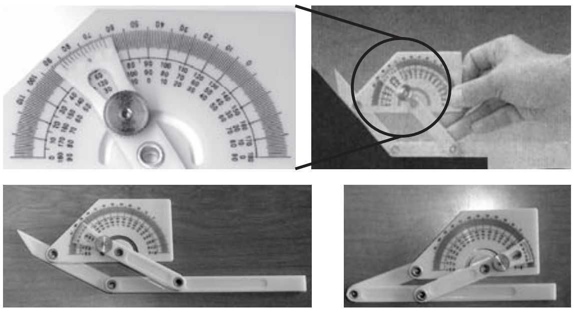
次の**3**で，これらの水準に対応する評価問題例を示すことにする。

3　日常的な事象を幾何学化する評価問題

2に述べた枠組みに基づく，８つの評価問題を提案する。

①**【水準Ⅰ】**（静・平Ⅴ）「なるほど分度器」

写真のような「なるほど分度器」では，直接分度器を当てることのできない坂道の斜度のような角度を測ることができる。そのわけを説明しなさい。



この分度器の構造が，平行線の角の性質や平行四辺形の性質に基づいていることを見出し，幾何学化し，説明する。測定対象の角を合わせるのは左のバーの左側であり，角度を読み取るのは真ん中のバーの中央なので，**図１**のような図をかいて説明することが考えられる。

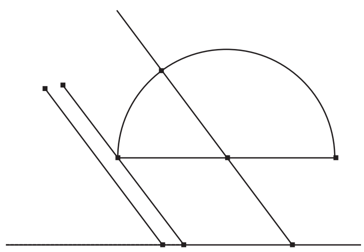


図１　「なるほど分度器」の幾何学化の例

②【水準Ⅱ】（動・平V）「バスのワイパー」

写真のバスのワイパーは，平行四辺形型のアームの上側の辺と，水をはき取るラバー部分が直角に固定されている。アーム部は，平行四辺形を保って左右に往復する。ゴムの部分はどのような動きをするかを，図形の性質をもとに説明しなさい。

図 2 のような図をかいて説明することが考えられる。

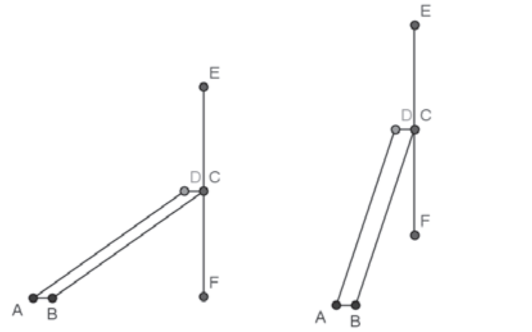


図 2　「バスのワイパー」の幾何学化の例

③【水準Ⅱ】（静・平U）「てくてくスケール」

写真のように，スカイツリーの形に切り抜かれた（高さ10cm）「てくてくスケール」がある。この切り抜かれた部分にスカイツリー（634m）がぴったり収まったときの，目とスケールの間の長さを測り，スケールに書かれた表を見ると，その地点からスカイツリーまでのおよその距離がわかる。例えば，38cmならスカイツリーまで2375mである。このようにして距離が求められる仕組みを説明しなさい。また，15cm，50cmのときの，その地点からスカイツリーまでのおよその距離を求めなさい。

http://www.m-do.com/tekusuke/photo/higashimukoujimaeki.jpg

図 3 のような図をかき，縮図や相似の性質，三角比を用いて説明することが考えられる。

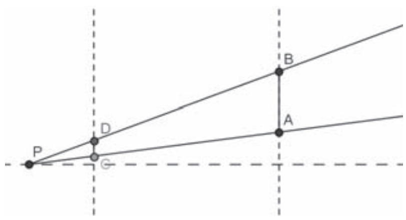


図 3　「てくてくスケール」の幾何学化の例

④【水準Ⅲ】（動・平U）「車のワイパー」

車のワイパーの形状は，車種によって様々である。写真１の車の２本のワイパーの長さは，大きく異なる。写真２のように，２本のワイパーの長さが等しい場合と比べて，どのようなメリットがあるか。数値や図を用いて，具体的に説明しなさい。

写真１

写真２

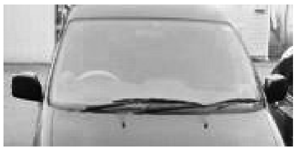


図４のような図をかき，動く範囲等を比較し，メリットやデメリットを説明することが考えられる。

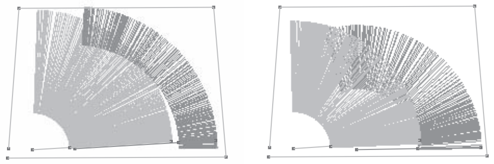
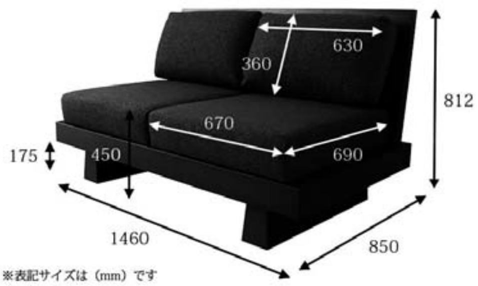


図４　「車のワイパー」の幾何学化の例

⑤【水準Ⅲ】（静・空Ⅴ）「ソファ」

はるかさんは写真のソファを買いたいが，部屋に入れることができるか心配である。ドアの大きさを測ったところ，幅78cm，高さ２mだった。このソファを運び入れることはできるだろうか，できないだろうか。そう考えた理由も説明しなさい。



http://image.rakuten.co.jp/momu/cabinet/sofa/hida/hida2p_14.jpg

図５のような，必要な要素のみで構成したソファの投影図をかき，それを用いて，ドアを表す長方形に収まるかどうかを調べることが考えられる。

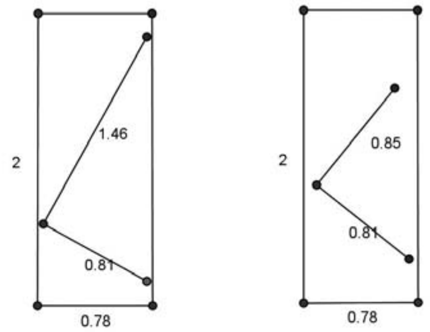


図５　「ドアとソファ」の幾何学化の例

⑥【水準Ⅳ】（動・空Ⅴ）「屈折はしご車」

写真の屈折はしご車の最高到達点は地上25mである。このはしご車がマンションの壁から３mの位置に停車している。はしごの先端のバスケットが届く範囲を説明しなさい。

https://www.city.ito.shizuoka.jp/contents/image000006300/hasigo2.jpg

図６のように，２つのアーム部が，それぞれアームの長さを半径とする円弧を描くと捉え，投影図や見取り図等を相互に結び付けながら，届く範囲を図示することが考えられる。

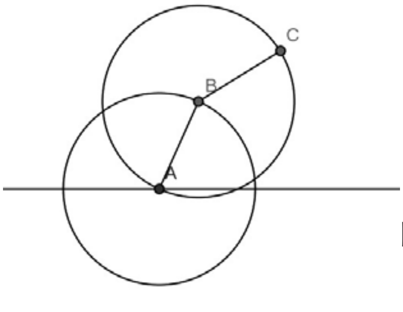
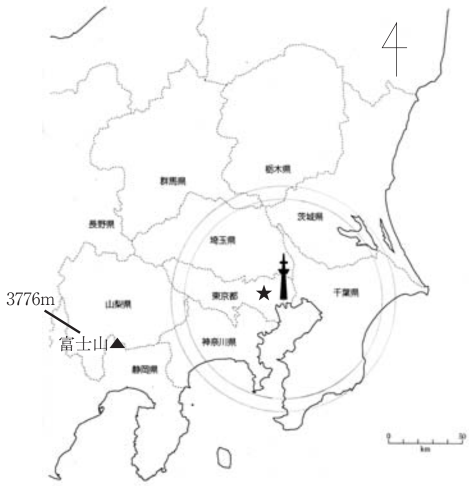


図６　「屈折はしご車」の幾何学化の例
（はしご車の正面から見た図）

⑦【水準Ⅳ】（静・空U）「富士見坂」

東京都内のJR山手線内とその周辺には，「富士見坂」という名の付く場所が20カ所ほどある。しかし，高層ビルが増え，現在では，富士山を望むことができるのは，荒川区日暮里の富士見坂，１カ所だけとなってしまった。

ところが，その富士見坂から富士山を望む方位に高層ビルが建設予定だということがわかった（下記，2012年１月30日　朝日新聞参照）。富士見坂からビルの建設予定地までの距離が6.2km，標高差が＋10mのとき，ビルの高さや大きさがどのくらい以上あると，富士山の頂上は見えなくなってしまうか。




見納めの？ダイヤ

東京都内から富士山が見える坂として知られる荒川区の「日暮里富士見坂」で29日、富士山頂に夕日が沈む「ダイヤモンド富士」が見られた。約６㌔離れた新宿区大久保に建設中のビルのため、坂からの富士山が見られなくなる可能性があり、この日は地元の人や見物客ら約200人が頂に沈む夕日を眺めた。

同坂からのダイヤモンド富士は毎年１月下旬と11月中旬の数日間見られ、今月は30、31日も楽しめる。坂の近くに住む金子誠さん(85)は「幼い頃から見慣れた景色。なくなるのは寂しい」と話した。（遠藤啓生撮影）

朝日新聞デジタルに関連動画

側面図と平面図をかき，縮図や三角比を用いて，富士山の頂上部を完全に隠してしまうビルの高さと幅を求めることが考えられる。

⑧【水準Ⅴ】（動・空U）「日照」

ある駅前に，右図のような高さ132mの超高層マンションが建設予定である。写真（または動画）は，冬場の太陽の動きである。この日の，マンションの影の動きを予想しなさい。

http://resemom.jp/imgs/zoom/4199.jpg

http://blog-imgs-59.fc2.com/u/r/b/urbanreallife/kokubunji.jpg

図7のような天球と地図とを相互に関連付けながら，マンションの影の軌跡を調べることが考えられる。

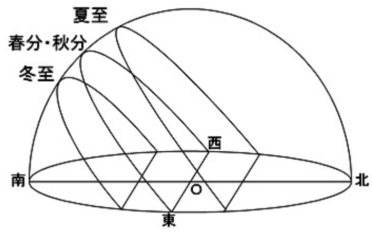


図7　天球モデル

4　おわりに

3に示した①～⑧の評価問題の解決に当たっての困難性は，幾何学化だけでなく，用いる数学にも依存する。したがって，それぞれの問題で，幾何学化，数学的推論・分析，数学的コミュニケーションのような軸を設け，ルーブリックを作成し，多面的に解決の質を捉える必要がある。

また，**2**の枠組みに基づきつつ，児童・生徒の算数・数学の学習の進展に応じた問題を開発する必要がある。そして，それらの問題に対する児童・生徒の解決の様相を分析することで，日常的な事象を幾何学化することに関する水準（習得状態のモデル）を修正したり精緻化したりすることが期待される。

さらに，内容ごとのまとまりで学習が展開される日本の算数・数学の学習であまり光が当てられてこなかった他のプロセス，例えば，「関数とみなす」ことや「データに基づいて意思決定する」ことに関する「思考・判断・表現」の水準モデルとそれに基づく評価問題のプロトタイプの開発が今後の課題である。

〈引用参考文献〉

太田伸也（1997），「生徒に幾何の世界を構成させる図形指導（２）－『写真に写る大きさと距離との関係』を題材に－」，日本数学教育学会誌第79巻第5号，pp.24-32

太田伸也（2002），「太陽の動きを捉えるための数学的モデルを作る活動を通して空間図形の見方を広げる指導」，日本数学教育学会誌第84巻第11号，pp.10-20

西村圭一（2003），「幾何学化をめざす授業の研究」，日本科学教育学会『科学教育研究』，Vol.27 No.3，pp.223-231

西村圭一（2004），「南極・昭和基地の夏至の太陽の動きを予測しよう」，『数学科の授業改善のための教材開発』（太田伸也研究代表，平成13～15年度科研費研究成果報告書），pp.68-77

本田千春・西村圭一（2005），「空間思考力の育成をめざす授業に関する研究－地図から風景をスケッチする教材を用いて－」，日本数学教育学会誌第87巻第７号，pp.13-20

松元新一郎（2007），「数学的モデル化過程における幾何学化の困難性とその克服の方策」，日本科学教育学会年会論文集31，pp.211-214

西村圭一（2008），「数学的モデル化を遂行する力の育成をめざす教材の開発－事象の幾何学化に焦点を当てて－」，日本教材学会『教材学研究』第19巻，pp.171-178

4　算数・数学科における「思考・判断・表現」を評価するための活用型評価問題の開発

山梨大学教育人間科学部　准教授　清野辰彦

1．本稿の目的

知識・情報があらゆる場面で重要性を増す現在の「知識基盤社会」における教育の目的の１つは，新たな考えを創造することができる人間，情報を適切に読み取り，活用できる人間，他者と協調しながら問題解決ができる人間を育成することである。特に我が国は，天然資源が乏しいため，国際社会の中で豊かに生きていくためには，知的資源に頼る必要があり，上記の事柄ができる人間を多く育成していくことが極めて重要である。こうした状況を鑑みた際，算数・数学が果たす役割は益々大きくなると考えられる。あらゆる場面で数学が必要となってくるからである。実際，企業は，数学が様々な場面で重要な役割を果たしていると考えており（瀬沼，2004），また研究者も同様である（長崎他，2006）。

しかしながら，単に算数・数学の知識や技能を学習したとしても，自然には，上述した能力に関わる「数学を活用する能力」が育成されないことは，以前からも指摘されている（W.Blum，M.Niss，1991；Treilibs et.al，1980；T.Ikeda，M.Stephens，2001）。知識や技能を活用して問題を解決するためには，思考力，判断力，表現力が必要であり[1)]，その育成が欠かせないのである。現在，学習指導要領の改訂が大きな原動力となり，思考力，判断力，表現力の育成に向けて，どのような学習指導が有益であるのか，また，その評価をどのようにしていけばよいのかについて，理論的・実践的研究が進められている。

中央教育審議会初等中等教育分科会教育課程部会は，2010年３月に，「児童生徒の学習評価の在り方について（報告）」を発表した。その報告では，思考力，判断力，表現力を評価する観点を「思考・判断・表現」とし，その評価の方法について，次のように述べている。

> 「思考・判断・表現」の評価に当たっては，それぞれの教科の知識・技能を活用する，論述，発表や討論，観察・実験とレポートの作成といった新しい学習指導要領において充実が求められている学習活動を積極的に取り入れ，学習指導の目標に照らして実現状況を評価する必要がある。
>
> 「思考・判断・表現」の評価については，全国学力・学習状況調査の「主として『活用』に関する問題」を参考にして作成した適切な問題を用いて評価を行うことも有益である。ただし，「思考・判断・表現」の評価は，そのような問題を一定の制限時間内に解決し，記述できるかどうかのみを評価するものではないことに留意し，様々な評価方法を採り入れることが重要である。

「思考・判断・表現」を評価する方法として，上記にあるような論述や作成されたレポートを用いた評価が考えられるが，本稿では，評価問題に対する生徒の記述の分析による評価に焦点をあてる。「思考・判断・表現」の評価問題に関して，示唆的であるのは，全

国学力・学習状況調査の「主として『活用』に関する問題」並びにOECD（Organisation for Economic Co-operation and Development）によるPISA調査（Programme for International Student Assessment）の問題である。また，問題を位置付ける枠組みも参考になる。だが，これらの調査は，大規模調査であるために，様々な制約を背負っており，思考力・判断力・表現力において，評価できていない側面がある。真正（genuine）の思考力・判断力・表現力を評価するためには，どのような視点を考慮する必要があるかを明確にし，具体的な活用型評価問題を開発する必要がある。

本稿の目的は，算数・数学科における「思考・判断・表現」を評価するための活用型評価問題を開発することである。そのためにまず，PISA調査の問題並びに全国学力・学習状況調査の問題を批判的に検討し，課題を明確にする。次に，その課題を解消するための視点を明確にする。そして，その視点を考慮に入れ，活用型評価問題の開発を行う。

2．大規模調査における活用型評価問題の課題の同定

（1）「思考・判断・表現」の評価という視点からみたPISA調査の課題の同定

現実事象の問題を知識や技能を活用して問題解決する過程は，数学的モデル化過程と呼ばれる（三輪，1982）。具体的には，以下の過程を辿る。

まず，事象を数理的に捉えるために，抽象化や理想化等が行われる。すなわち，重要でない側面は捨象され，そして複雑な側面は単純化されたり，数学的処理がしやすいように理想化されたりする。また，事象を数学的に表現するために，記号化や形式化等が行われる。この段階は，定式化の段階と呼ばれる。次に，数学的理論や手法を用いた処理が行われ，数学的結論が得られることになる。この段階は，数学的作業の段階と呼ばれる。そして，得られた数学的結論の適切性や妥当性の判断，および評価が行われ，それに満足できない場合は，より良いモデルを求めて，数学的モデル化過程のサイクルが再び行われる。この段階は，解釈・評価・比較と呼ばれる。

上記の過程を辿り問題解決を行っていく際に，数学的アイディアを分析し，推論し，コミュニケーションする能力を生徒が持っているかどうかを調査しているのがOECDによるPISA調査[2)]である。PISA調査は，３つの要素によって構成されている。１つめは，状況と文脈である。状況には，「私的」「教育的／職業的」「公共的」「科学的」の４つが設定されており（OECD，2010），それらの状況の中で特定の場面を表す概念が文脈である。２つめは，数学の内容の現象的構成によって特徴付けられた包括的アイディアである。包括的アイディアには，「空間と形」「変化と関係」「量」「不確実性」の４つが設定されている。３つめは，数学的プロセスである。数学的プロセスには，数学的過程を遂行するために必要な８つの「認知的数学能力」と「再現」「関連付け」「熟考」という３つの能力クラスターが設定されている。

PISA調査は，生徒がどのような状況や能力クラスターの問題に対して，知識や技能を活用して問題解決を行うことができるのか，その一端を評価することに成功した調査である。それゆえ，調査問題のいくつかは（熟考クラスター問題等），「思考・判断・表現」の活用型評価問題として利用することは可能である。だが，PISA調査問題の課題も見出せる。１つ目の課題は，調査対象についてである。PISA調査の調査対象は，15歳児（多くの生徒が正式な義務教育における数学の学習を修了する時期）だけであり，限定的である。

したがって，他年齢の生徒が利用できる評価問題は存在しない。それゆえ，他年齢の生徒に応じた活用型評価問題の開発が必要となる。２つ目の課題は，PISA調査が15歳のみに限定しているため，年齢や学習に伴う思考力・判断力・表現力の「深浅さ」を測ることができない点である。例えば，「比例とみる」という考え方には，「深浅さ」がある。その「深浅さ」を評価することができるような評価問題を開発する必要がある。３つ目の課題は，PISA調査では，思考力・判断力・表現力を発揮しながら問題解決するような「数学の世界」の問題が少ない点である。「思考・判断・表現」を評価する「数学の世界」における活用型評価問題の開発が必要である。

（２）「思考・判断・表現」の評価という視点からみた全国学力・学習状況調査の課題の同定

全国学力・学習状況調査は，教育政策の成果と課題の検証・改善を図るとともに，児童・生徒への指導の充実や学習状況の改善に役立てるための資料を提供することを目的として行われている調査である。調査対象者は，小学校では，小学校第６学年・特別支援学校小学部第６学年の児童であり，中学校では，中学校第３学年・中等教育学校第３学年・特別支援学校中学部第３学年の生徒である。

この調査は，「主に知識に関する問題」と「主に活用に関する問題」によって構成されており，「主に活用に関する問題」は，以下の問題作成の枠組みに基づいて作成されている。

表1　主として「活用」に関する問題作成の枠組み

<table>
<tr><th>活用する力</th><th>活用の文脈や状況</th><th>主たる評価の観点</th><th>活用される数学科の内容</th><th>数学的なプロセス</th></tr>
<tr><td>α：
知識・技能などを実生活の様々な場面で活用する力</td><td rowspan="3">実生活や身の回りの事象での考察
他教科などの学習
算数・数学の世界での考察</td><td rowspan="3">数学的な見方や考え方
数学的な表現・処理
数量，図形などについての知識・理解</td><td rowspan="3">数と式
図形
数量関係</td><td>α１：日常的な事象等を数学化すること
α１(１)ものごとを数・量・図形等に着目して観察すること
α１(２)ものごとの特徴を的確に捉えること
α１(３)理想化，単純化すること
α２：情報を活用すること
α２(１)与えられた情報を分類・整理すること
α２(２)必要な情報を適切に選択し判断すること
α３：数学的に解釈することや表現すること
α３(１)：数学的な結果を事象に即して解釈すること
α３(２)：解決の結果を数学的に表現すること</td></tr>
<tr><td>β：
様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力</td><td>β１：問題解決のための構想を立て実践すること
β１(１)筋道を立てて考えること
β１(２)解決の方針を立てること
β１(３)方針に基づいて解決すること
β２：結果を評価し改善すること
β２(１)結果を振り返って考えること
β２(２)結果を改善すること
β２(３)発展的に考えること</td></tr>
<tr><td>γ：
上記α，βの両方にかかわる力</td><td>γ１：他の事象との関係を捉えること
γ２：複数の事象を統合すること
γ３：多面的にものを見ること</td></tr>
</table>

全国学力・学習状況調査の問題は，実生活において知識や技能を活用する力を評価する問題と，数学の世界において，それらを活用する力を評価する問題の双方が明確に位置付けられている点が特徴的である。また，問題数としては少ないが，「γ」にあたる「事象間の関係の把握」「事象の統合」「多面的な把握」といった力を評価することも意図されている点も特徴的である。こうした特徴的な問題を用いて，「思考・判断・表現」の評価を行っていくことは可能である。だが，一方で，課題も見出せる。１点目は，限定的な学年が調査対象とされていることから起因する課題である。つまり，PISAと同様に，小学校６年生と中学校３年生（実際に評価する内容は，それぞれ小学校５年生と中学校２年生である）以外の児童・生徒が利用できる評価問題が存在しないことが課題である。これは，PISAにおいて指摘した年齢や学習に伴う思考力・判断力・表現力の「深浅さ」を測ることができないことにも関連する。２点目は，調査での道具の制約から生起する課題である。全国学力・学習状況調査は，大規模調査であるため，道具を用いて解答することを想定していない。だが，通常の授業においては，数学的活動を重視しているため，模型を作成したり，コンピューターの図形ソフトを用いて定理を発見したり，あるいはグラフ関数電卓を用いて，グラフを用いた問題解決や統計処理を用いた問題解決をしたりしていると考えられる。それゆえ，道具の使用を可能とした環境の中で，「思考・判断・表現」の評価をすることが望ましいと考えられる。この点が２つ目の課題である。

これまで考察してきたPISA調査と全国学力・学習状況調査の課題を整理し，課題を解消するための視点を記述すると，以下のようになる。

（ア）小学校６年生，中学校３年生といった学年だけでなく，様々な学年に応じた活用型評価問題の開発

（イ）学習に伴う思考力・判断力・表現力の「深浅さ」を測るための活用型評価問題の開発

（ウ）思考力・判断力・表現力を評価するための「現実の世界」と「数学の世界」の双方の活用型評価問題の開発

（エ）思考の道具が整備された状態を想定した活用型評価問題の開発

この４点を視点にして，評価問題の開発を行う。

３．「思考・判断・表現」を評価するための活用型評価問題の開発：「数学の世界」の問題に焦点をあてて

（１）正四面体と正八面体に関する活用型評価問題

①評価問題の開発の背景

正多面体に関する学習は，中学校１年生と高等学校１年生（数学A）において行われている。まず，ある教科書の内容を参考に，各校種における学習内容について整理する。

【中学校１年生】

（あ）正六面体，正四面体，正八面体を作り，共通点と相違点を調べる。

（い）正多面体の定義

（う）５種類の正多面体に関する「面の形」，「面の数」，「辺の数」，「頂点の数」を調べ，表に整理する。

（え）作成した表を基に，（面の数）－（辺の数）＋（頂点の数）を求め，どのようなこと

が言えるのかを考えさせる。
（お）双対性を意識させる。

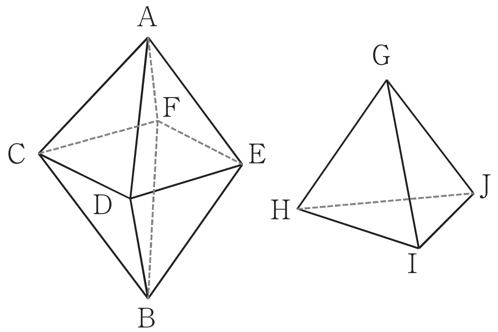
【高等学校１年生（数学A）】
（か）正多面体の定義
（き）正多面体の「頂点の数」,「辺の数」,「面の数」に関するデータが表として提示され，オイラーの多面体定理が示される。
（く）オイラーの多面体定理が，正多面体以外の多面体においても成り立つことを確認する。
（け）教科書の後方の課題学習では，双対性を意識させる問が提示される。

上記の学習内容の整理によって見出されることは，正多面体の学習に関して言えば，「オイラーの多面体定理」という用語が明示されているかどうかという違い以外に，ほとんど学習内容に違いが見られないということである。つまり，学習の深まりがない。同じ学習内容を異なる学年において指導する場合には，これまでとは異なる見方で観ることができるといった学習の深まりを認識させることが重要であると考える。この学習内容において考えられる異なる視点とは，５つの正多面体に対する関係付けである。１つ１つバラバラに見ていた正多面体を高等学校では，関係付けて観ることができるような学習が進められるのが望ましい。こうした学習を想定し,「思考・判断・表現」を評価するための活用型評価問題を高等学校１年生を対象に開発する。その際，思考の道具が整備された状態として，空間図形の考察に関わりのある模型が作成できる環境を設定する。

②問題とその意図

【問題】

図のような１辺の長さが a の正八面体と１辺の長さが a の正四面体を１つの面がはみだすことなく重なり合うように作成した図形について以下の問いに答えなさい。ただし，配布された正三角形のポリドロンを用いて図形を作成し，解答してもかまいません。



（１）実際に模型を作成してみたところ，７面体になりました。７面体になる理由を説明しなさい。

（２）作成した図形の体積を２通りの方法によって求めなさい。

【想定される解決過程】

（１）の問題について

１つの面がぴったりと重なるように正八面体と正四面体を合わせると，**図１**のように表すことができる。今，三角形BDEと三角形HIJは，同じ平面上に置いているので，２面が１面化していることになる。吟味する点は，三角形ACDと三角形AHIが同一平面上にあ

るか，また，三角形AFEと三角形GJIが同一平面上にあるかである。もし同一平面上にあれば，７面になる。

三角形ACDと三角形AHIが同一平面上にあるということは，三角形ACDの面と底面にあたる三角形BDEの面がなす角度と，三角形ADIの面と底面にあたる三角形HIJの面がなす角度が同じにならなければならない。そこで，面がなす角度について考える。

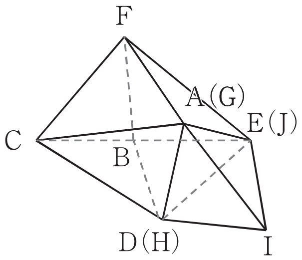


図１　正八面体と正四面体を合わせた状態を表した図

三角形ACDにおいて，点Dから線分CAにおろした垂線の足を点Kとする。すると，線分DKの長さは，三角形CADが正三角形なので，一辺の長さを a とすると，$\frac{\sqrt{3}}{2}a$ となる。また，点Kから三角形BDEにおろした垂線の足をLとする。その時の横から見た図を**図２**に示す。

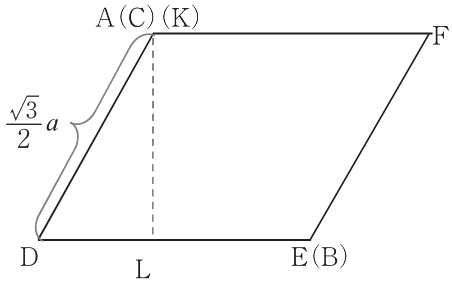


図２　ある視点からみた図（１）

ここで線分DLの長さを求めるために，三角形BDEの面を底面にし，上から眺めてみる。すると，**図３**にように表せる。

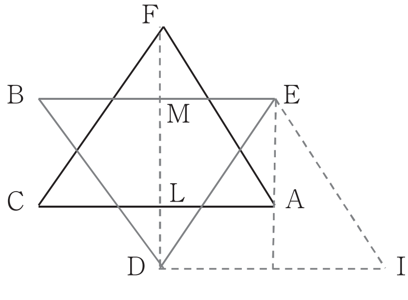


図３　ある視点からみた図（２）

線分DLの長さは，線分FLの$\frac{1}{3}$になる。なぜなら，三角形EDIにおいて，点Aは重心になるので，線分EAと線分MLは等しくなり，さらにDL：MLが１：２になるからである。

よって，$\mathrm{DL}=\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}a$ となる。

そこで，**図２**の三角形KDLにおいて，三平方の定理を用いると，次の式が得られる。

$$KL^2 = KD^2 - DL^2$$

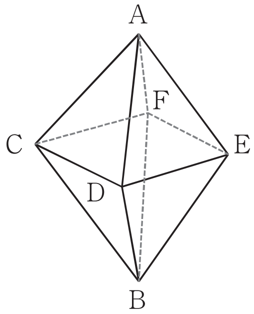
$$KL^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{36}a^2 = \frac{2}{3}a^2$$

$$KL = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

三角形KDLにおいて，余弦定理を用いると，$KL^2=KD^2+DL^2-2\times KD\times DL\times\cos\angle KDL$ となるので，$\cos\angle KDL=\frac{1}{3}$ となる。この角度と，三角形AHIの面と底面にあたる三角形HIJの面がなす角度が同じになることを確かめればよい。

点Aから線分HIへ下した垂線の足を点N，点Aから三角形JHIに下した垂線の足を点Oとする。線分ANの長さは $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ であり，線分NOの長さは $\frac{\sqrt{3}}{6}a$ であるので，線分AOの長さは，$\frac{\sqrt{6}}{3}a$ となる。三角形ANOにおいて，余弦定理を用いると，$\cos\angle ANO=\frac{1}{3}$ となり，三角形ACDの面と底面にあたる三角形BDEの面がなす角度と，三角形ADIの面と底面にあたる三角形HIJの面がなす角度が同じであることが明らかになった。これが，７面になる理由である。

（２）の問題について



正八面体の体積と正四面体の体積をそれぞれ求め，その和を求める方法が１つの解法である。その際には，まず，正八面体の体積を求める。四角形CDEFは，正方形である。線分ABは，四角形CDEFの対角線の交点を通る。その交点をGとして，三角形ACGに三平方の定理を適用し，AGの長さを求める。

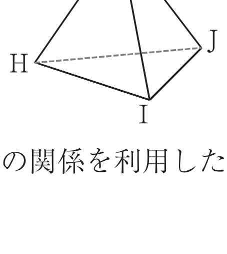
$$AG^2 = AC^2 - CG^2$$

$$AG = \sqrt{AC^2 - CG^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2}{4}a^2}$$

$$AG = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

また，四角形CDEFの面積はa^2であり，AGが $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ であるので，四角錐A-CDEFの体積は，$a^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}a \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$ となる。体積は，この２倍であるので，$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$になる。

次に，正四面体の体積を求める。



正四面体G-HIJの体積は，$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3}a \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ となる。それ故，

$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \times \frac{\sqrt{2}}{3}a^3 = \frac{5\sqrt{2}}{12}a^3$ となる。

これが１つの解法である。もう１つの解法は，正四面体と正八面体との関係を利用した解法である。

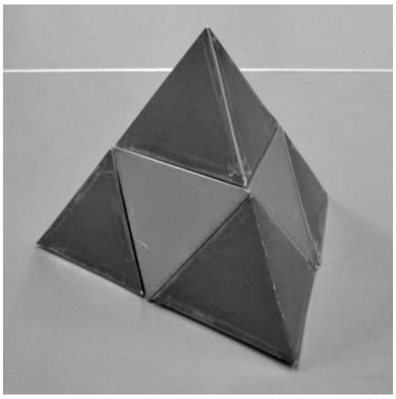


図４　正四面体と正八面体との関係を表す図

上の図形において，頂点にある正四面体と大きな正四面体は，相似比が１：２の相似である。よって，体積の相似比は，１：８になる。それ故，求めたい図形の体積は，頂点の正四面体の５つ分の値になる。

頂点の正四面体の体積は，$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$であるので，その５倍，つまり，$\frac{5\sqrt{2}}{12}a^3$が求める値となる。

【問題の意図】

本教材は，**表１**の「主として『活用』に関する問題作成の枠組み」を用いて特徴付けると以下のように記述できる。なお，様々な学年に応じた活用型評価問題の開発の必要性を意識しているため，**表１**に，評価する学年の欄も設定した。

学年	問題	活用する力	文脈や状況	数学的なプロセス
高校１年生	（１）	β	数学の世界	β １(1)
	（２）	β	数学の世界	β １(2)，β １(3)

問題（１）は，なぜ７面体になるのかを根拠をもって説明することができるかを評価する問題である。この問題は，数学的プロセスのβ １(1)「筋道を立てて考えること」を評価する問題として位置付けられる。

問題（２）は，図形の体積を２通りの方法によって求める問題である。これは，単に体積を求めることができるかを評価するだけでなく，正四面体と正八面体との関係や立体の体積の相似比を利用しながら，体積を求めることができるかを評価するために，あえて２通りの方法を答える問題とした。この問題は，数学的プロセスのβ １(2)「解決の方針を立てること」，β １(3)「方針に基づいて解決すること」を評価する問題として位置付けられる。

（２）正二十面体に関する活用型評価問題

①評価問題の開発の背景

本評価問題では，正二十面体の中に，正五角形を見出したり，正二十面体を20個の四角錐の集まりとみたり，また，正八面体からある図形を切り出していくことによって，正二十面体が作られるとみたりすることができるかを評価する問題を開発する。つまり，図形の中に図形を見出していくという考え方を評価する問題を開発する。その際，先の問題と同様に，高等学校１年生を対象とし，環境としては模型が作成できる環境を設定する。

②問題とその意図

【問題】

正二十面体は，**図１**のように，３枚の長方形を垂直に組み合わせ，それぞれの頂点を結ぶことによって，構成することができます。以下の問いに答えなさい。なお，配布された正三角形のポリドロンを用いて図形を作成し，解答してもかまいません。

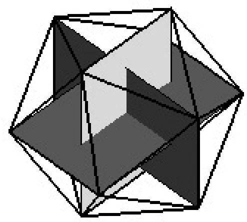


図１

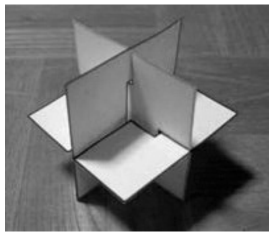


図２

（１）長方形の短辺の長さを a としたとき，長辺の長さを a を用いて表しなさい。

（２）正二十面体における１辺の長さを a としたとき，正二十面体の体積を求めなさい。

（３）あきら君は，３枚の長方形を一辺が a の正方形に変えたとき，何面体になるのかが知りたくなり，**図２**のような模型をつくりました。何面体になるのかを答えなさい。また，その図形の体積を求めなさい。

（４）あきら君は，正八面体が，３枚の正方形を，対角線を利用して垂直に組み合わせることによって，構成されていることに気付きました。そこで，そのことから，正八面体から，ある同じ図形を切り落としていくことによって，正二十面体をつくることができると考えました。あきら君が考えたある図形とは，どのような図形であるかを説明しなさい。

【想定される解決過程】

（１）の問題について

長方形の長辺は，１辺が a の正五角形の対角線の長さにあたる。これを見抜くことができると，次に正五角形の対角線の長さを求めることになる。

正五角形の１辺の長さを a とし，CGを x とする。三角形ACDと三角形DCGは相似であるので，次の式が成り立つ。AC：CD＝DC：CG

よって，$x+a : a = a : x$ であるので，$x\,(x+a) = a^2$ という方程式が得られる。これを解くと，$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}a$ となる。

よって，正五角形の対角線の長さは，$a + x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$ になる。

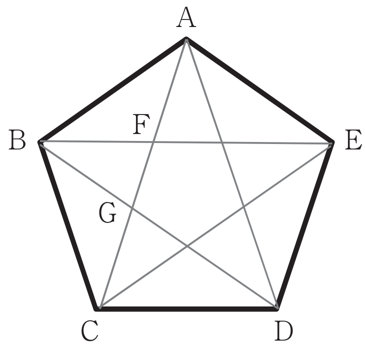


図５　正五角形

（２）の問題について

（２）を解決する際の１つの考えは，３枚の長方形が共有する１点，すなわち正二十面体の中心と，正二十面体の１つの面である正三角形の各頂点とを結ぶ三角錐の体積を求め，それを20倍（20面あるので）する考えである。

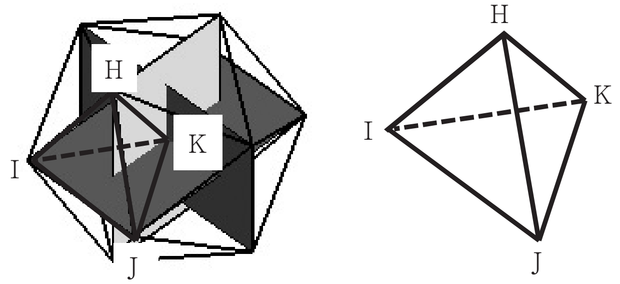


図６　正二十面体の中にある三角錐を表した図

三角形IKJの面積は，長方形の面積の$\frac{1}{4}$になる。つまり，$a\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}a\times\frac{1}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{8}a^2$になる。また，点Hから平面IKJへおろした垂線の長さは，長方形の長辺の長さの半分になるので，$\frac{1+\sqrt{5}}{4}a$となる。ゆえに，四面体H-IJKの体積は，$\frac{1+\sqrt{5}}{8}a^2\times\frac{1+\sqrt{5}}{4}a\times\frac{1}{3}=\frac{3+\sqrt{5}}{48}a^3$となる。この四面体を20個集めた値が，求める正二十面体の体積となる。つまり，$\frac{5(3+\sqrt{5})}{12}a^3$である。

（３）の問題について

（３）の図形は，正六面体の頂点が正三角形の面に変わった図形である。その数は，正六面体の頂点の数にあたる８個である。よって，正六面体である６面と８面を合わせて，14面となる。

体積は，右の図の三角錐の体積を求め，それを８倍した体積を立方体の体積から引けばよい。

立方体の体積：a^3

三角錐：$\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}a\times\frac{1}{3}=\frac{1}{24}a^3$

よって，$a^3-\frac{1}{24}a^3\times 8=\frac{2}{3}a^3$

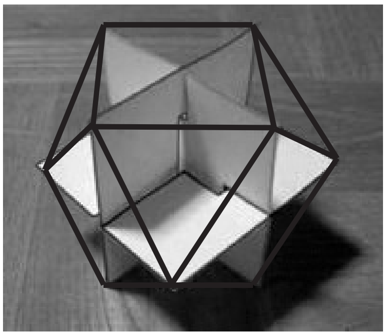


図７　作成された図形

（４）の問題について

（４）の解決では，まず，正八面体を構成する３枚の正方形の中に，正二十面体を構成する縦の長さと横の長さの比が，$1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$の長方形を描くことからはじめる必要がある。具体的には，以下の作図である（**図８**）。

この作図から，正八面体の１辺を$1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$の比で分ける点と頂点を結び，それによって作られる四面体を切り落としていけばよいことがわかる。具体的には，正二十面体の１辺の長さを a としたとき，１辺の長さが$\frac{a}{\sqrt{2}}$の直角二等辺三角形を底面とし，正八面体の辺上の点で長さが，$\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}a$となる点を頂点とした四面体を12個切り落とせばよい。

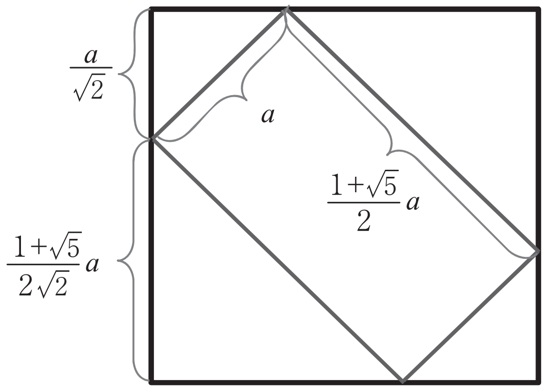


図８　正方形の中に作図する黄金長方形

【問題の意図】

本評価問題は，**表１**の「主として『活用』に関する問題作成の枠組み」を用いて特徴付けると以下のように記述できる。

学年	問題	活用する力	文脈や状況	数学的なプロセス
高校１年生	（１）	β	数学の世界	β 1 (1)
	（２）	β	数学の世界	β 1 (2), β 1 (3)
	（３）	β	数学の世界	β 2 (3)
	（４）	β, γ	数学の世界	β 1 (2), β 1 (3), γ 3

問題（１）は，正五角形の対角線の長さが，長方形の長辺の長さに対応していることを見抜き，その長さを求めることができるかを評価する問題である。正五角形における対角線の長さを求める際には，相似を用い，筋道を立てて考えていく必要がある。それゆえ，数学的プロセスの「β 1 (1)筋道を立てて考えること」を評価する問題として位置付けられる。

問題（２）は，長方形の辺の長さの比が黄金比となる黄金長方形に着目して，体積を求めていくことができるかを評価する問題である。この問題では，正二十面体を12個の四角錐に分解して求めればよいという方針を立て，実際に体積を求めていくことが求められている。それゆえ，数学的プロセスの「β 1 (2)解決の方針を立てること」，「β 1 (3)方針に基づいて解決すること」を評価する問題として位置付けられる。

問題（３）は，（２）の問題の条件を変化させて考えるという発展を意図した問題である。問題で記述されている図形を想定し，面の数や体積を求めることができるかを評価する問題である。この問題は，数学的プロセスのβ 2 (3)「発展的に考えること」を評価する問題として位置付けられる。

問題（４）は，正二十面体をつくり出すために，正八面体から，どのような図形を切り出していけばよいかを考えることができるかを評価する問題である。（２）は，正二十面体を小さな四角錐の合成によって考えたが，（４）は，大きな正八面体から，まわりの図形を切り出していくことによって考えている。つまり，同じ対象を異なる視点で捉えようとしている。そのため，この問題は，数学的プロセスのγ 3「多面的にものを見ること」を評価する問題として位置付けられる。

上記では，問題を表１に示されている数学的なプロセスに位置付けてきた。だが，位置

付ける過程において，評価したいプロセスが，表内に記述されていないことが見出されてきた。本評価問題では，問題解決に貢献する図形を見抜くプロセスが幾度も現れる。この見抜くプロセス，すなわち，「洞察して考える」というプロセスを評価したいのであるが，表内には，このプロセスが存在しないのである。そこで，**表1**のβ1(4)に「洞察して考えること」というプロセスを追加することが適切ではないかと考えられる。

4．「思考・判断・表現」を評価するための活用型評価問題の開発：「現実の世界」の問題に焦点をあてて

（1）比例に関する活用型評価問題：小学校6年生

①評価問題の開発の背景

比例を明示的に学習しはじめるのは，小学校5年生からである。小学校5年生では，表を用いて，伴って変わるふたつの数量の関係を考察し，簡単な場合については，比例の関係があることを知る。そして，小学校6年生では，比例の関係を用いて問題解決することを学ぶ。本評価問題では，ふたつの数量の関係が，厳密な比例の関係になっていなくとも，比例とみて解決することができるかを評価する問題を開発する。

②問題とその意図

【問題】

新幹線にのりながら，富士山の絶景が見える位置があると聞きました。その景色は，富士山ときれいな鉄橋が同時に撮影できる景色になるそうです。この景色を写真にとるために，新幹線にのってから，何分後に，こうした景色が見られるのかを予測することにしました。

そこで，いくつかの情報をまとめました。

■乗車する駅	新横浜駅
■下車する駅	名古屋駅
■乗車する新幹線	のぞみ（新横浜駅から，名古屋駅まで停車しません）
■乗車する時刻	11：19
■下車する時刻	12：41
■新横浜駅から名古屋駅までの距離	337.2km
■絶景が見える位置	新横浜駅から120.4km

「絶景が見える位置」を通るのは，新横浜駅を出発してから，何分後になると予測できますか。時間と，どのように求めたのかを説明してください。

【想定される解決過程】

まず，のぞみの速さを求める。新横浜駅から名古屋駅までの距離は337.2kmであり，それにかかる時間は82分であるので，速さは337.2/82（km/分）となる。この速さで絶景が見える位置を通過したとすると，その位置を通過する時間は，$120.4 \div \frac{337.2}{82} = 29.27\cdots$となる。つまり，絶景が見える位置を通過するのは，新横浜駅を出発してから，約29分20秒になると予測できる。

【問題の意図】

本評価問題は，**表1**の「主として『活用』に関する問題作成の枠組み」を用いて特徴付けると以下のように記述できる。

学年	問題	活用する力	文脈や状況	数学的なプロセス
小学校６年生		α	現実の世界	α 1 (3), α 2 (2), α 3 (2)

この問題は，乗車時刻と下車時刻の差から，乗車時間を求め，移動距離をその時間でわることにより，新幹線の速さを特定し，「絶景が見える位置」までの距離をその速さでわることにより，予測時間を求めることができるかを評価する問題である。この問題は，数学的なプロセスの α 1 (3)「理想化，単純化すること」，α 2 (2)「必要な情報を適切に選択し判断すること」，α 3 (2)「解決の結果を数学的に表現すること」を評価する問題として位置付けられる。

（２）比例に関する活用型評価問題：中学校１年生

①評価問題の開発の背景

中学校１年生では，比例を関数という視点から捉えるとともに，比例を用いて具体的な事象を捉え説明することを学習する。その際，依存関係にある２つの数量を指摘するとともに，どのような仮定を設定して考察しているのかを指摘することも学習する。

本評価問題では，ある数量に対して依存関係にある数量を指摘することができるかを評価する問題を開発する。また，いくつかのデータの傾向を捉えたうえで，データの傾向を代表する式を作成し，その式に基づいて予測することができるかを評価する問題を開発する。その際，環境としてはグラフ用紙を配布し，グラフを作成できる環境を設定する。

②問題とその意図

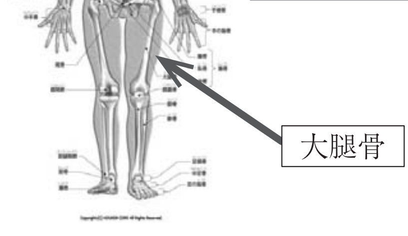
【問題】

新聞には，「貝塚から，縄文時代の古人骨が出土しました」といった記事が掲載されることがあります。例えば，右の記事は，高身長と推測される古人骨が発見された時の新聞の記事の一部です。身長と骨に関する以下の問に答えなさい。なお配布物を使用して解答してもかまいません。

（１）次の出土したものの中で，縄文人の身長を推測するために用いているものが「大腿骨」です。それ以外のものが，身長を推測するのに不適切であると考えられる理由について述べなさい。

（あ）歯の数

（い）出土した骨全部の重さ



（２）考古学の専門家は，大腿骨長から，身長を推測することがあると言います。

ある貝塚で発掘された大腿骨長を調べると，縄文中期の骨であり，435mmでした。この大腿骨長から身長を推測するために，現代人の大腿骨長の体の外側にあたる大腿長と身長との関係を考えることにしました。

以下に示すデータを基にして，大腿骨長の長さが435mmの縄文人の身長を推測しなさい。また，どのように推測したのかも説明しなさい。

大腿長（mm）	334	420	429	455	377	416	393	366	398
身長（mm）	1380	1702	1688	1788	1502	1601	1558	1446	1564

（３）（２）の推測をするときに，設定している仮定をできるだけあげなさい。

【想定される解決過程】

（１）の問題について

「（あ）歯の数」は，人間の場合，約32本である。それゆえ，身長が高くなっていっても，歯の数は変わらないため，身長を予測するのに適切な数量ではない。また，「（い)出土した骨全部の重さ」は，もちろん，出土の状態によって様々に変化する。つまり，まとまって骨が出土することもあれば，そうでない場合もある。それゆえ，この量は，身長とは関係がないため，適切な数量ではない。

（２）の問題について

表にあるデータを左から見ていくと，334mmから420mmに大腿長の長さが増加した時，身長は1380mmから1702mmへと増加している。だが，次に420mmから429mmへと大腿長の長さが増加した時，身長は1702mmから1688mmへと減少している。これらの事実から，２量は比例していないことがわかる。そこで，全体の傾向を捉えるために，散布図（**図９**）に表してみる。

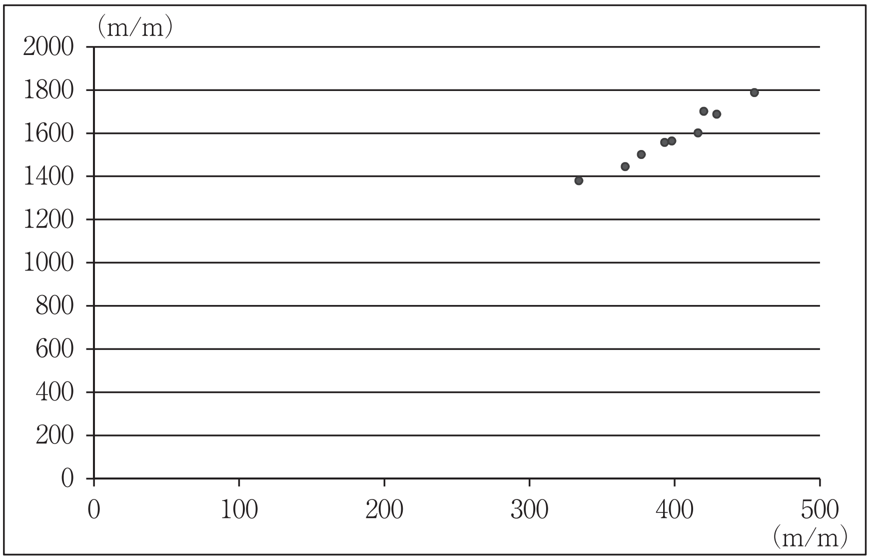


図９　大腿長と身長のデータに関する散布図

散布図を描いてみると，データはおよそ直線上に並んでいることがわかる。ここで，大腿長と身長の平均値を求め，散布図上に描き，その点と原点とを結び直線を描くと**図10**が得られる。

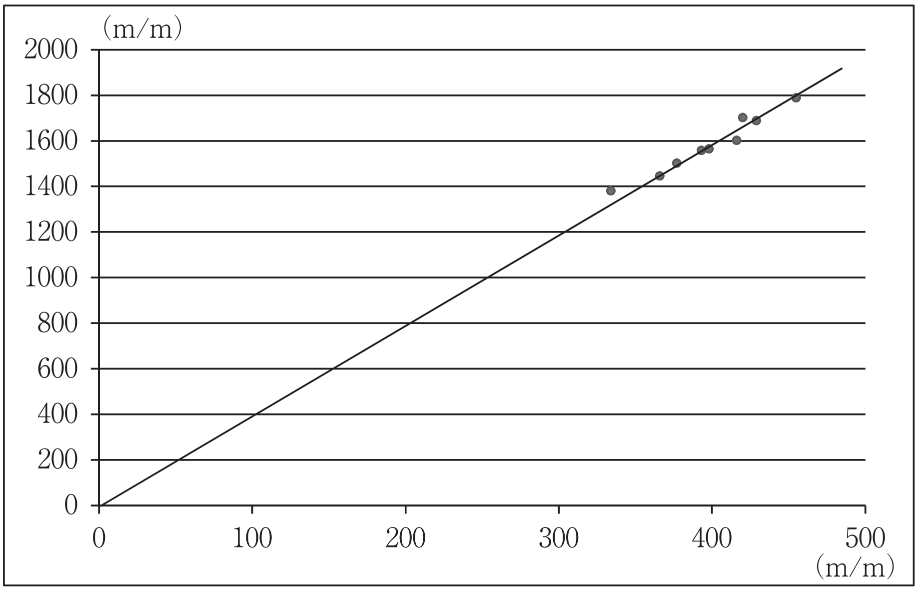


図10　散布図に描いた直線

この直線の式は，およそ$y = 4x$と表すことができる。出土した骨の長さは，435mmであるので，身長は，$y = 4 \times 435 = 1740$mmであると予測することができる。

（３）の問題について

１つ目の仮定は，「大腿長と身長とに比例関係があるとみる」という仮定である。２つ目の仮定は，「大腿骨長と体の外側の大腿長が同じ長さ」という仮定である。３つ目の仮定は，「現代人の大腿長と身長との関係が，古人の大腿骨長と身長との関係と同様な関係である」という仮定である。

【問題の意図】

本評価問題は，**表１**の「主として「活用」に関する問題作成の枠組み」を用いて特徴付けると以下のように記述できる。

学年	問題	活用する力	文脈や状況	数学的なプロセス
中学校１年生	（１）	α	現実の世界	α2(2)
	（２）	α	現実の世界	α1(1)，α1(2)，α1(3)，α3(1)，α3(2)
	（３）	α	現実の世界	α1(3)

問題（１）は，身長を推測するために着目する構成要素の中で，適切ではない要素について，その理由を述べることができるかを評価する問題である。関数の視点から言えば，依存関係に着目できるかをみる問題と言える。また，この問題は，数学的プロセスのα2(2)「必要な情報を適切に選択し判断すること」を評価する問題として位置付けられる。

問題（２）は，データの傾向を捉え，構成要素間の関係を設定し，その関係を数学的に表現することができるかを評価する問題である。また，数学的表現に対して，数学的処理を施し，結論を得ることができるかを評価する問題でもある。この問題は，数学的プロセスのα1(1)「ものごとを数・量・図形等に着目して観察すること」，α1(2)「ものごとの特徴を的確に捉えること」，α1(3)「理想化，単純化すること」，α3(1)「数学的な結果を事象に

即して解釈すること」，α 3(2)「解決の結果を数学的に表現すること」を評価する問題として位置付けられる。

問題（３）は，解決過程を振り返り，問題を解決するために，どのような仮定を設定していたのかを指摘できるかを評価する問題である。この問題は数学的プロセスの α 1(3)「理想化，単純化すること」を評価問題として位置付けられる。

（３）回帰直線に関する活用型評価問題：高等学校２年生

①評価問題の開発の背景

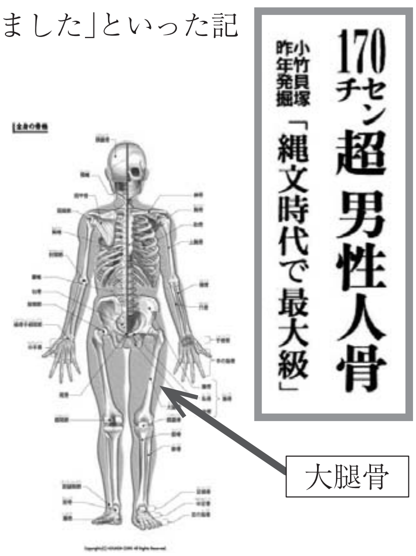
高等学校では，「比例とみる」「一次関数とみる」という見方を基に，目分量で直線を引くという中学校での学習を発展させ，データに対して最小二乗法等によって回帰直線を描き，未知の値を求めるような学習が期待される。その際，データの残差の標準偏差を求め，それを用いて，予測値の信頼区間を求める学習が行われることが望ましい。

本評価問題では，最小二乗法による回帰直線における決定係数と相関係数との関係の理解を評価する問題を開発するとともに，標準偏差を用いて，幅をもった予測値を算出することができるかを評価する問題を開発する。

②問題とその意図

【問題】

新聞には，「貝塚から，縄文時代の古人骨が出土しました」といった記事が掲載されることがあります。例えば，右の記事は，高身長と推測される古人骨が発見された時の新聞の記事の一部です。



考古学の専門家は，大腿骨長から，身長を推測することがあると言います。ある貝塚で発掘された大腿骨長を調べると，縄文中期の骨であり，435mmでした。この大腿骨長から身長を推測するために，現代人の大腿骨長の体の外側にあたる大腿長と身長との関係を考えることにしました。

下の図１は，318人の大腿長と身長のデータをプロットした散布図に，最小二乗法による回帰直線を書き入れた図です。最小二乗法とは，図２のように，各点から引こうとする直線まで縦軸と平行にひいた線分の長さ（残差）に着目し，この残差の２乗をすべて加えた値が最小になるように引く方法です。

以下の問いに答えなさい。

（１）決定係数を下に示すように，1−(残差の二乗の和／偏差の二乗の和）とします。

$$決定係数=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$$

この値が，相関係数の二乗と同じ値になることを示しなさい。ただし，$a=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x{}^2}$（$\sigma_{xy}$は$x$と$y$の共分散を表し，$\sigma_x$は分散を表す），$b=\bar{y}-a\bar{x}$（$\bar{y}$ は，y の

平均値を表す)。

（２）318人のデータの残差の標準偏差を求めると，41でした。この値と回帰直線の式を用いて，大腿骨長の長さが435mmの縄文人の身長を推測しなさい。また，残差の標準偏差を用いることによって，どのようなことがわかるのかを説明しなさい。

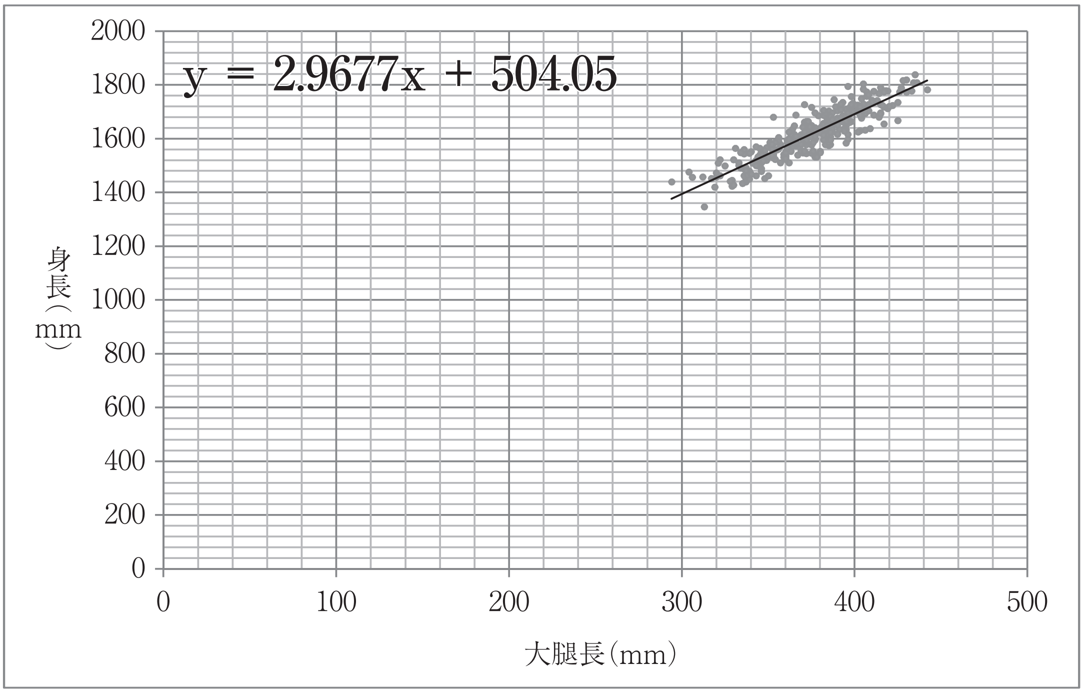


図１

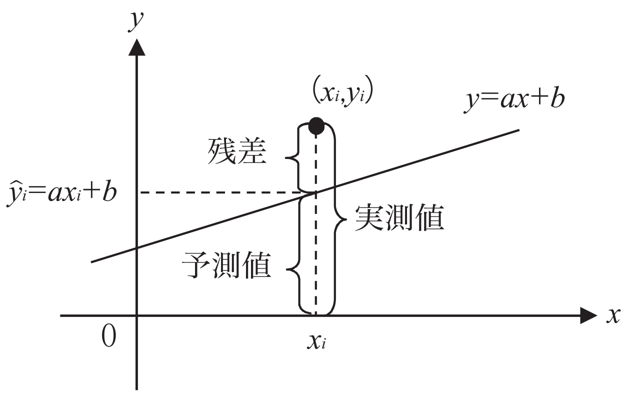


図２

【問題の意図】

本評価問題は，**表１**の「主として『活用』に関する問題作成の枠組み」を用いて特徴付けると以下のように記述できる。

学年	問題	活用する力	文脈や状況	数学的なプロセス
高等学校２年生	（１）	α	現実の世界	α２(2)
	（２）	α	現実の世界	α１(3)，α３(1)，α３(2)

問題（１）は，回帰直線を求めた際，あてはまり具合の１つの指標となる決定係数と相

関係数との関係の理解を評価する問題である。この問題は，数学的プロセスの$\alpha 2(2)$「必要な情報を適切に選択し判断すること」を評価する問題として位置付けられる。

問題（2）は，残差の標準偏差が41であることから，その－2倍の値である－82から＋82までの範囲に，残差のデータのおよそ95％が存在することを用いて，予測値の範囲を考えることができるかを評価する問題である。この問題は，数学的プロセスの$\alpha 1(3)$「理想化，単純化すること」，$\alpha 3(1)$「数学的な結果を事象に即して解釈すること」，$\alpha 3(2)$「解決の結果を数学的に表現すること」を評価する問題として位置付けられる。

5．まとめと今後の課題

本稿の目的は，算数・数学科における「思考・判断・表現」を評価するための活用型評価問題を開発することであった。そのためにまず，PISA調査の問題並びに全国学力･学習状況調査の問題を批判的に検討し，課題を明確にするとともに，その課題を解消するための視点を明確にした。具体的には，以下の4点である。

（ア）小学校6年生，中学校3年生といった学年だけでなく，様々な学年に応じた活用型評価問題の開発
（イ）学習に伴う思考力・判断力・表現力の「深浅さ」を測るための活用型評価問題の開発
（ウ）思考力・判断力・表現力を評価するための「現実の世界」と「数学の世界」の双方の活用型評価問題の開発
（エ）思考の道具が整備された状態を想定した活用型評価問題の開発

上記を視点に，「数学の世界」の評価問題を2題開発した。開発する過程において，**表1**の「主として『活用』に関する問題作成の枠組み」では，問題解決に貢献する図形を見抜くプロセス，すなわち，「洞察して考える」というプロセスが存在しないことが見出された。そこで，**表1**の$\beta 1(4)$に「洞察して考えること」というプロセスを追加することが示唆された。

また，「現実の世界」の評価問題を3題開発した。この3題は，「比例とみる」見方の「深浅さ」を評価することを意図して開発した。小学校6年生の評価問題は，ふたつの数量の関係が，厳密な比例の関係になっていなくとも，比例とみて解決することができるかを評価する問題であった。中学校1年生の評価問題は，いくつかのデータの傾向を捉えたうえで，データの傾向を代表する式を作成し，その式に基づいて予測することができるかを評価する問題であった。そして，高等学校2年生の評価問題は，「比例とみる」「一次関数とみる」という見方を基に，目分量で直線を引くという中学校での学習を発展させ，データに対して最小二乗法等によって回帰直線を描き，未知の値を求めるだけでなく，データの残差の標準偏差を求め，その値を用いて，予測値の信頼区間を求めることができるかを評価する問題であった。このように，1つの見方や考え方が学年に応じてどのように深まっていくのかを明確にし，その見方が深まっているのかを評価する問題の開発が必要であると考える。

本稿では，小学校6年生，中学校1年生，高等学校1年生，2年生の評価問題の開発に取り組んできたが，その数は極めて少ない。上記の視点（ア）にも記しているように，今後は様々な学年に応じた活用型評価問題の開発が必要である。また，真正（genuine）の思

考力・判断力・表現力を評価するためには，どのような視点を考慮する必要があるかも明確にしていく必要がある。

〈注〉

１）学校教育法第30条第２項においても，以下に示すように，知識や技能を活用して課題を解決するためには，思考力，判断力，表現力が必要であることが記されている。

「第30条２　前項の場合においては，生涯にわたり学習する基盤が培われるよう，基礎的な知識及び技能を習得させるとともに，これらを活用して課題を解決するために必要な思考力，判断力，表現力その他の能力をはぐくみ，主体的に学習に取り組む態度を養うことに，特に意を用いなければならない。」（下線は筆者による）

２）PISA調査では，数学に関わる数学的リテラシーだけでなく，読解リテラシー，科学的リテラシーについても調査している。

〈引用参考文献〉

国立教育政策研究所教育課程研究センター（2012）『平成24年度　全国学力・学習状況調査解説資料　中学校数学』

瀬沼花子（2004）「企業の算数・数学教育への期待 : データに基づく予測の強調と指導法の改善」科学教育研究 28（1），pp.34-42.

東京書籍（2002）『教師用指導書　新しい数学　選択数学』

長崎栄三他（2006）「現在の学問や職業で使われている算数・数学 : 「数学教育に関する研究者調査」の結果の分析」日本数学教育学会誌 88（3），pp.29-43.

三輪辰郎（1982）「モデル化」『現代教育学の基礎』筑波大学教育学研究会編,pp.286-289.

三輪辰郎（1983）「数学教育におけるモデル化についての一考察」筑波数学教育研究第2号, pp. 117-125.

Blum,W.,Niss,M.(1991) Applied Mathematical Problem Solving,Modelling, Applications,and Links to Others Subjects-State,Trends and Issues in Mathematics Instruction.Educational Studies in Mathematics,Vol.22,pp.37-68.

Ikeda,T.,Stephens,M.（2001）The Effects of Students’　Discussion in Mathematics Modelling.In Matos,J.et al.(eds.) MODELLING AND MATHEMATICS EDUCATION,Horwood Publishing, pp.381-390.

OECD（2010）『PISA2009年調査評価の枠組み-OECD生徒の学習到達度調査-』国立教育政策研究所監訳，明石書店

Treilibs,Ver,Hugh Burkhardt,and Brian Low（1980）Formulation processes in mathematical modeling, Shell Centre for Mathematical Education.

5　算数科における評価課題の開発とその実践的検討

東京学芸大学教育学部附属世田谷小学校　教諭　栗田辰一朗

１．はじめに

算数科における評価というと，学習内容（知識や技能）をどれだけ習熟できたか測るものが一般的である。思考のプロセスを評価する方法としては，授業場面での具体的な評価方法について，国立教育政策研究所（H23.11月）がその事例を示し，その評価方法として，主に「観察」と「分析」を挙げている。また何を観察し，何を分析するのかという視点でさらに評価方法を見ると，「調べたり発表したりする様子」「ノートによる個人解決の記述」，「発表したり話し合ったりする様子」，「ノートによるふり返りの記述」等の表記が見られる。つまり，授業中に教師が子どもたちの様子を観察したり，授業後に集めたノートを分析したりして評価する方法が示されているのである。

しかし，これらの評価方法では算数の学習内容に関しての評価はできるが，そこで得られた力が子どものものになり，生きた数学の力となって働くものになっているかを測るまでには至っていない。

そこで本稿では，これらの評価方法以外に，算数科の学習内容に対して，内容を評価しつつ，内容から少し離れたところで数学の力としての「思考・判断・表現」のプロセスが評価できるような評価課題を開発し，実践を通して検討する。

２．算数科における「思考・判断・表現」する力を高める課題とその授業実践

（１）第２学年「長さ」

第２学年の子どもたちは，これまで「長さ」を学習する中で，cmやmmの単位の意味を理解し，長さには加法性があることに気付き，１m未満の長さの測定をすることができるようになっている。そこで，内容から少し離れた場面として，子どもの身近な場面から「30cmの幅のロッカーの中を整理する２つの箱はどれとどれがいいかな」という課題を設定し，自ら箱の幅（長さ）を足し合わせ，どの箱がロッカーに入るかを考え，判断する授業（２時間扱い）を試みた。

（箱の幅　大：18cm５mm，中：16cm５mm，小：110mm）

すると，第１時での問題解決の様子から何人かの子どもたちは，次のような点でつまずいていることが分かった。

- **●問題解決の見通しが立たない**
- **●「１cm＝10mm」の関係を理解できていない**
- **●長さの加減計算の仕方が理解できていない**

自力解決「大中　18cm５mm＋16cm５mm＝44mm」

また，自分なりの解決は行っている様子も多く見られた。

●自分なりの見通しをもって解決できた

自力解決「予想　大と中，中と小です。」と書き，その理由として
「だって，大と小で計算したら，30cmに近い何cmが出て，中と小も同じ30cmに近い数が出たからです。」と書いた。

学習感想「今日，どうやったら分かるか，分かってよかったです。」

●たしざんをして解決できた

自力解決「大＋中　16cm 5 mm＋18cm 5 mm＝35cm
大＋小　18cm 5 mm＋11cm＝29cm 5 mm」と書いた。
「たしざんをしたからわかりました。大と小ができます。たし算をして考えました。」

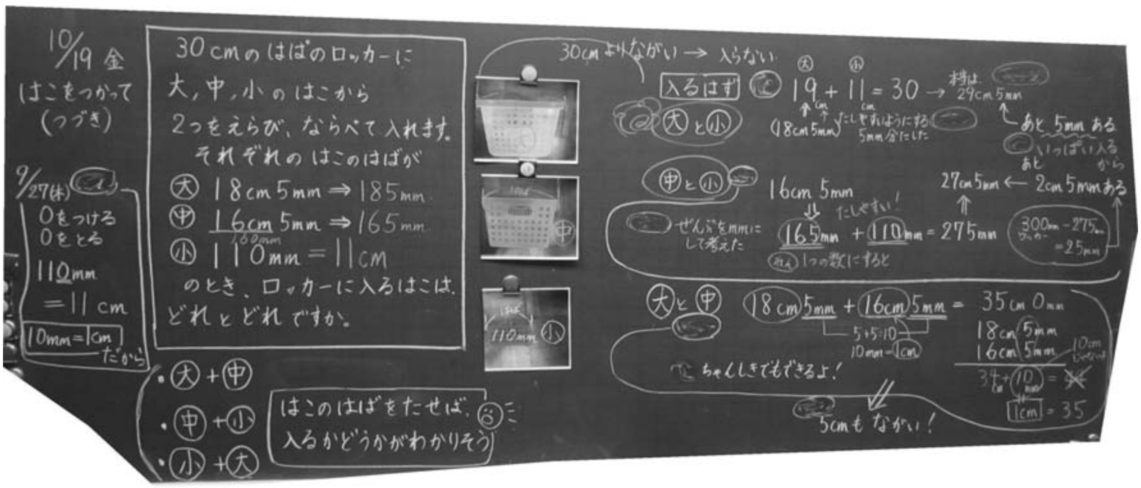
● 3 つの箱の組み合わせについて，mmを用いて解決している

自力解決「小＋中　110mm＋165mm＝275mm（27cm 5 mm）
大＋小　185mm＋110mm＝295mm（29cm 5 mm）
中＋大　165mm＋185mm＝350mm（35cm）」と書き，「せつめい」として，
「小と中は入ります。なぜかというと，小は11cmを110mmにかえて，中は16cm 5 mmを165mmにかえて，110mm＋165mm＝275mmです。275mmを27cm 5 mmなります。なので，ロッカーに入ります。」と書いた。

●和を現実場面に当てはめて解釈した

自力解決「大＋中　35cm→ 5 cmオーバー。
小＋中　27cm 5 mm→ 2 cm 5 mmすき間がある。
大＋小　29cm 5 mm→ 5 mmあまる。
（答え）大小，中小が入る」と問題を解決した。さらに続けて，
「大小→ 5 mmあまるから，中小→ 2 cm 5 mmあまる。お金が安い→中小，いっぱい入るのは→大小　100円ショップなら，大小の方がいい。」
と，実際に自分が買うことまで考え，判断しようとしていた。

第２時では，もう一度問題場面をふり返り，解決の見通しを明確にした。そして，3つの箱の組み合わせについて，長さのたし算をして考えることを自力解決させ，集団検討では，2つの箱の幅を合わせるとどうなるのか，長さのたし算の仕方や，「すき間」と「長い」の解釈等を行った。終末では実際に，ロッカーに２つの箱を入れてみた。



子どもたちは自ら箱の幅（長さ）のたし算を使って，幅30cmのロッカーの中に選んだ２つの箱が入るかどうかの判断をすることができた。そればかりか，余白はどれくらいか，数値的に幅の和が35cmになるということは実際どうなることかなど，算数で解決した結果を現実場面で解釈することができた。それにより，もっとよい箱の大きさはないか，ぴったりと収めるには幅だけでなく，高さや奥行きまで考える必要があることに気づくことができた。

（２）第５学年「正多角形と円」

第５学年の児童は，ある平面図形の大きさをとらえるための学習経験をしてきている。

・図形の辺の長さ（構成要素）で比べる
・図形の周の長さで比べる
・図形の面積で比べる

また円についての学習は，第３学年でその概念を形成し，第５学年で円周，円周率，第６学年で円の面積を学習する。これらの学習内容に対して，内容を評価しつつ，内容から少し離れたところで数学の力としての「思考・判断・表現」のプロセスが見やすい場面として，「円の大きさをとらえる」問題場面を考えた。円の大きさをとらえるために，子どもたちは既習の経験を生かす。その際，着眼点が異なり多様な思考のプロセスが見られると考えられるからである。

まず，円の大きさを捉える必要性がある問題場面を授業（２時間扱い）で実践した。

【単元名】

「みんなで『きれいな輪』になって広がろう」

みんなで様々な大きさの輪をつくる場面で「きれいな輪をつくりたい」という課題意識のもと，どのように広がればきれいな輪ができるかを考える学習活動を行った。第１時では，3人の輪から考えさせ，3人の時は正三角形，４人の時は正方形がきれいな輪であることを前提に5，6人･･･，のときの輪について考えさせた。その過程で正五角形，正六角形，･･･正多角形を指導し，次第に円に近づいていくことを学習していった。

第２時では，クラス全員が正多角形になったとき，ほぼ円になることから，どのくらいの大きさになるのかを考える授業を行った。

問題「クラス全員38人で円になるとき，どのくらいの大きさになるかな。
この集会室に入るかな？集会室は，13mの正方形。
→　１人1.5m間隔で広がるとすると，みんなで円周57mの円になります。そのときの円の直径の長さは何mですか。」

すると，以下のような子どもたちの思考過程の様子が見られた。

●どのようにすれば大きさを捉えられるのか分からず，悩む子

Ｃ１　考えようとしたがよく分からなくなってしまった子
「もっとかんたんにできる方法を知りたいです。」
「円を半径10cmにしてかいてみたけど，よく分からなくなってしまった。 もう一度考えたい。」

Ｃ２　友達の考えを聞いた（3.14）けれど，よく分からない子

Ｃ３　よく分からないので，直接38人で輪になればいいと考える子

C４　ぼくは最初に四角と三角で半径が同じ場合より小さい大きいで判断しようとしたが，無理だった。
C５　難しかったけど，円周が57mだから４等分してみて14.25m，2等分したら28.5mになりました。

●円周÷円周率という求め方を知っていて，用いようとする子

C６　57÷3.14＝18. 1‥？←3.14をどうやって説明すればいいかな？
C７　円には公式があるはず→正方形とかもあるから，公式があるのではないかな？
C８　直径20cmの円，2cmの円，4cmの円の円周はどれも3.14になっているから，円周÷3.14でもとめることができる。
C９　直径19cmの円を切って円周を調べる。
C10　直径１cmの円を切り取って，円周の長さ3.1cmを測る。5700÷3.1＝18.38･･･

●小さい円の場合から考えて，類推していく子

C11　９m（６人）の円周の直径を調べ，その関係から解決する

→　９m÷２m＝4.5倍	→　比例関係を仮定して解決する子
57÷4.5＝12.7	円周　９m→×6.33…→57m
	直径　２m→×6.33…→12.66…m

C12　２人で直径50cmだから，50×38＝1900cm＝19m
C13　２人で直径90cm，38人では1710cm
C14　紙を使ってやりました（できていないけど）紙に円をかいて，円周を調べてそのときの直径をもとに考えようと思いました。（１cmずつなら測れる）

●円の面積を考えて，比べようとする子

C15　円の面積が分かれば，集会室に入るか分かる
C16　ぼくはできるだけ平行四辺形に近くしてみた。やはり実際にやった方が確実だと思う。
C17　正方形（集会室）と比べる。集会室は13×13＝169m^{2}なので･･･。
C18　円の中に何人入るかで考えた。この部屋には2704人入るから，2人でつくった円には４人の人を入れられたから６人で，2166人入れる円になる。だから，この部屋に入るはず･･･。でも，他のやり方だと，矛盾するのか？

子どもたちは，大きな円の円周と直径がどのような関係になっているかをつかむために，まずは他の小さい円について調べ，そのことから分かった直径と円周の関係を用いようとする思考過程が見られた。また，徐々に円になる人数を増やしていくことで，きまりを見つけ，用いようとする関数の考えも見られた。

３．子どもたちの思考・判断・表現のプロセスを評価する課題開発

上記の授業を終え，子どもたちの思考・判断・表現がどのように高まっているかを評価する課題を開発した。どちらの評価課題も，授業を行った後の第５学年の児童を対象に行うことを想定している。「正多角形と円」についての内容については，パフォーマンス評価の形式も考案した。

（1）第２学年「長さ」の学習を生かした評価課題

問題場面

戸棚（30×50×20cm）の中に、２つの引き出しを並べて入れて，整理します。

このとき，どんなサイズの引き出しを入れるとよいですか。また，それはなぜですか。

思考のプロセス

（１）問題場面に内在する変量

・戸棚に入るかどうかは，縦，横，奥行きの引き出しのサイズに依存することに気付く。

・引き出しを入れたときのすき間は，戸棚の幅と２つの引き出しの幅の和に依存することに気付く。

（２）収集すべきデータ

・戸棚のサイズ

・引き出しの縦，横，奥行き

・任意に選んだ２つの引き出しの長さの和

（３）データの分析方法

・引き出しの奥行きから，戸棚に入るかどうかを考える。

・戸棚の高さと引き出しの高さからすき間を求め，取り出しやすさを考える。

・２つの箱を選ぶ場合を考え，どれが最もすき間がなく，たくさん入るかを考える。

（４）さらなる改善方法の検討

現実場面では，箱の代金も考え，どの箱を買って並べるかも考える。

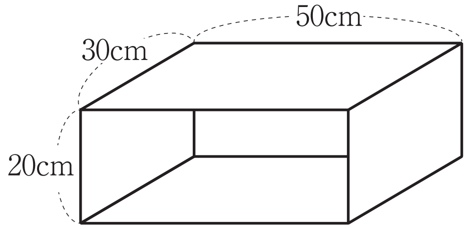
評価問題案【引き出しの組み合わせを考える】

①評価する考え

戸棚に入る２つの引き出しの大きさを求めるために，引き出しの組み合わせを考え，よりすき間の少ない引き出しを選ぶことができる。

②設問型評価問題

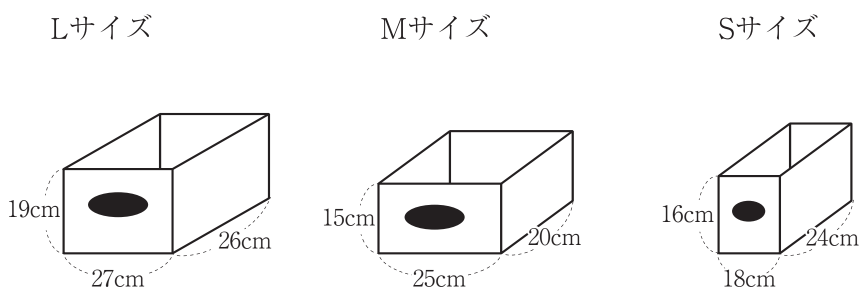
下の図のような戸棚の中に，２つの引き出しを並べて入れて，整理します。



（１）引き出しになる箱を買いに行ったくりおさんは，お店にある３種類のサイズの引き出しの中から，２つを選ぼうと考えています。

戸棚の中に，LとMの引き出しを並べて入れると、入らないことが分かります。

そのわけを，言葉や式を使って書きましょう。



（２）戸棚の中に並べて入れることができるのは、どのサイズの引き出しを入れたときですか。同じサイズを選んでも良いとするとき、すべて答えましょう。

（３）くりおさんは結局、「２つの引き出しを入れたときに、すき間が一番少なくなるような箱にしたい」と考えました。その引き出しはどれとどれですか。

（２）第５学年「正多角形と円」の学習を生かした評価問題

問題場面

教室で，何人かがいすに座って円になるように広がります。このとき，何人までなら円になって広がることができますか。

条件：いす40cm正方形

思考のプロセス

（１）問題場面に内在する変量

・円の大きさは，いすの数の多少（円周の長さ）に依存することに気付く。

・円の大きさは，円の直径（半径）に依存することに気付く。

・円の大きさは，円の面積に依存することに気付く。

（２）収集すべきデータ

・教室の形及びサイズ

・椅子の形，幅（奥行き）

・１人あたりの間隔

（３）データの分析方法
・円の大きさを面積で捉えようとし，面積で比較しようとする。
・教室の周りの長さを求め，正方形に広がったときの場合を考える。
・円の直径や半径が分かれば円の大きさが求められることに気付き，最大の円の大きさを直径８mの円とし，円周の長さから求める。
（４）さらなる改善方法の検討
現実場面では，いすの幅だけでなく，いすの間隔や奥行きもあることを想定し，直径７mの円と決めたり，いすの条件を50cmと変えたりして求める。

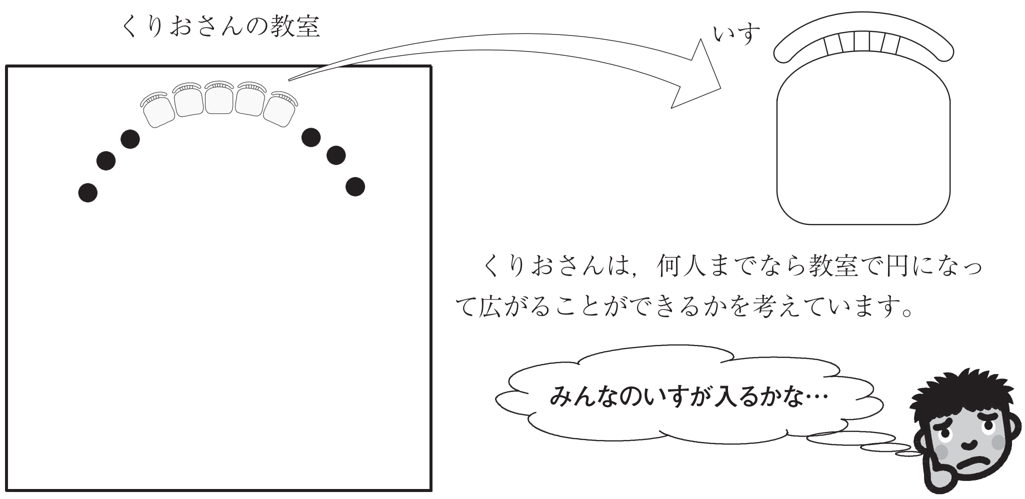
評価問題案【円の大きさをとらえる】

①評価する考え

円の大きさを求めるために，円の大きさが何によって決まるのかの依存関係に着目し，その関係を整理・把握して用いることができる。

②設問型評価問題

1　くりおさんのクラスでは，教室でいすを円になるように並べ，下級生を招待してお楽しみ会をすることにしました。



（１）くりおさんは，教室に入る最も大きな円の大きさを調べるために，必要なものの大きさを調べようと考えています。下のア～コの中から，すべて選びましょう。
ア．座る人の身長130cm～155cm　イ．教室の面積64m^2
ウ．教室の形は正方形　エ．教室の１辺は８m　オ．教室のまわりの長さは32m
カ．いすの形はほぼ正方形　キ．いすの１辺は40cm　ク．いすの高さは45cm
ケ．いすの面積は1600cm^2　コ．教室に並べたいいすの数70脚

（2）くりおさんは，ウ，エ，オ，カ，キの情報を使って「いす80脚の円は，この教室ではできない」と考えました。そのわけを説明しましょう。

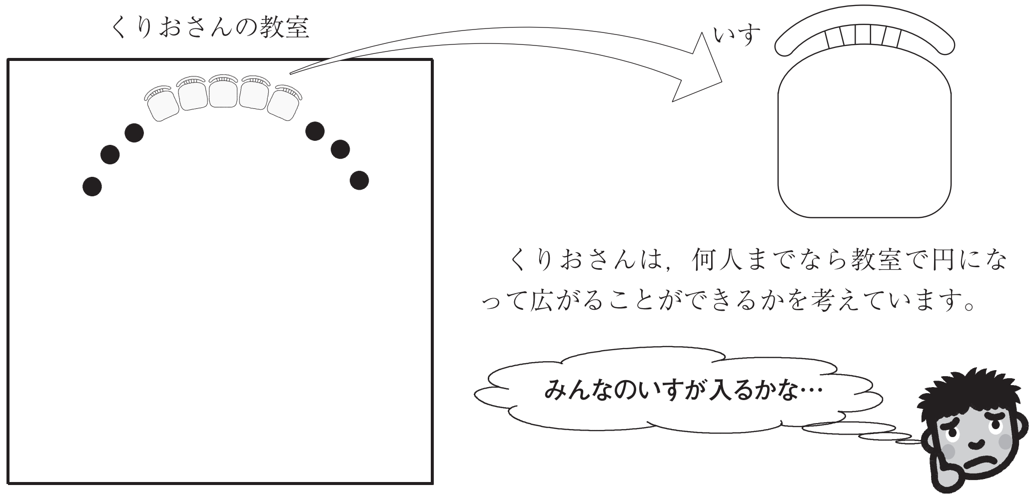
（3）くりおさんは次のように考え，答えを求めました。
「8 ×3.14＝25.12　25m＝2500cmなので，　2500÷40＝62.5　答え　62脚まで入る」
くりおさんは（1）のア～コのどの情報を使っていますか，すべて選びましょう。

（4）（3）の計算の通りいすを並べてみると，62脚で円になるように並べることが難しいことが分かりました。くりおさんの考えのどの点を直すとよりよいいすの数を求めることができますか。

設問の意図　（1）情報収集：不要な情報を排除できる
（2）正方形の周の長さと比較する考えを理解する
（3）円の大きさを求めるために直径に着目し，それをもとに円周の長さからいすの数を求める方法を理解する
（4）解決をふり返り，現実場面との誤差や数値設定を見直す

③パフォーマンス評価型の問題

1　くりおさんのクラスでは，教室でいすを円になるように並べ，下級生を招待してお楽しみ会をすることにしました。



くりおさんは，何人までなら教室で円になって広がることができるかを考えています。

たくさんのいすを実際に並べてみる前に，まずは計算で，並べることができるいすの数を求めます。自分で必要な大きさを決め，いすの数とその求め方の説明をかきましょう。

ルーブリックの例

	データ収集と分析の計画	解釈・評価
C	・教室やいすにふさわしいサイズを決めることができない。	・問題場面の把握が難しい。
B	・教室，いすを正方形や長方形と見てそのサイズを決める。 ・面積や周の長さに着目して求めようとする。	・問題場面の設定と条件整理ができる。 ・自分なりの分析方法を用いることができる。
A	・教室，いすを正方形や長方形と見てそのサイズを決める。 ・円の大きさは直径に依存することから，部屋の1辺を直径として円周の長さを求め，いすの数を求める方法を用いる。 ・解決方法が実際に使えるかどうかを吟味するような記述がある。	・問題場面の設定と条件整理ができる。 ・よりよいデータの分析方法を用いることができる。 ・解決をふり返り，根拠を明確に表すことができる。

〈引用参考文献〉

国立教育政策研究所（2011）「評価基準の体裁,評価方法等の工夫改善のための参考資料（小学校　算数）

6　高等学校数学科における思考力の評価課題の開発とその実践的検討
―問題解決のための構想を立てる思考として類推に焦点を当てて―

東京学芸大学教育学部附属高等学校　教諭　花園隼人

1．はじめに

全国学力・学習状況調査では中学校数学科の指導のねらいという立場から，評価する「活用」の力の一つとして「β：様々な課題解決のための構想を立てて実践し評価・改善する力」を同定している。そしてその力が活用される際の数学的なプロセスの一つに「β1：問題解決のための構想を立て実践すること」を挙げている。この「問題解決のための構想を立てる」という思考は中学校数学科だけでなく，広く問題解決において重要なものであり，高等学校数学科においても身に付けさせたい思考の一つである。

問題解決のために構想を立てることについては，ポリア（1956／2004）による問題解決の四つの区分のうちの一つである「計画を立てること」についての説明が示唆に富む。そこでは「問題を解くことの大部分はどんな計画を立てたらよいかということを考えつくことにあるといってよい」と述べられており，ポリア（1956／2004）が問題解決の過程において計画を立てることを重要視していたことが伺える。また，ポリア（1956／2004）は生徒が計画を立てることの助けとなる教師の問いの一つに「すでに解かれた同様の問題がある。それを利用できないか」というものを挙げている。この問いは既知の事柄をよく知らない事柄に当てはめて推論することを求めていることから，生徒に類推を求めるものであると解釈できる。すなわち，適切な類推を行うことが，問題解決のための構想を立てることになると考えられる。よって本稿では，構想を立てる考え方として類推に焦点を当てることにする。

類推は数学教育において重要視されている数学的な考え方の一つであり，学習指導要領の解説書でも取り上げられている（文部科学省, 2009, p. 17）。また，中学校の図形領域を中心として，理論と実践の両面から研究が積み上げられてきた。しかし，それらの研究は中学校の図形領域を対象とするものが多く，高校生の思考を評価する課題を開発すること，特に図形以外の数学的内容に関連させた研究は十分には積み上げられていない。

以上より本稿の目的は，問題解決のための構想を立てる思考として類推に着目し，高校生が類推を行えるかどうかを評価する評価課題を図形以外の数学的内容に関連させて開発することである。

2．研究課題と研究方法

（1）研究課題

上述の目的を達成するために，本稿では主として以下の二つの研究課題を設ける。

第一に，問題解決のための構想を立てる思考として着目した類推について，問題解決の過程で正しい答えを導く（以降，「成功的な」とする）類推を行えるかどうかを評価する課題を開発することである。この課題に先立って，数学教育学における類推の意味を明らかにするとともに，類推が問題解決のための構想を立てる機能を有することを具体的に示す。

第二に，開発した評価課題に対する高校生の取り組みを分析することで，評価課題の評価を行うことである。特に，類推を行わなかった生徒の解答を分析して類推を妨げる要因を特定し，その要因を課題から除外することによって，評価課題を類推に焦点化することを試みる。

（２）研究方法

上述の研究課題に対し，本稿ではまず，数学教育学における類比の意味を明確にした中川（2010）の類比の捉え方に基づいて，類推が単元「数列」において行われうる題材を高等学校数学科の教科書から具体的に抽出し，評価課題を開発するという理論的考察を行う。単元「数列」に着目する理由は，この単元が図形領域との関係が表出しにくい単元だからである。続いて，開発した評価課題に対する高校生の取り組みを分析することを通して，評価課題の評価と改善をするという実践的考察を行う。

３．数学教育学における類推の意味と機能

（１）数学教育学における類推の意味

類推とは類比に基づいて推論をする考え方である。例えば，正三角形が平面図形において辺や頂点が最も少ない正多角形であるのに対し，正四面体が立体図形において辺や頂点，面が最も少ない正多面体であることについて，どちらもそれぞれ２次元と３次元の空間における最小の境界要素で構成される正則な図形であると言える点について正三角形と正四面体は類比である。このような類比に基づいた推論は数学の研究において頻繁に用いられ，先述のように問題解決の構想を立てることや，自身の推測の信頼性を増加することなどの役割を担っている。しかし，類推とは数学固有の思考方法ではないため，特に数学において重要な類推を明確にする必要がある。

中川（2010）は類推が数学らしい類比に着目して推論するものであることを重要視し，数学教育において着目すべき類比がどのようなものかを明らかにするために理論的考察を行った。その結果，類推をする際には「ベースとターゲットが共通にもつ関係に着目し，それを支える基本的な性質を想定することで，類比と見なす観点を明らかにすること」（p. 283）が大切であると指摘した。この知見に基づくと，先の正三角形と正四面体の例で「ベース」を「正三角形」，「ターゲット」を「正四面体」とすると，「共通にもつ関係」が「頂点や辺といった境界要素が最小であるという関係」や「辺や面についての正則性」となる。また，これらの関係を支える基本的な性質は三角形と正四面体でそれぞれ「平面上では２直線は有限な図形を囲めないが，３直線は三角形を囲める」こと及び，「空間内では３平面は有限な図形を囲むことはできないが，４平面は正四面体を囲める」ことである。なお，正則性については条件として与えられていると考えることにする。

（２）問題解決のために構想を立てる類推の機能

本稿では先述のように，類推の「問題解決のための構想を立てる」という機能に着目する。ここでは具体的な事例として「正四面体の重心と外心が一致することの証明」の考察を通して，この類推の機能を確認する。利用する類比は，先述の正三角形と正四面体の間の類比である。なお，ここで正四面体の重心とは，正四面体の各頂点から対面の三角形の重心に引いた４直線の交点を指すことにする。

まず，「正四面体の重心と外心が一致することの証明」に先立って，「正三角形の重心と

外心が一致することの証明」を示す（**図１**）。この証明の主な流れは「重心が外心である」ことを示すものであり，さらにそのために，「重心から各頂点に引いた線分の長さが等しい」ことを示している。また，このことを示すために，この重心から各頂点に引いた線分の長さを，正三角形の一辺の長さで表している。

この正三角形の場合と同様に正四面体の場合も証明できると類推し，次のような構想を立てる。すなわち，「重心から各頂点に引いた線分の長さを，正四面体の一辺の長さで表すことで，それらが等しいことを示す」という構想である。この構想に基づく証明を**図２**に示す。

正三角形ABCにおいて，辺BC，CA，ABの中点をそれぞれL，M，Nとし，重心をGとする。

$$AG : GL = BG : GM = CG : GN = 2 : 1$$

$$AL = BM = CN\left(= \frac{\sqrt{3}}{2}AB\right)$$

なので，

$$AG = BG = CG\left(= \frac{\sqrt{3}}{3}AB\right)$$

よって，点Gは，正三角形ABCの外心である。

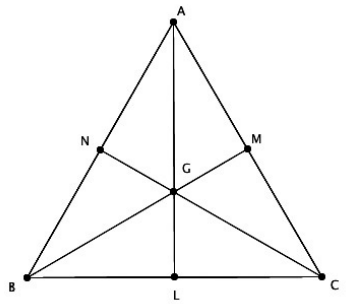


図１　正三角形についての証明

正四面体ABCDにおいて，三角形BCD，CDA，DAB，ABCの重心をそれぞれG_1, G_2, G_3, G_4とし，正四面体の重心をGとする。

$$AG : GG_1 = BG : GG_2 = CG : GG_3 = DG : GG_4 = 3 : 1$$

$$AG_1 = BG_2 = CG_3 = DG_4\left(= \frac{\sqrt{6}}{3}AB\right)$$

なので，

$$AG = BG = CG = DG\left(= \frac{\sqrt{6}}{4}AB\right)$$

よって，点Gは，正四面体ABCDの外心である。

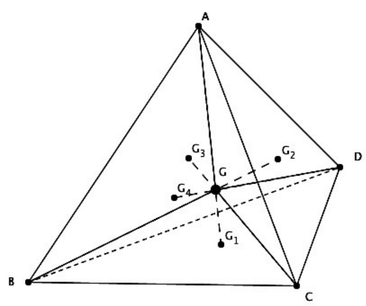


図２　正四面体についての証明

図２のように，「正四面体と類比である正三角形の場合についての証明と同様に考える」という類推は，正四面体の場合の証明の構想として有益なものとなっている。なお，類推に基づく構想が必ずしも問題を解決するとは限らないことは先行研究で指摘されている通りである（e. g. Polya, 1954/1959）。

４．類推をする力の評価課題の開発

（１）評価課題の開発

原題は，

$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$を利用して次の等式を導け。

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

という教科書に記載されている問いである（高橋ら，2012,『詳説数学B』p. 24)。この関係式は単元「数列」に含まれるものであるが，この単元では，和の計算の練習以外ではあまり焦点が当てられていない。しかし，例えば学習指導要領の解説書にあるように定積分を区分求積法に基づいて考察する場合には必要になる関係式であり（文部科学省, 2009,「高等学校学習指導要領解説数学編」p. 35)，また，次のような具体的な表現では，美しい等式としても知られている（e. g. デービス, ヘルシュ, 1986, pp. 164)。

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots=(1+2+3+4+\cdots)^2$$

この原題の教科書における扱いは，この問いが設定される前に $\Sigma_{k=1}^{n-1}k^2$ について記述があり，その考察に基づいて類推することが求められているものであるが，後半の等式の証明のための構想において核となる恒等式が前半で与えられている。そこで本稿では，この前半の恒等式を類推によって導出することによる問題解決の構想が立てられるかどうかを評価する次の課題を提示する。

$\sum_{k=1}^{n}k^2\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ を導いた過程を参考にして, $\sum_{k=1}^{n}k^3$ を求める。

この課題に先立って，教科書のように $\Sigma_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ が成り立つことを示す必要がある。そこで，後に示す実践的検討では，評価課題の実施に先立って，$\Sigma_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ が成り立つことを授業で扱った。証明に当たっては，恒等式 $(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$ を用いることや，用いる方法について指導した。末尾にはこの指導内容まで反映させた調査課題を示す。

（2）評価規準

上記の評価課題において行われることが期待される類推は，恒等式 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ と和 $\Sigma_{k=1}^{n}k^2$ の関係と，恒等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ と和 $\Sigma_{k=1}^{n}k^3$ の関係についての類比に基づくものである。すなわち，背後にある一般的な関係としては，数列 $\{n^m\}$ の和と，次数の一つ高い数列 $\{n^{m+1}\}$ の階差数列及びその和との関係に基づくものである。そこで評価規準としては「一つ高い次数」,「階差数列」,「階差数列の和」のそれぞれに着目できているかを観点とする次のものを設定する（**表１**）。この**表１**において,「問題解決のための構想を立てる思考としての類推」を評価する基準は太線枠の部分である。

表１　評価規準

評価規準	評価
次数の一つ高い数列 $\{n^4\}$ の階差数列の和を用いて，関係式を正しく導いている。	A
次数の一つ高い数列 $\{n^4\}$ の階差数列の和を用いている。 （恒等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ を適切に利用）	B
次数の一つ高い数列 $\{n^4\}$ の階差数列を用いようとしている。 （恒等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ を利用）	C
次数の一つ高い数列 $\{n^4\}$ を用いている。	D
上記以外	E

５．高校生による評価課題への取り組みの実際

（１）調査の実施とその結果の概要

調査は東京都内の国立大学附属高校の３クラス合計130名を対象に，平成26年５月９日と15日の授業時間において実施した。時間は20分間に限定し，上述のように直前の授業において$\Sigma_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$が成り立つことを確認した。**表１**の評価規準のそれぞれに該当する人数は**表２**の通りである。

表２　結果概要

評価	人数
A	5
B	34
C	13
D	1
E	77

（２）類推を行わなかった生徒の解答の分析

ここでは**表２**の結果のうちEに属する77名の解答について詳細に分析するため，解答を比較することで分類し，分類ごとにどのような構想を立てているかを分析する。その結果をまとめたものが**表３**である。

表３　E段階の分類

記号	構想の様相	人数
E１	$\{n^3\}$の階差数列や，さらにその階差数列を考えている。	25
E2-1	$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2$（$k$ － １）として考えている。	2
E2-2	$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2$として考えている。	8
E３	不明／記述なし	42

６．実践結果を踏まえた評価課題の評価

はじめに，**表２**に基づいて評価課題について検討する。まず，A段階の生徒が５名しかいなかったことから，総合的に難易度が高い課題であったといえる。ただしB段階の生徒のうち24名の生徒は計算途中で制限時間を終えていることから，この難しさの要因の一つは制限時間の短さにあるといえる。さらに，この課題では$\Sigma_{k=1}^{n} k^3$がどのような式で表せるか明示していなかったことも，最後まで計算できなかった理由であると考えられる。一方，何らかの類推を行ったA～D段階の生徒53名のうち39名がB段階以上の解答をしていることから，類推を行った生徒の多くは「恒等式$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$と$\Sigma_{k=1}^{n} k^3$の関係」についての推論，すなわち中川（2010）が定めた数学らしい類推を行っていたといえる。すなわち，本課題は数学らしい類推を行うか否かを評価することができるといえる。

次の会話を参考にして，下部の問いに答えて下さい。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ を示したいのだけど，
何から考えたらいいかわからない。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ は，次のように示したんだったね。

$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$の両辺で，$k = 1$から $k = n$までの和を考えると，

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3 - k^3\} = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 3k + 1)$$

$$(2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + \cdots + \{(n+1)^3 - n^3\} = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3}{2}n(n+1) + n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

この証明を参考にできないかな。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$ や $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ はできても，
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k$ はできないことに注意しないとね。

（問い）

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を導いた過程を参考にして，
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ を示して下さい。また，なぜそのように考えたのかの理由も書いて下さい。

続いて，**表3**に基づいて評価課題について検討する。まず，E１段階は，E段階で最も多くの生徒を含む段階であり，階差数列を考えていることから一見すると類推を行っているように見える。しかし，E１段階の生徒が利用しようとした$\{n^3\}$の階差数列は，$\Sigma_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$を導出したものなので，同様に推論すると同じプロダクトを得ることになるのは明らかである。この段階の解答では，$\{n^3\}$の階差数列のさらに階差数列を考えている生徒もいたことから，類推ではなく，一般に数列を考察する方法として階差数列を考えたのではないかと推察できる。しかしその真意は明らかではないので，推論の意図を併せて問う必要があった。また，E２の二つの段階の生徒は，類推の「ベース」である「$\Sigma_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$を導いた過程」のうち，プロダクトとしての$\Sigma_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$を用いようとしていたと考えられる。このように既に得られたプロダクトを利用するという構想を立てることは重要な思考ではあるが，E２－２段階の生徒の解答については「$\Sigma_{k=1}^{n} k^3=\Sigma_{k=1}^{n} k\cdot\Sigma_{k=1}^{n} k^2$と変形できる」という誤解，より一般的には「$\Sigma_{k=1}^{n} a_k\cdot b_k=\Sigma_{k=1}^{n} a_k\cdot\Sigma_{k=1}^{n} b_k$」と変形できるという誤解に基づくものであることから望ましい構想ではない。この望ましくない構想は和についての誤解が契機となっていると考えられるので，この「$\Sigma_{k=1}^{n} a_k\cdot b_k=\Sigma_{k=1}^{n} a_k\cdot\Sigma_{k=1}^{n} b_k$」という変形が正しくないことを明示しておくことで，より類推に焦点化した評価課題へと改善できると考える。なお，E２－１段階の生徒については「$\Sigma_{k=1}^{n} a_k\cdot b_k=\Sigma_{k=1}^{n} a_k\cdot\Sigma_{k=1}^{n} b_k$」という変形はできないと考えて，$k^3=k^2+k^2(k-1)$という恒等式を利用したとも考えられるが，生徒の記述からその意図を解釈することはできなかった。少ない事例ではあるが，ここでも先述のE１の解答と同様に推論の意図を併せて問う必要性があった。

７．調査課題の改善と今後の課題

上記の調査課題の評価を踏まえて，調査課題の改善案を末尾に提示する。変更点は，

（ｉ）考察時間を設けないこと，

（ⅱ）$\Sigma_{k=1}^{n} k^3=\{\frac{1}{2}n(n+1)\}^2$を示すこと，

（ⅲ）「$\Sigma_{k=1}^{n} a_k\cdot b_k = \Sigma_{k=1}^{n} a_k\cdot\Sigma_{k=1}^{n} b_k$」という変形が正しくないことを明示すること，

（ⅳ）推論の意図を問うことの４点である。なお，ここでは$\Sigma_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$を導いた過程もあわせて示す。

今後の課題はこの改善した調査課題を用いて実践し再評価すること及び，類推以外の方法による問題解決のための構想を立てる思考を評価する課題を開発することである。

〈引用参考文献〉

高橋陽一郎ら．(2012)．『詳説数学Ｂ』．新興出版社啓林館．

中川裕之．(2010)．「類比を数学的に明らかにすることについて」．日本数学教育学会第43回数学教育論文発表会論文集．pp. 283-288.

和田信哉．(2005)．「帰納的推論と類比的推論を生かした算数の教授･学習に関する研究」．日本数学教育学会誌84（12）．pp. 2-13.

Polya, G.（1954／1959)．『数学における発見はいかになされるか1 帰納と類比』．丸善株式会社．

Polya, G.（1956／2004)．『いかにして問題を解くか』．丸善株式会社．

7　算数科における思考･判断･表現の評価課題の開発

筑波大学大学院人間総合科学研究科　院生　平林真伊

１．はじめに

本稿では，算数科において思考・判断・表現を評価するための課題を提案することを目的とする。

算数科においては伝統的に，あらかじめ定式化のなされた文章題が扱われている。その文章題を利用して，子どもたちは新たな概念を習得したり，習得したスキルを適用したりすることを学んでいるのである。しかし，このように内容を学習するための手段として文章題を利用するだけでなく，問題を数学的に処理した結果として得られた結論に基づいて，ある物事を判断するために文章題を利用することもできるのではないかと考えた。すなわち，現実事象を数学的に定式化し，定式化された数学的モデルから数学的結論を導き，その結論をもとの事象に照らして解釈･評価するといった数学的モデル化（三輪, 1983）の一連の過程を踏まえて，意思決定するという活動である。

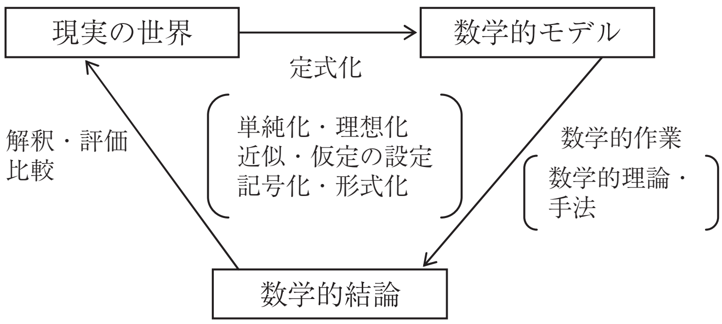


図１　数学的モデル化過程（三輪, 1983）

数学的モデル化過程の内，最も困難であるのは「定式化」である（三輪, 1983)。実際に，中学校３年生であっても，日常的な事象を理想化・単純化して，その特徴を的確に捉えることに課題があるということが，全国学力・学習状況調査において示されている（国立教育政策研究所, 2013)。子どもたちの数学的モデル化を行う力の育成に関する検討は別の機会に譲ることとし，本稿では上述のように，数学的モデル化の一連の過程を踏まえて意思決定することに焦点化し，その能力を評価するための課題を提案する。なお，それぞれの評価課題を，国立教育政策研究所が公表している「『活用』に関する問題作成の枠組み」に基づいて分類することを試みる。

２．算数科における思考・判断・表現の評価課題

（1）ジュース作りの問題

第一に，「ジュース作りの問題」である。この問題は，小学校第５学年の「平均」の単元で扱われる問題を改題したものである。

問題

あいさんは，オレンジをしぼって３Lのジュースを作ろうとしています。しかし，家には５個のオレンジしかないため，足りない分は買いに行かなければなりません。あいさんが５個のオレンジをしぼってみると，それぞれのジュースの量は次のようになりました。

185mL　190mL　185mL　180mL　190mL

１個のオレンジからどのくらいの量のジュースがとれるのかを調べるために，１個のオレンジからとれるジュースの量の平均を計算しました。

$185+190+185+180+190=930$　$930\div5=186$（mL）

すると，１個のオレンジからとれるジュースの量の平均は186mLであることが分かりました。あいさんは，この平均を使って，３Lのジュースを作るために必要なオレンジの数を下のように説明しました。

あいさんの考え

３Lのジュースを作るために必要なオレンジの数を計算すると，

$3000\div186=16.129\cdots$

16個にすると約0.1個分が足りなくなってしまうので，16＋１＝17で，オレンジは全部で17個必要です。

３Lのジュースを作るために必要なオレンジの数を求めるとき，あいさんの考えはよいと思いますか，よくないと思いますか。また，そのように考えたわけを書きましょう。

【解答例】

あいさんの考えはよくないと思う。あいさんは計算した結果の16.129 …の小数第一位を切り上げて17個と求めているが，オレンジを16個にしたところで足りないのは，約0.1個分である。１個のオレンジからとれるジュースの量の平均で考えると，0.1個分からとれるジュースの量は約18.6mLであり，３Lのジュースと比べると，その量はごくわずかであり，無視しても大きな問題はない。また，17個あれば３Lのジュースを確実に作ることができると考えられるが，より低コストでジュースを作ることを考えると，16個のオレンジを用意した方がいいと思う。

【出題の意図】

この問題は，得られた数学的結論（16.129 …）を目的に即して処理することができるかどうかを評価する問題である。3Lのジュースを作りたいという目的に加え，足りない分のオレンジを買いに行かなければならないという状況を考慮して，数学的結論を処理することが必要である。また，約0.1個分のオレンジからとれるジュースの量を3Lのジュースと比較して，3Lの内，18.6mLの占める割合が小さいことを根拠にし，小数第一位を切り上げるのではなく，切り捨てることが妥当であるとの判断をすることが必要である。なお，この問題は，「問題作成の枠組み」における$\alpha 3$（1）にあたる。

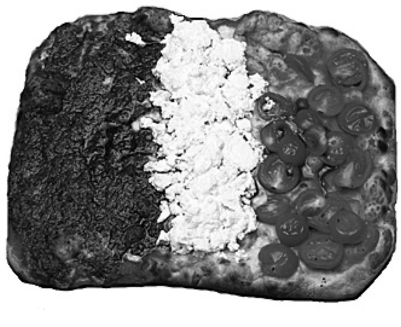
（2）ピザの問題

第二に，「ピザの問題」である。この問題は，経済協力開発機構（OECD）による生徒の学習到達度調査（PISA）において出題された「大陸の面積に関する問題」と，「ピザに関する問題」を参考にして作成されたものである。

問題

あるピザ屋さんでは，厚さが等しく，形が異なるピサを2種類販売しています。ピザAは丸い形で，値段は800円です。ピザBは四角い形で，値段は700円です。

ピザA



ピザB

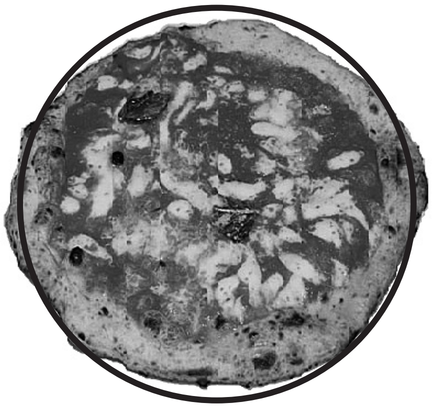
次の問いに答えましょう。

（1）上の写真を用いて，ピザAとピザBのおよその面積を求めましょう。また，面積を求めた方法を説明しましょう。

（2）ピザAとピザBとでは，どちらのピザの方がお得ですか。また，そのように答えたわけを書きましょう。

【解答例】

（１）ピザAの形を円，ピザBの形を長方形の概形として捉える。そして，概形として捉えた図形の半径や辺の長さを定規で測り，面積を求める。



ピザA

ピザB

ピザAを円とみなして考えると，円の半径は約３cmになるため，面積は３×３×3.14＝28.26で，約28.26cm^{2}となる。正答は，26.4074〜30.1754cm^{2}の間とする。

一方，ピザBを長方形とみなして考えると，長方形の縦は約４cm，横は約６cmになるため，面積は４×６＝24で，約24cm^{2}となる。正答は，22.04〜25.01cm^{2}の間とする。

（２）それぞれのピザの１cm^{2}あたりの値段を計算する。ピザAは800÷28.26＝28.3085 …で，１cm^{2}あたり約28.30円である。ピザBは700÷24＝29.1666 …で，１cm^{2}あたり約29.16円である。したがって，ピザAの方が１cm^{2}あたりの値段が安いため，ピザAの方がお得である。

あるいは，それぞれのピザの１円あたりの面積を計算する。ピザAは28.26÷800＝0.03532 …で，１円あたり約0.035cm^{2}である。ピザBは24÷700＝0.03428 …で，１円あたり約0.034cm^{2}である。したがって，ピザAの方が１円あたりの面積が広いため，ピザAの方がお得である。

【出題の意図】

問題（１）は，それぞれのピザの形を，ある図形の概形として捉えることができるかどうかを評価する問題である。PISA調査において出題された「大陸の面積に関する問題」では，複雑な形をした実際の南極大陸の地図を示し，そのおよその面積を求めさせている。小学生がそのような複雑な形を既習の図形の概形として捉えることは，大変困難なことであると考えられる。一方，本稿で示したようなピザの形であれば，その見た目から比較的容易に既習の図形を思い浮かべることができるだろう。なお，この問題（１）は，「問題作成の枠組み」におけるα１（３）にあたる。

問題（２）は，それぞれのピザの１cm^{2}あたりの値段，あるいは，１円あたりの面積を

求め，どちらのピザを選んだ方が得であるかを判断することができるかどうかを評価する問題である。問題（１）で正答を得ることができているかによって，問題（２）においても正答を得ることができるかどうかが関わってくる。PISA調査では，設問同士が関連するような出題をすることができないが，本稿で提案する評価課題では，あえて設問同士を関連付けることで，数学的モデル化の一連の過程を踏まえて意思決定をするというプロセス面を評価したい。なお，この問題（２）は，「問題作成の枠組み」におけるα３（１）にあたる。

３．おわりに

本稿では，算数科において伝統的に扱われている文章題を利用して，数学的モデル化の一連の過程を踏まえて意思決定することに焦点化し，その能力を評価するための２つの課題を提案した。本稿で提案した課題は，通常の教科書や授業等で扱われている文章題をそのまま利用するのではなく，目的を設定したり数値を工夫したりすることで改題したものである。これは，数学的モデル化の一連の過程を踏まえて意思決定する能力を評価するためには，教科書や授業等で扱われている文章題に対して，何かしらの手立てを加える必要があると考えたからである。

今後は，本稿で提案した調査課題を用いた調査を実際に行い，子どもたちの能力を評価することで，提案した調査課題の有用性を示すことが課題として残されている。

〈参考引用文献〉

国立教育政策研究所（監訳）(2010).『PISAの問題できるかな？　OECD生徒の学習到達度調査』. 東京：明石書店.

国立教育政策研究所（2013).『平成25年度全国学力・学習状況調査報告書 中学校数学』. http://www.nier.go.jp/13chousakekkahoukoku/data/research-report/13-j-math.pdf （2014年５月30日参照）

三輪辰郎（1983).「数学教育におけるモデル化についての一考察」.『筑波数学教育研究』, 第２巻，pp. 117-125.

8　算数・数学の評価に関する海外の研究・実践の動向
ーCommon Core State Standardsに準拠した評価問題の分析ー

筑波大学大学院 人間総合科学研究科　院生
大塚慎太郎　　小泉友香　　榎本哲士　　平林真伊

０．はじめに

CCSS（Common Core State Standards）とは，National Governors Association Center for Best Practices （NGA Center；州知事連合）及び Council of Chief State School Officers（CCSSO；州教育協議会）によって提案された，米国における新たな統一カリキュラムである。1989年と2000年に提案されたスタンダードは，NCTM（全米数学教育教師協議会）が主導であったのに対し，CCSSは連邦政府が積極的に関与し，トップダウンの形で進められたことに特徴がある。CCSSは，English Language Artsのスタンダードと，数学スタンダードの２つからなる。これらは，2014年より全面実施を予定している。本稿では，数学スタンダードに焦点をあてて考察を進めていく（以下，CCSSM）。

１．CCSSMの枠組み

指導内容を示す枠組みについて，１学年毎に記載されている点も，CCSSMの大きな特徴である。1989年度版のNCTMスタンダードでは，幼稚園（K）－４学年，5学年－８学年，9学年－12学年の３区分であったが，2000年度版のNCTMスタンダードでは，前幼稚園（pre－K: ４歳児を含む）－２学年，3－５学年，6－８学年，9－12学年の４区分となった。この背景には，アメリカの最も一般的な学校制度がK－５（小学校），6－８（ミドルスクール），9－12（ハイスクール）であること，また幼年児教育免許（幼稚園から小学校２・３年生以下）が小学校免許とは別に認められていることが考えられる（渡辺, 2001）。いずれにせよ，NCTMスタンダードが“学年帯（grade bands）”で示されていたのに対し，CCSSMでは，１学年ずつ学習内容を領域ごとに整理し，学習内容の系統性を築き上げることで，概念形成の促進や習熟を図るという点で大きく異なる（NCTMスタンダードの問題点や，CCSSMが提唱された背景に関する詳細な議論は，高橋（2001）参照）

また，NCTMスタンダードは，各学年の内容を獲得するプロセスを重視したカリキュラムであったのに対し，CCSSMは，National Research Councilが提案した５つの要素からなるMathematical proficiency[1]　を重視している点に，大きな相違がある。具体的には，すべての学年段階を貫き，算数・数学教育で身につけさせたい事柄（Mathematical Practices）として，以下の８点を挙げている。

- ▶ MP 1 : Make sense of problems and persevere in solving them（問題の意味が分かり，それらを解く中で目的を貫く）
- ▶ MP 2 : Reason abstractly and quantitatively（抽象的に，量的に推論する）

---

[1]　５つの要素とは，conceptual understanding, procedural fluency, strategic competence, adaptive reasoning, productive dispositionである。（cf. NRC, 2001）

- MP 3 : Construct viable arguments and critique the reasoning of others（生き残りうるような理屈を構成し，他者の推論を批評する）
- MP 4 : Model with mathematics（数学を使ってモデル化する）
- MP 5 : Use appropriate tools strategically（戦略的に適切なツールを使う）
- MP 6 : Attend to precision（正確さを求め続ける）
- MP 7 : Look for and make use of structure（構造を探求し，それを活用する）
- MP 8 : Look for and express regularity in repeated reasoning（推論を積み重ねる中で，規則性を求めてそれを表現する）

● 幼稚園・小学校算数（K～５学年）の領域（**表１**）

幼稚園と小学校におけるCCSSMは，次の６つの領域から構成されている（但し，幼稚園は（４）を含まない）。

（１） Counting and Cardinality （数えることと基数）
（２） Operations and Algebraic thinking （操作と代数的思考）
（３） Number and Operations in Base Ten （10進法に基づく数と操作）
（４） Fraction （分数とその計算）
（５） Measurement and Data （測定とデータ）
（６） Geometry （図形）

● 中学校数学（Middle School:第６～８学年）の領域（**表２**）

第６，７学年のCCSSMは，以下の５つの領域で構成されている。

（１） Rations and Proportional Relationships （割合と比例）
（２） The Number System （数体系）
（３） Expressions and Equations （式と方程式）
（４） Geometry （図形）
（５） Statistics and Probability （統計と確率）

第８学年では，「割合と比例」の代わりに，Function（関数）の領域が設けられている。

● 高等学校数学（High School: 第９～12学年）の領域（**表３**）

高等学校のCCSSMは，学年や教科において示されるのではなく，以下の６つの関連した概念カテゴリーごとに示されている。

（１） Number and Quantity （数と量）
（２） Algebra （代数）
（３） Function （関数）
（４） Modeling （モデリング）
（５） Geometry （図形）
（６） Statistics and Probability （統計と確率）

このうち，Modelingは他のカテゴリーの内容と関連して取り扱われるべきものだという考えから，特定の内容を記載するのではなく，他のカテゴリーの内容のうち関連が深いものについて星印をつけることで示されている。

表１：CCSSMにおける幼稚園・小学校算数の内容

	数えることと基数	操作と代数的思考	10進法に基づく数と操作	分数とその計算	測定とデータ	図形
K	・数詞とその順番の理解 ・ものの数を伝えるために数える ・数の比較	・合併と増加による加法と，分けることと取り去ることによる減法の理解	・11から19までの数を用いた位取りの素地の経験		・測定可能な属性の表現と比較 ・カテゴリーに基づいた分類とその数を数えること	・図形（正方形，円，三角形，長方形，六角形，円錐，円柱，球）の認識と表現 ・図形の分析，比較，創造，構成
1		・加法・減法の問題の表現と解決 ・加法・減法の性質と関係の理解およびその利用 ・20までの数の加法・減法 ・加法・減法を用いた方程式	・数える数の拡張（120まで） ・位取りの理解 ・位取りと計算の規則を用いた加法・減法		・任意単位を用いた間接的な長さの測定 ・時間を言うこと，書くこと ・資料の表現と解釈	・図形とその属性に基づく推論（属性の定義，図形の組み合わせ，円・長方形の等分割）
2		・加法・減法に関する問題の表現と解決 ・20までの数の加法・減法 ・同じ大きさのまとまりを用いた乗法の素地の経験	・位取りの理解 ・位取りと計算の規則を用いた加法・減法		・普遍単位を用いた長さの測定と推定 ・長さに関する加法・減法 ・時間とお金 ・資料の表現と解釈	・図形とその属性に基づく推論（図形の描画，円・長方形の等分割）
3		・乗法・除法の問題の表現と解決 ・乗法の性質と乗法と除法の関係の理解 ・100までの数の乗法・除法 ・四則演算に関する問題解決，およびパターンの特定とその説明	・位取りと計算の規則を用いた２桁以上の数の計算	・数としての分数の理解	・時間，容積，質量の測定と推定に関する問題解決 ・資料の表現と解釈 ・面積の理解および面積の乗法と加法への関連付け ・平面図形の属性としての周りの長さの認識，および周の長さと面積の区別	・図形とその属性に基づく推論（図形の包摂関係，図形の等分割と分数を用いた表現）
4		・整数の四則演算を利用した問題解決 ・因数と倍数の理解 ・パターンの生成と分析	・２桁以上の整数に対する位取りの理解の一般化 ・位取りと計算の規則を用いた２桁以上の数の計算	・同値分数と分数の大小関係の理解 ・整数の計算規則を利用した単位分数による分数の構成 ・分数の表記法としての小数の理解，および小数の比較	・単位変換（大→小）に関する問題解決 ・資料の表現と解釈 ・角と角度の理解	・直線と角の作図と理解，および直線と角の性質による図形の分類

5		・数式の表現と解釈 ・パターンとその関係の分析	・位取り記数法の理解 ・整数と$\frac{1}{100}$の位までの小数の計算	・分数の加法・減法の方法としての同値分数の利用 ・整数の乗法・除法の理解に基づく分数の乗法・除法	・普遍単位の変換 ・資料の表現と解釈 ・体積の理解，および体積の乗法と加法への関連付け	・座標平面を用いた現実世界と数学の問題の表現 ・性質による平面図形の分類

表2：CCSSMにおける中学校数学の内容

	割合と比例 (8年生は関数)	数体系	式と方程式	図形	統計と確率
6	・割合, 比, 単位量当たりの大きさ	・分数の割り算 ・四則計算の習熟，公約数，公倍数 ・有理数と正負の整数	・式：累乗, 文字式, 計算法則 ・一次式：等式，不等式 ・独立変数と従属変数の数量関係	・面積，体積，表面積：三角形と四角形の面積の公式，多角形の面積，立方体，直方体の体積，座標上の多角形，展開図，表面積（立方体，角錐）	・資料の分析，ドットプロット，ヒストグラム，代表値，等
7	・割合，単位量当たりの大きさ ・比例	・正負の有理数の四則計算	・等式と計算法則 ・文字式を使った問題解決（等式，不等式）	・図形の関係，作図，説明：図形の拡大・縮小，図形の作図，切断面の図形（正四角柱，正四角錐） ・角，面積，表面積，体積：円周，π，円の面積の公式，角，複合図形・立体の面積，表面積，体積	・標本調査 ・確率：数の法則，確率事象，場合の数，複事象の確率
8	・一次関数 ・一次関数の表, グラフ, 式	・無理数	・累乗根と累乗 ・比例と一次方程式 ・一次方程式と連立方程式	・図形の合同，相似 ・図形の移動と合同 ・図形の拡大・縮小と相似 ・三平方の定理とその逆 ・円柱，円錐，球の体積	・相関関係，回帰直線

表３：CCSSMにおける高等学校数学の概念カテゴリー

数と量	代数	関数	図形	統計と確率	
・実数 ・量 ・複素数 ・ベクトルと行列	・式の構成を知ること ・多項式と有理式の計算 ・方程式を作ること ・方程式・不等式を使って考えること	・関数を解釈すること ・関数を作ること ・一次，二次，指数モデル ・三角関数	・合同 ・相似，直角三角形と三角比 ・円 ・図形の性質を式を使って表すこと ・図形の測定と次元 ・図形を使ってのモデリング	・量的データと分類データ(頻度)を解釈すること ・推測することと結論を説明すること ・条件的確率と確率の法則 ・確率を使って結論を導くこと	**モデリング**

2. 州主導による評価問題の開発

CCSSでは，次世代の評価システムを開発するために，5つの州連合に対して助成金の採択を決定している。これらの団体は州主導で運営され，4年以内（2011年から2015年まで）に評価に関する新領域を開拓し，新たな試験あるいは指導のサポートシステムを設立することを求められている。5つの団体は，それぞれの目的ごとに以下の3つに大別できる。

- **2つの包括的評価の連合 （Comprehensive Assessment Consortia）：**
  - PARCC （The Partnership for Assessment of Readiness for College and Careers）
  - Smarter Balanced （The Smarter Balanced Assessment Consortium）
- **2つの代替評価の連合 （Alternate Assessment Consortia）**
  認知的能力障害のおよそ50万人（または公立学校の人口の1％）の生徒に向けた代替の評価の開発
  - DLM （the Dynamic Learning Maps Alternate Assessment Consortium）
  - NCSC （the National Center and State Collaborative）
- **英語の熟達度評価の連合 （English Language Proficiency）**
  - ASSETS（the Assessment Services Supporting English learners through Technology Systems）

本稿では，特に数学教育に関わりのあるPARCCとSmarter Balancedというふたつの州連合に焦点を当てて紹介する。それぞれの団体の概略は，以下の通りである（**表4**）。

表4：PARCCとSmarter Balancedの概略

団体	PARCC	Smarter Balanced
役員	**Chair:** Mitchell Chester (Commissioner of Elementary and Secondary Education, Massachusetts) **Commissioner:** Tom Kimbrell (Arkansas) Robert Hammond (Colorado) Christopher Cerf (New Jersey) John B. King, Jr. (New York) Deborah Gist (Rhode Island) Kevin Huffman (Tennessee)	**Co-Chairs:** Joseph Martineau (Michigan Department of Education) Deborah Sigman (California Department of Education) **Executive Committee Members:** Dan Hupp (Maine Department of Education) Michael Hock (Vermont Department of Education) Mike Middleton (Washington State Office of Superintendent of Public Instruction) Lynette Russell (Wisconsin Department of Public Instruction) Charles Lenth (State Higher Education Executive Officers) Beverly L. Young (California State University System)
参加州[2]	23州+コロンビア特別区 約2500万人（K-12学年）	27州 約2100万人
管理州	Arizona, Arkansas, the District of Columbia, Florida, Georgia, Illinois, Indiana, Louisiana, Maryland, Massachusetts, Mississippi, New Jersey, New Mexico, New York, Ohio, Oklahoma, Rhode Island, Tennessee	California, Connecticut, Delaware, Hawaii, Idaho, Iowa, Kansas, Maine, Michigan, Missouri, Montana, Nevada, New Hampshire, North Carolina, Oregon, South Dakota, Utah, Vermont, Washington, West Virginia, Wisconsin

その他	**Participating States:** Alabama, Colorado, Kentucky, North Dakota, Pennsylvania, South Carolina	**Advisory States:** Alabama, Colorado, North Dakota, Pennsylvania, South Carolina, Wyoming
助成金	＄186 million	＄176 million

双方ともに，コンピューターを用いたオンライン上での評価を導入している（Smarter BalancedのWebサイトでは，PARCCのシステムは順応性が無いと指摘している）。総括的評価（Summative Assessments）については，PARCCは固定した形式が配信される（生徒は一つの固定された同等のアイテムや課題を行う）のに対し，Smarter Balancedでは調整されたアイテムや課題のセットを個人的に選ぶ順応性のある配信となっていること，学期末では再試験も可能としていることに相違がある。また，PARCCは診断的評価および中間評価（総括的評価と類似問題を出すことを原則）をそれぞれ１回行うこととしているが，Smarter Balancedは暫定的評価の回数，時期や範囲はその地域で決めてよいことになっている。

３．CCSSのChairらによる評価問題の開発

州主導の団体とは別に，大学の研究所を基盤とする団体による評価問題の開発が行われている。数学のCCSSを対象として開発を行っている団体は，CCSSのChairであったWilliam G. MaCallum氏がChairを務めるIllustrative Mathematics Project（以下，Illustrative Mathematics）や，Co-ChairであったPhil Daro氏やAlan Schoenfeld氏らがメンバーとなっているMathematics Assessment Project（以下，MAP）がある。

３.１ Illustrative Mathematicsによる評価問題の開発

Illustrative Mathematicsは，アリゾナ大学の数学・教育研究所（Institute for Mathematics & Education）の主導の下，ビル＆メリンダ・ゲイツ財団の助成金を受けて評価問題の開発を行っている。この団体は，CCSSの実施において生徒が経験する数学的取り組みの範囲やタイプを描くことによって，また，CCSSの実施をサポートする他のツールを公開することによって，州や評価の連合，テスト会社やカリキュラム開発者へのガイダンスを提供することを目的としている。主な役員を下記の**表５**に示す。

Illustrative MathematicsのWebサイトには，学年と内容領域ごとの課題，及びその解説と他の内容領域との関連が掲載されている。この課題を検討する際に，数学科教師，数学教育者，数学者が協同で行っている点に特徴がある。現在は，スタンダード，誤答例，模範的なアプローチと関連づけた教室ビデオの作成，及び課題を軸とした授業や単元の構成に取り組んでいる。

[2] CCSSに参加しているのは，46州とコロンビア特別区である。アラスカ州，ミネソタ州，ネブラスカ州，テキサス州，ヴァージニア州，プエルトリコ，北マリアナ諸島は不参加。アラバマ州，コロラド州，ノースダコタ州，サウスカロライナ州は，PARCCに参加し，Smarter BalancedのAdvisoryに所属している。

表５：Illustrative Mathematicsの役員

Team	Advisory Board
William G. McCallum, Chair (University of Arizona) **Kristin Umland,** Co-chair (University of New Mexico) **Ashli Black,** Director of Social Networking **Patrick Callahan,** Director of Professional Development **Eric Connally,** Software Architect **Phil Daro,** Senior Advisor **Jason Zimba,** Senior Advisor　他14名	**Dona T. Apple,** Mathematics Learning Community Project, Regional Science Resource Center, University of Massachusetts Medical School **Richard Askey,** University of Wisconsin (emeritus) **Deborah Ball,** University of Michigan **David Bressoud,** Macalester College **Albert Cuoco,** Education Development Center: Center for Mathematics Education　他17名

３.２ MAPによる評価問題の開発

MAPは，ビル＆メリンダ･ゲイツ財団の助成金を受けた，カリフォルニア大学バークレー校とノッティンガム大学のシェルセンターとの協同団体である。MAPは，実際的な言葉でCCSSMの実例となる資料を提供している。MAPは，総括的テストまたは課題（Summative tests or tasks）と，教室チャレンジ（Classroom Challenges）という２つの補完的なものから成る。課題は，CCSSMが暗示しているパフォーマンスターゲットを実際的に示すものであり，出題の意図，CCSSMとの関連，評価基準が示されている。テストはこれらの課題の組み合わせで作られており，高等学校用は40分，90分，3時間版が各４タイプずつ，第６・７学年用はA･Bの２つのセクション各40分からなる６タイプが掲載されている。また，教室でそれらの課題を具体的にどのように展開するか，単元計画，授業展開案，想定される生徒の反応や教師の発問が整理されている。

評価問題は，高等学校と中等学校それぞれに対し，“Expert”，“Apprentice”，“Novice”の３つのレベルに分けて提案されている。**表６**は，高等学校の評価問題，及び第６学年から第８学年の内容から構成されている中等学校の評価問題の数を示す。

表６：MAPにおける評価問題の数

評価問題のレベル	説　明	高等学校	中等学校
Expert Task	内容知識と同等に戦略的な問題解決スキルを要求する，リッチでより構造化されていない課題	16	12
Apprentice Task	すべての生徒が問題に取り組めることを保証した構造となっている，内容の充実した課題	24	26
Novice Task	特定の内容またはスキルに焦点があてられた小問	11	42
合　計		51	80

それぞれの評価問題には，数学的内容に関して，対象となる学年，領域，領域を構成する柱が記されている。しかし，CCSSで提唱されているMathematical Practicesのうち，どの項目に関する評価を意図しているかは明示されていない。すべての評価問題で共通に，以下の記述がある。

評価問題の種類は，その評価問題によって評価されるCCSS Mathematical Practicesの広がりと深さを示している。Novice Taskは，MP 2 とMP 6 のみを含んでおり，それは低レベルでなされる。Apprentice Taskは，MP 3 とMP 7 が加えられているが，評価問題の中で誘導があるゆえに，比較的控えめなレベルでなされる。Expert Taskは，すべてのPracticesの範囲をカバーすることを意図している。

注：これらの評価問題の種類は，どのように課題がMathematical Practicesと関連しているかに関する手引きを提供する。我々は現在，それぞれの課題で有用または適切と思われる特定のPracticesに言及するかどうか，検討している。

4．評価問題の分析

本稿で取り上げたCCSSに準拠した評価問題の中からいくつかの具体例を選び，それらを全国学力・学習状況調査における「活用」に関する問題作成の枠組みに基づいて分析する。特に「数学的プロセス」の観点から評価問題を特徴付ける。

4.1 PARCCにおける評価問題の特徴

図 1 に示した問題は，小学校のCCSSの領域の一つである「Number and Operations ― Fractions（数と演算―分数）」に対応する評価問題である。この領域における学習内容を評価するために，PARCCは次のような課題を提案している。この評価課題は，タイプ 1（概念，スキル，手続きを評価する課題）及びタイプ 2（数学的な推論を評価する課題）[3]に関するものである。

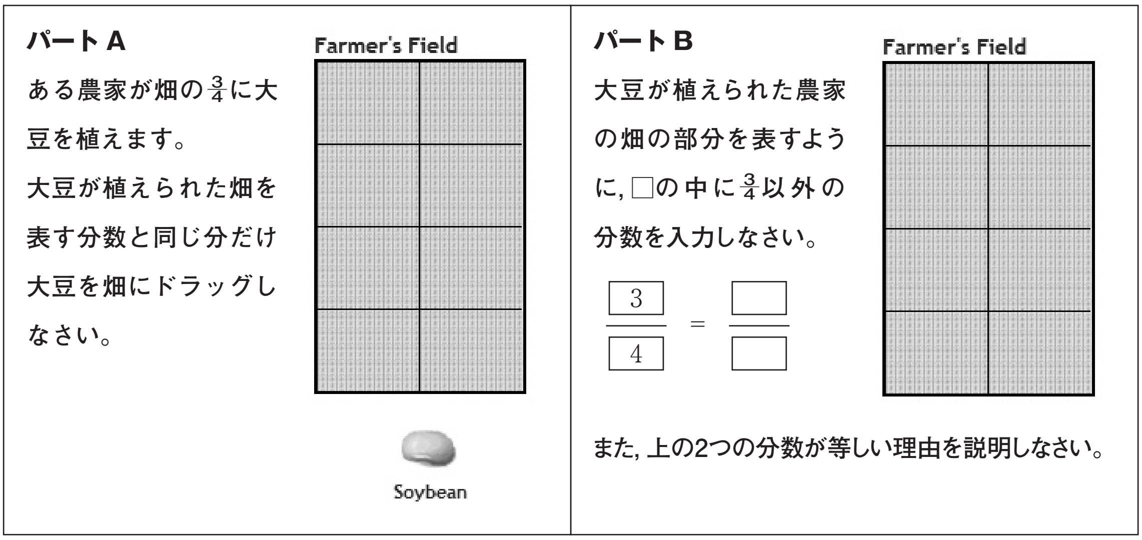


図 1 ：「畑」に関する問題

[3] PARCCは，CCSSに基づいて学習を行っている生徒の発達を評価するために 3 つのタイプの課題を設定している。
1. 概念，スキル，手続きを評価する課題
2. 数学的な推論を評価する課題
3. モデリング／アプリケーションを評価する課題

表７：「畑」に関する問題の説明

	パートA	パートB
課題タイプ	タイプ１	タイプ２
最も関連する数学的な内容の目標	第３学年　数と演算―分数　１ 全体をb等分するときに，1によって構成された量として分数$\frac{1}{b}$を理解すること。 大きさ$\frac{1}{b}$によって構成された量として分数$\frac{a}{b}$を理解すること。	第３学年　数と演算―分数　３b 簡単な等しい分数を認識し，作り出す（例：$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}, \frac{4}{6}=\frac{2}{3}$)。分数が等しい理由を説明する(例:視覚的分数モデルを用いて)。
最も関連するMP	MP２（抽象的に，量的に推論する）：第３学年の児童は，$\frac{3}{4}$のような抽象的な記号とそれが表す量とを関連付けなければならない。 MP７（構造を探求し，利用する）：空間的に方眼を構成し，与えられた分数の分子と分母に注意する必要がある。	MP２（抽象的に，量的に推論する）：第３学年の児童は，$\frac{3}{4}$のような抽象的な記号とそれが表す量とを関連付けなければならない。MP５（戦略的に適切なツールを使う）：視覚的な分数モデルは重要なツールである。この項目は児童にモデルを使うための独立的／戦略的な意思決定を必要としないが，それはその促進に表れる。パートAと同様にMP７も表れる。 MP３（生き残りうるような理屈を構成し，他者の推論を批評する）：PARCCの評価デザインにおいて重視されており，児童は２つの分数が等しい理由を説明することを求められる（3.NF.3bで期待されていること)。
問題の説明・評価の質	これは，テクノロジー環境における伝統的な分数の課題の例である。子どもは，８等分された畑の$\frac{3}{4}$を示すことを求められている。方眼上に３つの大豆だけをドラッグする子どもは，与えられた分数の分子に注意している。答えを見つける際に，子どもは畑を４等分するために心の中で方眼を構造化するかもしれない（例:４列のアレイ図)。 従来の多肢選択とは異なり，正しい答えを推測すること，あるいは消去法を用いることが難しい。従来の多肢選択とは異なり，1つ以上の正しい解法がある。記述式のテストとは異なり，たとえ課題が自動的に計算されるとしても，子どもは視覚的な表現を作り出すことができる。	従来の多肢選択とは異なり，正しい答えを推測すること，あるいは消去法を用いることは難しい。
採点	８つの正方形の方眼に６つの大豆をドラッグするために起こりうる方法が28通りある。そのすべての反応は正しい。多くの子どもたちは，方眼の上３列あるいは下３列を埋める。これら２つの配列は，畑の$\frac{3}{4}$に大豆が植えられているということが最も明確だからである。	この問題は児童に一桁の分子と分母の記入をさせる（したがって正答は$\frac{6}{8}$だけになる)。パートBの取り組みによってパートAの答えが間違っていると判断した児童は，パートAに戻ることもできるかもしれない。

問題のパートAは，８等分された畑の$\frac{3}{4}$に大豆を植えるという作業をさせる問題である。この問題では，$\frac{3}{4}$という抽象的な数を現実場面における具体的な量として解釈することが求められる。そのため，この問題は数学的プロセスのα3(１)「数学的な結果を事象に即して解釈すること」に位置付けられる。

問題のパートBは，大豆が植えられている部分である$\frac{3}{4}$と等しい分数を求め，なぜ等し

いか説明する問題である。この問題では，単純に値の等しい分数を求めるのではなく，パートAで解答した図を基にして値が等しい理由を説明することが求められる。そのため，この問題は数学的プロセスのα 3（2）「解決の結果を数学的に表現すること」に位置付けられる。

4.2 Smarter Balancedにおける評価問題の特徴

図2の問題は，Smarter Balancedが提案している問題の1つである「デシベル」に関する問題である。この評価問題は，高等学校を対象としており，問題のタイプは「推論を明確に表現すること」[4] になる。また，CCSSにおいて対応する内容は，高等学校「方程式の立式」1になる。

> **音楽コンサートの騒音のレベルは，コンサートが開催される敷地の端で80デシベル（dB）以下でなければならない。メリッサはデシベル計を用いて敷地の端の騒音のレベルが80dB以下になっているかどうかテストをした。**
>
> **・メリッサはスピーカーから10フィート離れたところに立っており，その地点での騒音レベルは100dBだった。**
> **・スピーカーから敷地の端までは70フィート離れている。**
> **・スピーカーとメリッサの距離が2倍になるにつれて騒音レベルは6dBずつ下がっていった。**
>
> **以上のことからラファエルは次のように主張した。**
> **「敷地の端の騒音レベルは80dB以下である。なぜなら敷地の端はメリッサの立っている場所から4倍以上離れているからだ。」**
> **ラファエルの主張が正しいかどうか説明しなさい。**

図2：「デシベル」に関する問題

表8：「デシベル」に関する問題のルーブリック

Top-Scoreの反応例 ラファエルは正しくない。なぜならdBレベルは少なくとも6×4＝24減るわけではないからである。dBレベルは，10フィートから始まり，距離が2倍になるにしたがって6ずつ下がる。スピーカーから10フィートの地点で音の大きさは100dB，20フィートで100－6＝94dB，40フィートで94－6＝88dB，80フィートで88－6＝82dBである。スピーカーから敷地の端までは70フィートなので，ラファエルは間違っている。音の大きさは82dBよりも大きい。
満点（2点） 反応が推論を明確に表現することの完璧な理解を示している。この反応は次のことを含む。 ・ラファエルが誤っていると判断している。 かつ ・この結論を支持する十分な推論を与えている。
部分点（1点） 反応が推論を明確に表現することの部分的な理解を示している。この反応は次のことを含む。 ・ラファエルは誤っていると判断している。しかし，この結論を支持する十分な推論を与えていない。 または ・ラファエルは正しいと判断している。些細な概念的または計算上の誤りを含むが，この結論を支持する推論を与えている。

この問題は，与えられた情報を基に，ある主張の真偽を判断し，その理由を説明できるかどうか評価する問題である。この問題は，与えられた情報から数学的モデルを構築し，

[4] Smarter Balancedは，CCSSに基づいて学習を行っている生徒の発達を評価するために4つのタイプの課題を設定している。
1．概念と手続き　2．問題解決　3．推論を明確に表現する　4．モデリングおよびデータ分析

そのモデルに従って数学的に処理し，結論を得ることができるかを評価する問題でもある。そのため，この問題は数学的プロセスのα１(１)「ものごとを数・量・図形等に着目して観察すること」，α1(２)「ものごとの特徴を的確にとらえること」，α１(３)「理想化，単純化すること」およびα３(２)「解決の結果を数学的に表現すること」を評価する問題として位置付けられる。また，ルーブリックによると，ラファエルの主張を正しいと判断していてもその理由を説明できている生徒にも部分点が与えられることも特徴といえる。

４.３ MAPにおける評価問題の特徴

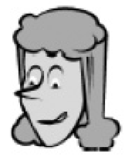
３つ目の例として，MAPにおける中等学校のExpert Taskの中から「白熱した議論（Hot Under The Collar）」に関する問題を取り上げる（**図３**）。この評価問題は，摂氏から華氏に温度を換算する２つの方法を比較する課題である。CCSSにおける数学的内容は，８.EE （式と方程式） 一次方程式と連立一次方程式を分析し，解くことである。

白熱した議論

ジョンとアンは，摂氏温度と華氏温度において気温がどのように変化するのかについて議論している。

正確な方法は次のようにすることです。
摂氏の値に９をかけて，それから５で割って，32 を加えます。

私は，あなたが考えている方法よりも簡単な方法を知っています。摂氏の値を２倍にして，それから 30 を加えます。
それは多くの目的に対してほぼ十分です。



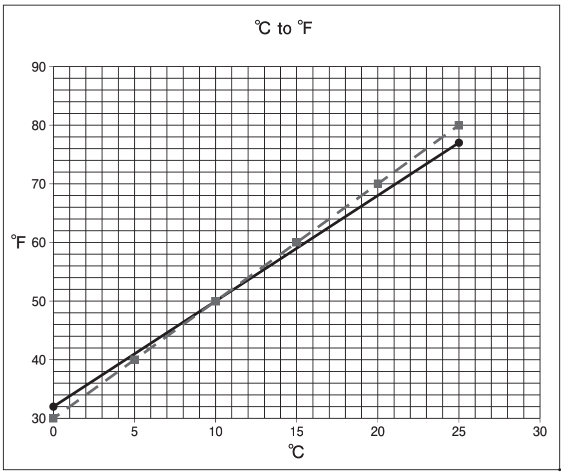
1. もし気温が20°Cならば，この気温は華氏の中で何度（° F）ですか。
もしアンが彼女の方法を用いるとすると，彼女の答はジョンの答とどれくらいずれますか。

2. 気温が何度のときに，アンの方法はジョンの方法より高い答えを出しますか。

図３：「白熱した議論」に関する問題

表９：「白熱した議論」に関する問題のルーブリック

	白熱した議論	ポイント	セクションポイント
1.	ジョンのルールを使用する F＝(20×９)÷５＋32 F＝68	2	
	アンのルールを使用する F＝20×２＋30 F＝70	2	
	アンの答は２°F高い。	1	5

<table>
<tr><td>2.</td><td>表にする
<table><tr><th>℃</th><th>ジョン℉</th><th>アン℉</th></tr><tr><td>5</td><td>41</td><td>40</td></tr><tr><td>9</td><td>48.2</td><td>48</td></tr><tr><td>10</td><td>50</td><td>50</td></tr><tr><td>15</td><td>59</td><td>60</td></tr><tr><td>20</td><td>68</td><td>70</td></tr></table>
またその代わりに，グラフが描かれるかもしれない。

</td><td>4
or
4</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>アンの方法を用いると，気温が10度より高い場合に華氏温度が高くなる。</td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Total</td><td></td><td>10</td></tr>
</table>

問題の１は，摂氏20度を２つの方法で華氏に換算し，その差を求めることができるか評価する問題である。この問題は，数学的プロセスのβ１（３）「方針に基づいて解決すること」を評価する問題として位置付けられる。

問題の２は，２つの方法を比較し，大小が変わる点を求めることができるか評価する問題である。この問題では，答えを求めるだけではなく，その理由を表やグラフを用いて数学的に表現することも評価の対象となる。そのため，この問題は数学的プロセスのα3(２)「解決の結果を数学的に表現すること」を評価する問題として位置付けられる。

５．まとめ

本稿では，CCSSMの評価問題を提案している４つの団体に焦点を当て，そのうち３つの団体の評価問題を分析した。３つともα「知識・技能などを実生活の様々な場面で活用する力」を評価する問題になっている。しかしながら，このことはすべての評価問題がαに関連する問題であることを意味しない。

本稿で取り上げたPARCCの評価問題の特徴は，単純に同値な分数を答えさせるのではなく，図的モデルに基づいて解答を求めている点である。そのため，この評価問題を通してα３「数学的に解釈することや表現すること」に関連した評価をすることができる。

Smarter Balancedの評価問題の特徴は，α１「日常的な事象等を数学化すること」が主になっている点である。ただし，この問題の文脈を考えると，デシベル計を使った後なので

結果は分かっている。むしろ，デシベル計を使えない場所の騒音を調べる文脈のほうが実際には適切かもしれない。また，距離が２倍になるにつれて騒音レベルが６dBずつ下がるという規則を見出す問題も必要かもしれない。

MAPの評価問題の特徴は，日本ではあまりなじみのない問題（摂氏と華氏の換算）であるが，現実場面における２つの方法の比較を問題にしている点である。単位換算の構造が比例関係ではなく，一次関数となっているため，問題のような文脈が現れる。似た構造をもつ現象として温度と音速の関係が考えられる。実際にどちらの方法を用いたほうがよいかは目的によることから，どちらの方法を用いるか判断するという問いも考えられる。

〈引用参考文献〉

Center for K– 12 Assessment & Performance Management at ETS（2012）. ***Coming Together to Raise Achievement: New Assessments for the Common Core State Standards,*** http://www.k12center.org/rsc/pdf/Coming_Together_April_2012_Final.PDF （2014.6.7）

Common Core State Standards Initiative（2010）.***Common Core State Standards for Mathematics,*** http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf （2014.6.7）

Illustrative Mathematics （http://www.illustrativemathematics.org/; 2014.6.7）

Mathematics Assessment Project （http://map.mathshell.org/materials/index.php; 2014.6.7）

National Research Council （2001）. ***Adding it up: Helping children learn mathematics.*** Washington, DC: National Academy Press.

Partnership for Assessment of Readiness for College and Careers（http://www.parcconline.org/; 2014.6.7）

Smarter Balanced Assessment Consortium （http://www.smarterbalanced.org/; 2014.6.7）

高橋昭彦 他（2012）. 米国における統一カリキュラムへの模索, *日本数学教育学会誌, 94(１),* pp. 19-35.

渡辺忠信（2001）. アメリカの算数・数学カリキュラム: NCTMスタンダードの役割と今後の展望, *日本数学教育学会誌,* 83（12）, pp. 35-43.

9　算数・数学科におけるルーブリックを用いた「思考・判断・表現」の評価の展望
―イギリスBowland Maths.に着目して―

東京学芸大学教育学部　准教授　西村圭一

1　問題の所在

「思考・判断・表現」といった，いわゆる資質・能力の評価のあり方が問われるようになったのは，最近のことではない。平成３年の指導要録の改訂において，「評価規準を設定するなどの工夫を行うこと」の趣旨について，次のように述べられている。

「『評価規準』という用語については，先に述べたように，新しい学力観に立って子供たちが自ら獲得し身に付けた資質や能力の質的な面，すなわち，学習指導要領の目標に基づく幅のある資質や能力の育成の実現状況の評価を目指すという意味から用いたものです。」（文部省，1993）

現在行われている評価規準に基づく評価も，「思考・判断・表現」といった資質・能力の評価のための「工夫」なわけである。さらに，「評価の観点」に至っては，戦後当初から，学籍簿や指導要録における「所見欄の観点」等として示されており，その中には「数学的な洞察」「論理的な思考」「数学の応用・創意」といった観点が散見される[1)]。

では，現在行われている評価規準に基づく観点別評価は，「思考・判断・表現」といった資質・能力の育成に資するものとなっているのだろうか。実際に，学校現場に目を向けると，観点別のテスト問題を用いて，正・誤による採点がなされていたり，A,B,Cといった評語だけが一人歩きしたりしている実態が伺える。また，中央教育審議会・教育課程部会で評価に関わる「児童生徒の学習評価のあり方に関するワーキンググループ」専門員（2009年）をつとめた鈴木秀幸（2013）は，次のような評価設計上の問題点も指摘している。それは，第一に，「思考・判断」の評価は，「非常に優れたものから幼稚なレベルまでの洗練の度合いの評価をするもの」であるのに，B基準中心の示し方であるため，事実上は『できる・できない』といった二分法に近くなっており，無意識にまたは暗黙のうちに到達度評価（ドメイン準拠評価）になっていることである。第二に，「『思考・判断』の能力や技能は，単元ごとや一定のまとまりごとなどで短期的に発達したり，変化したりするものではない」と考えられるが，「参考資料では，単元ごとに評価したり，一定のまとまりごとに評価したりするような処理を求めている」。（pp.32-33）

このことに関わる算数・数学科における問題点について，西村（2011）は，中学校２年生の文字式の学習における，次の例を挙げて指摘した。

１）「はじめの数」として，一桁の正の整数を一つ考えてください。	
２）偶数を一つ考えなさい。	３）１）と２）の数を加えなさい。
４）２）と３）の数を加えなさい。	５）３）と４）の数を加えなさい。
６）４）と５）の数を加えなさい。	７）６）の数の一の位を言ってください。
「はじめの数」を当てます。	

この問題に関わる，数学的な見方や考え方の評価規準は，「文字を用いて表現したり，目的に応じて式を変形したり，その意味を読み取ったりして，命題が成り立つことなどを

説明することができる。」である（国立教育政策研究所，2011）。この評価規準に基づくと，次の解答の評価はどうなるだろうか。

例１）

```
             7
                   2
             7  ＋ 2
             7  ＋ 2＋2
          7＋7  ＋ 2＋2＋2
       7＋7＋7  ＋ 2＋2＋2＋2＋2
        7×3     ＋      10
```

左側は，（はじめの数）× 3になる。右側は，偶数が4のときは20，6のときは30，8のときは40，10のときは50のように，（偶数÷2）×10になる。だから，一の位には関係しない。

1)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
7)	3	6	4	2	5	8	6	4	7	~~÷3~~
	21	42	28	14	35	56	42	28	49	×7

このように聞いた数を7倍して，その一の位の数を言えば当てられる。

ちなみに 2)が奇数だと，右側が$\boxed{}$5になるから，聞いた数から5を引いて7倍すれば当たる！（負の数になったときは10を足す）

左右に分けて示した式の記述並びにその下の説明からは，文字式を用いていないものの，目的に応じて式を変形したり，その意味を読み取ったりして，数当ての仕組みを説明することはできている。しかし，恐らく「C」であろう。すなわち，「文字式」という学習内容に基づいているため，「目的に応じて式を変形したり，その意味を読み取ったりして，命題が成り立つことなどを説明する」という思考・判断・表現の評価がなされていないということである。そして，単元末や定期考査でこのような問題が課された場合，この例のような生徒が，ポジティブな評価を受ける機会は少ないことが容易に想像されよう。もちろん，上記の評価規準を達成することが望ましいことにかわりはないが，算数・数学科における思考・判断・表現の質を高めるという目的からは，このような考えができることにもっと光を当てていく必要があると考える。

このような問題意識のもと，以下では，児童生徒の思考・判断・表現の質を高めるための評価のあり方について，イギリスでプロセス・スキルの育成を掲げる数学教育プロジェクトBowland Maths. に着目し，検討していくことにする。

2　Bowland Maths.における評価

Bowland Maths.（以下，BM）は，「ケーススタディ」，「教師教育モジュール」，「評価問題」を用意し，教材，指導，評価を一体化して，プロセス・スキルの育成を図ろうとしている（西村・山口・清水・本田，2011）。ここでは，ルーブリックを用いて，プロセス・スキルを多面的に評価する「評価問題」に着目する。ルーブリックとは，「成功の度合いを示す数段階程度の尺度と，尺度に示されたレベル（評点・評語）のそれぞれに対応するパフォーマンスの特徴を記した記述語から成る評価基準表」（西岡・田中，2003；p.14）である。すなわち，解答の質の違いを明らかにするために用いるものであり，解答を分類することを目的とする「解答類型」とは異なる。

（1）「評価問題」とルーブリックの枠組み

35あるBMの各「評価問題」は，2007年版のナショナルカリキュラム（QCA，2007；以

下，NC）のキー・プロセスに基づいている[2)]。そのキー・プロセスとは，「生徒が成長するために学ぶ必要のある，数学における本質的なスキルとプロセス」で，「表現」，「分析」，「解釈と評価」，「コミュニケーションと振り返り」の四つの軸からなる。具体的には以下のように示されている。

表現：

a　場面や問題の数学的な見方を同定すること

b　表現の選択をすること

c　場面や問題を単純化し，適切な変数や記号，図，方法を使って数学的に表現すること

d　用いるべき数学的情報，方法，道具を選択すること

分析：数学的推論

a　数学の中での関連性をつけること

b　問題に関連する知識を使用すること

c　視覚化し，ダイナミックなイメージを持って，処理すること

d　パターンを同定し，分類すること

e　例外や反例を考えながら，推論や一般化をし，正当化すること

f　値を変化させた効果を探究し，変化するものと変化しないものを探すこと

g　フィードバックに注意し，誤りから学ぶこと

h　制約や仮定の影響を認識しながら，結論や解決に向かって論理的に作業すること

i　ある状況を分析するために使われうる多くの様々なテクニックがあることを感得すること

j　帰納的に推論すること，演繹すること

：適切な数学的手続きの利用

k　紙やスクリーン上に，正確に，数学的な図やグラフをかいたり，作図をしたりすること

l　適宜，手計算か計算機を選択して正確な計算をすること

m　数，代数的な表現，方程式を操作したり，アルゴリズムを用いたりすること

n　ＩＣＴを利用するときの正しい文法を含めて，正確な表記法を用いること

o　方法，解，結論を記録すること

p　見積もること，概算すること，作業をチェックすること

解釈と評価：

a　見出したことに基づいた説得力のある主張や，一般的な記述をすること

b　作られた仮定や，結果や結論の適切さや正確さを検討すること

c　実証的な証拠の強さを評価したり，証拠と証明の間の区別をしたりすること

d　データを見て，パターンや例外を見つけること

e　見出したことを元の文脈に関連付け，推論を指示するかしないかを同定すること

f　ある問題や状況における，他者の数学的推論に関与すること

g　別のストラテジーの有効性を検討すること

コミュニケーションと振り返り：

a　見出したことを効果的に伝え合うこと

b　結果に関する数学的な議論に参加すること

c　別解のエレガンスさや有効性を検討すること

d　ある問題に対する異なったアプローチや，同じ構造を持つ別の問題に関する同値性を考察すること

e　現在の状況や結果と，以前に経験した状況や結果とを関連づけること

各「評価問題」では，これに基づきつつ，解決に必要となるキー・プロセスを示すとともに，ルーブリックでは，これら四つの観点ごとに，質の違いを捉える基準が詳細に記述されている。

また，BMのルーブリックでは，A,B,Cなどの評語を付けていない。「質」の変化は連続的なものであること，評語を付けると子どもはそれにだけ気をとらわれがちで改善につながらないという考えに基づいている。また，「評価問題」自体の質の違いは，NCにおける

到達目標（「数学的プロセスと応用」）の「レベル」との対応を示すに止まっている。その「レベル」とは，次の通りである[3]。

Level 4
問題解決のためのストラテジーを開発し，それらを数学内や，数学を実際的な文脈に適用する際に利用する。問題解決において，文脈や数の大きさを考慮することによって，電卓を用いたり，用いたりせずに，自分の出した結果が妥当であることを確認する。明確に順序立てて情報や結果を示しながら，パターンや関係を探究する。自分の考えを試すことで，解を見つける。

Level 5
数学的場面を探求し，課題を実行したり，問題に取り組んだりするために，その数学的側面を同定し，必要な情報を得る。必要に応じてICTを用いて，正確に計算をする。考えや結果が妥当かどうかを検討し，確認する。場面を様々な記号や言葉，図表を用いて数学的に記述することによって，場面を理解していることを示す。自分なりの単純な結論を導き出し，推論について説明する。

Level 6
実際的な課題に取り組み，それらの課題をより小さな，より処理し易い課題に，独立にまた組織的に分割することによって，非常に複雑な問題を解決する。見出したことを元の文脈と関連づけながら，様々な数学的形式で示される情報を解釈し，話し合い，総合する。書き言葉や話し言葉によって，図表の使用について説明し，情報を提供する。現在の状況と，以前に経験した状況とを関連づけながら，数学的な正当性を示し始める。

Level 7
提示された問題や文脈から始めて，ICTを用いたり，用いたりせずに考えながら，値を変化させた効果を探究し，モデルや表現において変化しないものを見つける。数学的表現の選択理由や特徴を説明しながら，用いた数学を徐々に洗練したり拡張したりする。同じ構造を持つ様々な問題に対して同値性を考察し，一般化や論証，解決を正当化する。数学的な説明と実証的な証拠との違いを感得する。

Level 8
別のアプローチを開発し試みる。様々な数学的手法を導入し用いながら，ある場面についての表現を比較し評価する。数学的な課題を探究する際に，自分たちの探究の道筋を振り返る。この作業を通じて，記号を正確に一貫して使用することによって，いろいろな人と，数学的意味や統計的意味を伝え合う。あるひとつの活動において到達した一般化や解決を検討し，発展させる。彼らは，推論や論理，採用したプロセス，得られた結果に対して建設的なコメントをする。

このように，キー・プロセスの育成・伸長の全体像を俯瞰しつつ，各「評価問題」を位置付けていることがわかる。

その一方で，NCに示されている「領域と内容」との対応は明確にされていない。内容のまとまりごとに進む学習の系列とは切り離して用いることを推奨しているからである。これは，BMが，解決に用いる数学の選択も重要なプロセスであると考えていることや，内容のまとまりごとに「到達」していくものではないというプロセス観を持っていることに基づいている。

（2）「評価問題」とルーブリックの実際

項末に，評価問題「遠足」とそのルーブリックを挙げた。この「遠足」に含まれるキー・プロセスとして，次のことを挙げている。

表　　現：場面を単純化したり，整理されていないデータを要約したり，データを数学的に表したりする。

分　　析：費用を正確に計算する。
解釈と評価：自分たちで作成した表を解釈し，最善の行き先を決める。
コミュニケーションと振り返り：行き先を決める過程や方法をわかりやすく説明する。

これらと，ルーブリックの最上段に示されている問題解決に即した具体的な観点とは一部を除いて概ね対応している。そして，ルーブリックには，この最上段に示されている観点に基づいて，その質の違いが詳細に記述されている。例えば，「分析」では，「第一・第二希望の分析と計算」として，一部のデータだけへの着目（例えば，第一希望のみ集計）から，第一・第二希望の両方のデータへの着目（例えば，第一・第二希望を合計する），第一・第二希望の重み付けへと，質の高まりが見られる。また，費用の計算については，その一部だけの計算をしている状態から，正確に一人当たりの費用の計算をする状態までが見られる。これらは，２（１）に示したNCのキー・プロセスの「数学的推論」と「適切な数学的手続きの利用」に対応させていると推察されるが，「重み付けする方法を用いている」が「一人当たりの費用を計算できていない」のような場合にどう評価するのかなど不明確な点もある。

他に，次のような点が読み取れる。

・観点は相互に独立していない。例えば，「解釈と評価」の質が高くなるには，「分析」の質も高い必要がある。
・不必要な細分化はしていない。例えば，「表現」の記述は実質2段階である。

なお，２（１）に示したNCの到達目標の「レベル４～５」に当たるとされているが，その対応は具体的には説明されていない[4)]。

（３）「評価問題」の使い方

「評価問題」の使い方は，「教師教育モジュール」で示されている。その概要は次の通りである。

２単位時間に分けて扱う。第１時（30分程度の場合もある）には，教師は，適宜発問したりしながら場面の理解を促した上で，問題に取り組ませる。そして，教師は，回収したワークシートに対して，ルーブリックを見ながら評価し，キー・プロセスに焦点を当てたフィードバック（コメント）を記入する。例えば，「別の方法を考えることはできますか」「あなたはどんな前提をおきましたか」（表現），「どうやってこの結論を得ましたか」（分析），「ここまでは，あなたがどう考えたのかがわかりました。みんながわかるように，あなたの推論を書くことはできますか」（コミュニケーションと振り返り）などである。

第２時には，児童生徒は返却されたワークシートに書かれたフィードバックを読み，それに対する答えを考えたり，ペアやグループで，前時にはどう考え，コメントを踏まえどう改善しようと考えているかを共有したり，比較したりしながら，自分たちの考えを改善する活動に取り組む。その間，教師はその様子を見取りながら，改善のための支援（主として発問)をしていく。途中で，学級全体に発表させ，他の子どもに対して，「彼らは良い方法を選びましたか」（表現），「推論は正しいですか」（分析），「結論は目的にかなっていますか」（解釈と評価），「推論はわかりやすく，ついていけるものでしたか」（コミュニケーションと振り返り）などと，キー・プロセスに関わる評価をさせる。この後，さらに自分たちの考えを改善させたり，教師によるフィードバックや他者の考えが自分の解決

方法を改善するのにどのように役立ったかを振り返らせたりする。
第２時に，子どもにもわかるような表現に直したルーブリックを配付し，それを見ながら改善に取り組ませることも想定されている。

このような方法の背景には，Paul BlackとDylan Wiliamらによる「形成的評価」に関する一連の研究成果があるという[5)]。彼らの「形成的評価」は，自律的な学習者の育成，すなわち，将来的には，自己の学習を自己で評価し，その結果をふまえ改善・向上できるようにすることをめざしていることに特徴がある。換言すると，教室で提示する課題に対して，個々の学習者のいまいる場所（フィードアップ），行くべき場所（フィードバック），そこへの行き方（フィードフォワード）を，教師と学習者が把握し，学習者の変容に役立てる評価である。

このような評価を行う回数や時期，さらには，どの「評価問題」を使うかは，教師や学校の判断に委ねられている。２（１）に述べたBMのプロセス観に基づき，適宜，育成・伸長を図ることを尊重しているためと考えられる。

このようにBMでは，評価問題を，プロセス・スキルをより効果的に育成・伸長していくための一つの手立てと位置付けていると言えよう。そして，ルーブリックの使用は，このような評価を行う上で当然の帰結と考える。

（４）考察

算数・数学における「思考・判断・表現」の評価に対して，BMの「評価課題」の次の点が示唆的であると考える。第一に，「数学的プロセスと応用」の水準（キー・プロセスの習得状態のモデル）をある程度念頭に置き，「表現」，「分析」，「解釈と評価」，「コミュニケーションと振り返り」の四つの軸からなるルーブリックを作成し，多面的に評価していることである。その際，ルーブリックを，どの基準にあてはまるかや評語を付けることが目的ではなく，連続的な様相の一切り口を示したものであり，どこに近いかを知り，また知らせるために用いていることも示唆的である。

第二に，内容ごとにまとまった単元の学習とは切り離して評価していることである。１に述べたような，日本の内容の学習と一体化させた，数学的な見方や考え方の評価の仕方とは対照的である。

これらの点は，中央教育審議会·教育課程部会における，「内容の系統によってカリキュラムを構成し，その内容に即して思考力や判断力の育成をめざしてきたのが，わが国の教科指導であるといえる。したがって，内容の系統については確立できているものの，思考力をはじめとする活用力の系統については明らかにされていない。」[6)]（第４期第４回議事録・配布資料）という指摘に対しても示唆的であると考える。

第三に，「思考・判断・表現」を自ら改善していくことができるようにすること，言わば自律的な学習者の育成を志向することである。この点は，和田義信（1997）が，次のように述べているような評価本来の目的とも整合的である。

「子どものあらさがしをすることが評価の目的ではなく，子どもの学力順位をつけるということも評価の目的ではありません。子どもが，どういうことをやれば自分の成績がよりよくなるかということがわかり，自分の努力目標を明確につかみ，それへと一歩ずつ努力していくようになる，そういう子どもを育成したい。」（p.108）

第四に，日本の従来の算数・数学の学習において，あまり光を当てられていないプロセスがあることである。例えば，「遠足」にあるような，重み付けをして意思決定するような学習は，小･中学校のいずれの単元にも位置付けられていないであろう。BMの35ある「評価問題」を見ると，他に，仮定をおいて見積もりをすること（「フェルミ推定」）や，平面図に表して死角を考察することなどが挙げられる。

3　算数・数学における思考・判断・表現の評価の改善の展望

イギリスでプロセス・スキルの育成を掲げる数学教育プロジェクトBowland Maths. に着目し検討した結果をもとに，児童・生徒の思考・判断・表現の質を高めるための評価の改善に関するロードマップを提案する。

（1）「思考・判断・表現」の枠組みとその水準の構築

算数・数学科における「思考・判断・表現」の質を捉えるための観点を決め，その水準（想定される「思考・判断・表現」の習得状態のモデル）や系統を構築することが第一の課題である[7)]。それらは中･長期的に育成･伸長されると考えると，**2**で見たように，全体的な水準のどこにあり，今後，どういうことができるようになることが目標なのかを認識することが重要であると考えるからである。

また，教科横断的，汎用的な資質･能力の育成も一層重視されつつある[8)]。言うまでもなく，算数・数学の「思考・判断・表現」は，算数・数学の内容と一体化したものであり，ある内容を学習したことによって，はじめてできる「思考・判断・表現」もあるので，汎用的な資質･能力だけを指向することは避けなければならない[9)]。一方で，自律的に活動することや批判的思考などは算数・数学において重要であり，その互恵関係を見出すことは教育的に意義がある。この点で，各観点の水準の上位に，教科横断的，汎用的な視点を盛り込むことが考えられる。

また，水準（レベル）を規範的に決めるべきではないという批判もあるが，このように，目標・指導・評価と一体となって用いる場合には効果が期待されよう。その一方で，項目反応理論に基づく調査を設計し，その結果を参照することも有効であると考える。例えば，**資料2**に示すように，PISAでは，項目反応理論を用いて算出した得点に基づいて「習熟度レベル」を規定している。単純化して言うと，例えば，**レベル5**の記述は，**レベル5**（607～669点）の生徒ができていて，**レベル4**（545～607点）の生徒ができている問題群に着目したものである。PISA2012では数学的プロセス（定式化・適用・解釈）別に習熟度レベルの割合が算出されており，将来的には，プロセス別に，各レベルが記述されることも期待されている。

（2）評価問題とそのルーブリックの開発

上述の水準に基づく評価問題を開発することが第二の課題である。とりわけ，BMの「評価問題」に見られたような，日本の従来の算数・数学の学習で光が当てられてこなかったタイプの問題の開発が求められよう。

例えば，平成26年度全国学力・学習状況調査の算数Bの$\boxed{2}$の「６・７月の水の使用量が１年間の水の使用量の$\frac{1}{4}$より多いことを説明する上で適切なグラフを選ぶ」問題は，目的に応じて適切なグラフを選び，他者にわかりやすく伝えるという思考・判断・表現に関す

る問題である[10]。棒グラフ，折れ線グラフ，円グラフといったグラフ毎に学習が展開されがちだったことに対し，目的に応じて選択することに光を当てている。

同じく，平成26年度全国学力・学習状況調査の数学B $\boxed{1}$ の「校門の位置に立って見たときに，横断幕が木にまったく隠れない高さを求める」問題（**図 1**）は，現実事象から図形を見出し，図形の性質を適用する思考・判断・表現に関する問題である。従来の学習では**図 2** や**図 3** のように，はじめから示されていることが多かったことに対し，実際の問題場面において，自ら図形を見出すことに光を当てている。

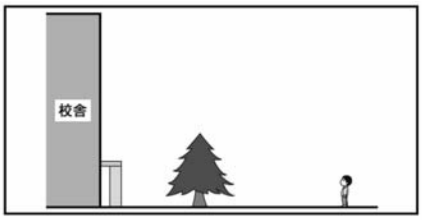


図1　平成26年度　数学B　1

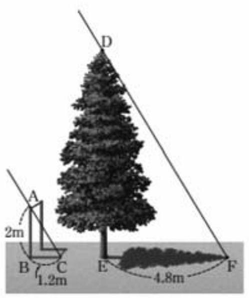


図2　中学校 3 年生の「相似」（藤井他，2011）

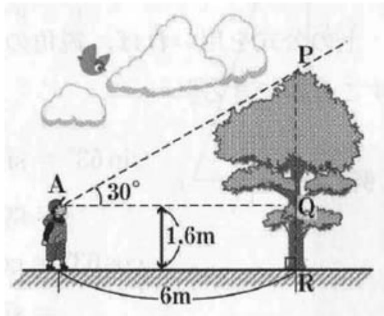


図3　高等学校の「三角比」（俣野他，2012）

また，『算数･数学科のオープンエンドアプローチ』（島田茂，1977）が，高次の学力の評価を目指して始められた研究であることを想起すると，当時の問題を再構成することも考えられる。

このような問題を，当該のプロセスの水準ごとに作成したり，それを用いた評価結果に基づいて水準を修正したりしていくことも望まれる。

（3）「思考・判断・表現」の評価に関する実践的研究

「思考・判断・表現」の質を高めることに資する評価の方法に関する実践的研究を行うことが第三の課題である。具体的には，形成的評価に関する実践研究を進める必要性がある。２に挙げたBMの形成的評価に照らして，現在多くの教師が行っているであろう評価を反省的に見てみると，例えば，次のような研究課題が挙げられる。

・正誤ではなく，考えの質に対する自己評価や相互評価ができるようにするための取り組み

・何をきっかけに，どう修正したり，先へ進んだりすることができたか，そのプロセスを可視化し，自覚させるための取り組み

最近，我が国でもよく耳にする「パフォーマンス評価」も，上述のような形成的評価の延長に位置付けるべきだと考える。つまり，私たちの多くが持っている，紙に印刷された課題を提示し，個人で取り組ませ，回収，採点し，返却する，という評価観の元でそれを実施しても，教師の負担に比して，子どもにとっての成果が得られないことになろう。

（4）システミックなアプローチ

Alan H. Schoenfeld（2007）が指摘するように，「数学の評価」には多面性があり，数学者，数学教育研究者，保護者，教育施策者，出版社・テスト業者，教師，教育養成・教師教育，児童・生徒によって目的や期待が異なる。例えば，数学者は，生徒が数学の中心的な考えについて理解しているかどうかや，何を理解しているかに焦点を当てようとするの

に対して，数学教育者は，数学の内容とプロセスが織りなす「数学的に考える」ことに焦点を当てようとするという。また，保護者は，点数，評定や順位を知りたがり，児童・生徒もそれが示されると他のコメントに対する関心やその効果が薄まる。教育施策者は，個々の子どもの個別の状況よりも学校や地域単位の結果に関心が向く。出版社やテスト業者は，利益やコストを優先する。教師は，評価を役立てようとすればするほど，指導のための時間を奪われる。

これらの指摘からは，評価をシステミックに考える必要があることが示唆される。すなわち，一部だけ改善しても，改善されていない面が残れば，それが改善をかき消す方向に波及してしまうので，上記の指摘のような全側面に対して改善を図っていく必要がある。現在の日本の状況を鑑みると，特に，以下のような点に留意する必要があろう。

○小中高で一貫した数学教育観をもつこと

高等学校における数学の授業や評価が，中学校までのそれとギャップがあることを「大学入学試験」の影響だとする指摘があり，実際，大学入試改革の議論も盛んだが，数学教育観のギャップを埋めることにも目を向ける必要がある。

○大規模調査の限界と弊害を認識すること

例えば，次のような指摘がある。

・ウォビゴン湖効果：テスト対策により，実際の能力や技能は向上しないのに点数だけが上昇する。

・WYTIWYG現象：What You Test Is What You Get.の略。テストに出されることだけに，教師も学習者も目を向けてしまう（そのテストがhigh stakesであればあるほど）。学習場面や活動をペーパー上に再現できるものだけに矮小化してしまうことにもなる。また，ある程度の正答率が見込まれる問題ばかりが出題されると，学習目標自体を低く設定してしまう弊害もある。

○教師の実務を考慮し，過度な負担を強いないこと

過度な負担は，教師を「採点しやすいもの」へと誘う。それは保護者への結果の「伝えやすさ」にも直結し，さらに，「現場のニーズ」となり，出版社やテスト業者はそのような「評価問題」の開発・販売に重きを置くことになる。

全国学力・学習状況調査や国際調査の結果に対する諸々の喧噪を想起すればわかるように，「評価」には，ときに誤った方向へと舵をきる契機になる危険性がある。評価は，個々の子どものために行うものであるということを常に見失わないようにしたい。

〈注〉

1）例えば，中学校数学の指導要録の評価の観点の変遷は次の通りである。

昭和24年：関数を理解してそれを問題解決に応用する能力，計算測定の技能，実際場面において正確に数学的な技能を使用する習慣

昭和30年：数学への関心，数学的な洞察，論理的な思考，技能，数学の応用・創意

昭和36年：数量への関心，知識・理解，技能，直感的な見通し，論理的な思考

昭和46年：知識・理解，技能，数学的な考え方

昭和55年：知識・理解，技能，数学的な考え方，数学に対する関心・態度

https://www.nier.go.jp/kiso/sisitu/siryou1/2-05.pdf　（2014月５月現在）

2）NCは以下の６項目によって構成されている。
①　カリキュラムの目的，数学の重要性
②　キー・コンセプト
③　キー・プロセス
④　領域と内容
⑤　カリキュラムのための機会
⑥　到達目標（attainment targets）

3）2007年版のNCは，キーステージ３，４しか発表されていなく，そこでは，レベル４以上だけが記載されている。

4）イギリスでは，1980年代後半に，GCSE（中等教育修了資格試験）において「コースワーク」と呼ばれるパフォーマンス評価が導入され，ペーパーテストの点数と合算され，最終的なグレードが付けられていた。何年生の終わりまでに，何％以上の子どもをいくつ以上のレベルにする，といった数値目標を掲げた学校や，その結果が公表されたりした背景があり，意図的にNCとの対応を明確にしていない面もある。

5）算数数学の授業における「形成的評価」は，例えば，Jeremy Hodgen & Dylan Wiliam（2006），*Mathematics Inside the Black Box：Assessment for Learnig in the Mathematics Classroom*，King's College London School of Education.　また，彼らの研究の背景には，社会的構成主義に基づく学習理論がある。

6）http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/siryo/07070908/009.htm（2014月５月現在）

7）長崎ら（2008）は，「算数・数学の力」として，「算数・数学を生み出す力」，「算数・数学を使う力」，「算数・数学で表す力」，「算数・数学で考え合う力」の４つの大項目，その下に３～５の中項目を挙げ，それぞれについて，水準Ⅰから水準Ⅲまでの３つの水準を設定している。

8）DeSeCoプロジェクト（ライチェン･サルガニク，2006）では，グローバル化が進む社会で，国際的に共通する鍵となる能力として，「相互作用的に道具を用いる」「社会的に異質な集団で交流する」「自律的に活動する」の３つのカテゴリーを提示している。また，国立教育政策研究所（勝野，2014）は，これからの教育において育成すべき資質・能力に関して，社会の変化，世界の教育動向をふまえつつ，特に教科等横断的に育成が求められる資質･能力に注目し，「基礎力」「思考力」「実践力」の三層から成る「21世紀型能力」を提案している。「思考力」は，論理的・批判的思考力，問題発見解決力・創造力，メタ認知から構成されるとしている。その具体的な構成要素は次の通りである。
・論理的・批判的思考力
　ⅰ．比較・関連付けなど
　　・比較したり関連付けたりする
　　・組織的・体系的に考える
　ⅱ．理由付けや判断力
　　・状況に適切な理由付けを行う
　　・情報，証拠，見解を効果的に分析し，評価して判断する

・問題発見解決力・創造力

ⅰ．問題発見解決力的思考力

・問いを発見する

・問いを解決するプロセスをデザインし，実行する

ⅱ．創造的思考力

・（ブレーンストーミングなど）アイディアを創造する広い手法を活用し，アイディアを熟考・洗練・分析・評価する

ⅲ．協働による創造力

・集団的なインプットとフィードバックの活動を活用し，失敗に学びながら新しいアイディアを開発し実施する

・メタ認知

ⅰ．モニター力

・学習課題を解いている相手をモニターし，問題を見つける

・自分自身の課題をモニターし，問題を見つける

・学習課題を遂行するプロセスをデザインする

ⅱ．コントロール力

・効果的な学習方法を自分自身で決める

・学習の状況を調整する

9）イギリスでは，1999年版のナショナルカリキュラム以降，「キー･スキル」として，コミュニケーション，数の応用，他者との協力，自分の学習と成績の改善，問題解決を挙げ，言わば汎用的能力の育成を重視してきた。2013年に発表された改訂ナショナルカリキュラムにおいては，教科内容や領域の固有性を重視する方向への見直しが図られた（勝野，2014）。背景に政権の交代があるとは言え，注目すべき点である。

10）平成26年度調査については下記で公開されている。http://www.nier.go.jp/14chousa/14mondai.htm（2014月５月現在）

〈引用参考文献〉

Alan H. Schoenfeld(2007), Issues and *Tensions in the Assessment of Mathematical Proficiency, Assessing Mathematical Proficiency,* Alan H. Schoenfeld(ed.), Cambridge University Press, pp.3-16

Bowland Charitable Trust(2008), Bowland *Maths: An imaginative resource for teaching mathematics Key Stage 3.*（DVD）.

藤井斉亮/俣野博他（2011），『新しい数学３』，東京書籍，p.125

勝野頼彦（研究代表）（2014），『資質や能力の包括的育成に向けた教育課程の基準の原理』，国立教育政策研究所平成25年度プロジェクト研究調査研究報告書

国立教育政策研究所編（2013），『生きるための知識と技能　5　OECD生徒の学習到達度調査（PISA）2012年調査国際結果報告書』明石書店

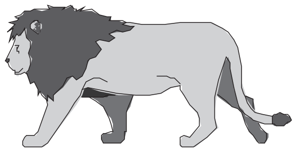
俣野博・河野俊丈（編）（2012），『新編　数学Ⅰ』，東京書籍，p.116

西岡加名恵・田中耕治（2009），『「活用する力」を育てる授業と評価　中学校　パフォーマンス課題とルーブリックの提案』，学事出版.

文部省（1993),『小学校教育課程一般指導資料』
長崎栄三他23名（2008),「算数・数学教育の目標としての「算数・数学の力」の構造化に関する研究」，日本数学教育学会誌，90-4，pp.11-21
西村圭一（2012),「算数・数学科における『思考・判断・表現』の評価のあり方－中学校に焦点を当てて－」,『研究紀要』，No.41，日本教材文化研究財団，pp.34-38
西村圭一・山口武志・清水宏幸・本田千春（2011),「数学教育におけるプロセス能力育成のための教材と評価に関する研究－イギリス「ボーランド数学（Bowland Maths.）」の考察－」，日本数学教育学会誌『数学教育』，93-9，pp.2-12，2011
Paul Black & Dylan Wiliam（1998), *Inside the Black Box : Raising Standards Through Classroom Assessment,* King's College London School of Education.
QCA（2007), *Mathematics: Programme of study for key stage 3 and attainment*
ライチェン・サルガニク編著（立田慶裕監訳）（2006),『キー・コンピテンシー　国際標準の学力をめざして』明石書店.
島田茂編著（1977),『算数・数学科のオープンエンドアプローチ』，みずうみ書房
鈴木秀幸（2013),『スタンダード準拠評価「思考力・判断力」の発達に基づく評価基準』，図書文化
和田義信（1997),『講演集（5）学習指導と評価』，東洋館出版

資料１

Bosworth学校のリッキー先生は，30人の子どもと遠足に行きます。行き先の候補は，次の通りです。

Growlets 動物園	**Prison 博物館**	**宇宙科学ショー**
		
Bosworthから36マイル 入園料は１人 £2.50	Bosworthから30マイル 入館料は１人 £6	Bosworthから10マイル 入館料は１人 £10

学級で，どこへ行くかを投票しました。その結果は，以下の通りです。

名前	第一希望	第二希望
Olivia	動物園	宇宙科学ショー
Grace	宇宙科学ショー	博物館
Jessica	博物館	動物園
Ruby	動物園	宇宙科学ショー
Emily	宇宙科学ショー	博物館
Sophie	博物館	動物園
Chloe	博物館	宇宙科学ショー
Lucy	博物館	宇宙科学ショー
Lily	宇宙科学ショー	博物館
Ellie	宇宙科学ショー	博物館
Ella	動物園	宇宙科学ショー
Charlotte	宇宙科学ショー	博物館
Katie	宇宙科学ショー	博物館
Mia	動物園	宇宙科学ショー
Hannah	動物園	宇宙科学ショー

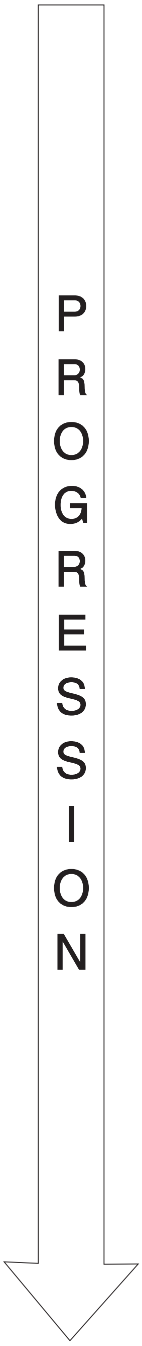
名前	第一希望	第二希望
Jack	博物館	動物園
Thomas	動物園	博物館
Joshua	動物園	博物館
Oliver	宇宙科学ショー	博物館
Harry	博物館	動物園
James	動物園	宇宙科学ショー
William	宇宙科学ショー	動物園
Samuel	動物園	博物館
Daniel	動物園	宇宙科学ショー
Charlie	博物館	博物館
Benjamin	宇宙科学ショー	動物園
Joseph	動物園	博物館
Callum	動物園	博物館
George	博物館	宇宙科学ショー
Jake	宇宙科学ショー	博物館

１．あなたは，リッキー先生は，第一希望，第二希望を考慮すると，どこへ遠足に行くべきだと思いますか。あなたがどのように決めたかを説明しなさい。

以下は，遠足についてのさらなる条件です。

バス会社には，１マイル当たり£6払います。最初の£200は学校が払います。先生は無料です。それぞれの子どもは同額を払います。

２．あなたが決めた遠足では，それぞれの子どもはいくら払う必要がありますか。あなたがそれを，どのように求めたかを説明しなさい。



表現	分析	解釈と評価	コミュニケーションと振り返り
データの選択とデータを要約することについての選択	生徒の第一希望，第二希望の分析と計算	選んだ目的地が文脈に合うことの確かめ	方法の説明：わかりやすさと完成度
与えられたデータのいくつかを選択している。	希望の分析のために与えられたデータのいくつかを使用している， 例えば，第一希望だけを数える，あるいは，遠足の費用についていくつかの計算をする。	いつかのデータの分析結果が目的地を選択するために使われている。	決定あるいは計算を説明しているが，未完成かつ（または）誤りがある。
	分析のために与えられたデータのいくつかを使用している。 遠足の費用の計算をする。	いつかのデータの分析結果が目的地を選択するために使われている。 遠足の費用に関する計算がなされているが，いくつかの誤りがある。	なされた決定と遠足の費用を説明しているが，いくつかの誤りがある。
第一，第二希望に関して，要約データを作っている。	第一希望と第二希望の両方を考慮しているが，それらの重み付けはしていない。 正確に，子ども一人当たりの費用の計算をする。	要約データを解釈や評価し，どこへ行くかを筋道立てて決めているが，すべてのことを考慮はしていない。	意志決定のプロセスと方法を説明しているが，わかりやすさが欠けている。
第一，第二希望に関して，要約データを作っている。	第一希望と第二希望を重み付けする方法を用いている。 正確に，子ども一人当たりの費用の計算をする。	要約データを解釈や評価し，どこへ行くかを筋道立てて決め，しかも，すべてのことを考慮している。	意志決定のプロセスと方法をわかりやすく説明している。

資料２

PISA2012　習熟度レベル　（国立教育政策研究所編，2013）

習熟度レベル		できること
1	**358点以上 420点未満**	情報がすべて与えられ，問いも明確な見慣れた場面で，問いに答えること。指示が明らかな場面においてそのまま指示に従うことによって，情報を見つけ出し，決まりきった手順を実行すること。明白で与えられた刺激に従うだけの活動を行うこと。
2	**420点以上 482点未満**	直接的な推論を行う以上のことは要求しない文脈において，場面を解釈し認識すること。情報源が１つのときに関連する情報を引き出し，1つの表現様式で利用すること。基礎的なアルゴリズム，公式，手順，規約を用いること。直接的な推論と結果の文字どおりの解釈を行うこと。
3	**482点以上 545点未満**	連続的な計算などの明確に述べられた手順を実行すること。簡単な問題解決の方法を選び，適用すること。異なる情報源を基に表現を解釈し，用い，それらから直接推論すること。自分の解釈，結果，推論を伝えるために，簡単な説明を行うこと。
4	**545点以上 607点未満**	制約がある，または仮定を設定する必要があるかもしれない，複雑だが具体的な場面で，明示されたモデルを効果的に使うこと。異なる表現を直接に実世界の場面に結び付ける記号表現を含めて，異なる表現を選び統合すること。このような文脈においてある種の洞察を持って，十分に発達した技能を活用し，柔軟に推論すること。
5	**607点以上 669点未満**	複雑な場面で制約を見つけ出し，仮定を明確にしながら，モデルを発展させ使うこと。これらのモデルに関連した複雑な問題に対処するために問題解決方略を選び，比較し，評価すること。広く十分に発達した考え方や推論の技能，適切に結び付けられた表現，記号や公式による特徴付け，これらの場面に付随する洞察を用いて，戦略的に問題に取り組むこと。
6	**669点以上**	複雑な問題場面において探究やモデル化を基に，情報を概念化し，一般化し，利用すること。異なる情報源や表現を結び付け，それらを自由に変えること。高度な数学的考え方と推論を行うこと。この洞察や理解を記号による形式的な演算や関係に適用し，見たことのない場面に取り組むための新しいアプローチや方略を発展させること。結論，解釈，議論，元の場面に対する適切さに関して，自分の活動や反省的思考を定式化し，正確に伝えること。

10　Bowland Math.の評価課題を用いた授業
－形成的評価を実現するアセスメントレッスンの実際－

東京学芸大学大学院教育研究科　院生　菅原恵美

1．はじめに

Bowland Math.（以下，BM）は，キー・プロセス[1)]の育成を目的としたイギリスの数学教育のプロジェクトである。BMはケーススタディ，教師教育モジュール，評価問題の3つを開発・提供している。教師教育モジュールでは，評価問題を用いた「アセスメントレッスン」を提案している。本稿では，そのアセスメントレッスンに精通したイギリスの数学教師が，日本で実践したアセスメントレッスンの実際を紹介することと，その実践から明らかになった日本の算数・数学教育における「思考・判断・表現」の評価への示唆を述べる。

2．Bowland Math.のアセスメントレッスン

BMのアセスメントレッスンとは，BMの評価問題を用いてキー・プロセスを形成的に評価し，育成することを目的とした授業である。日本で，形成的評価と言うと，教師が単元の途中や授業の途中で生徒の実態を把握し，その後の指導の改善をしていくための評価と認識されていることが多いように思われる。しかし，BMのアセスメントレッスンにおける形成的評価は，自己評価や相互評価，教師との対話を含んでいる。このような形成的評価の背景には， BlackとWiliamらの先行研究がある。1998年に彼らが公表した論文によって，このような新たな形成的評価は，欧米で関心を集めるようになった（鈴木，2012)。

彼らの主張する形成的評価は，「学び方を学ぶ」ことも目的としている点が特徴である。これは，いくら教師や他の生徒からフィードバックを与えられても，学習状況，目標，改善策を把握できなければ，有効に機能しないという考えが基にある。自己評価をして，改善し，学びを積み重ねていくことが，高次の能力の育成につながると考えられている。

BMのアセスメントレッスンは，このような形成的評価を教室の実践に取り入れ，キー・プロセスの育成・評価を目指す授業である。

3．日本でのアセスメントレッスンの実践

BMのアセスメントレッスンでは，前時に生徒に自力解決をさせ，それを回収し，教師がルーブリックを用いて評価し，授業の計画を立てる。BMの評価問題にはキー・プロセスを評価するために，「表現」，「分析」，「解釈と評価」，「コミュニケーションと振り返り」という4つのキー・プロセスを観点としたルーブリックが付属している。ルーブリックは，キー・プロセスの発達段階を，課題の内容に即して表現したものである。形成的評価では，教師と生徒の両方が，学習状況，目標，改善策を把握し，学習を改善していく必要があり，その指針のためにルーブリックを使用する。

以下では，日本で行ったBMのアセスメントレッスンの実際を紹介する。その概要は，以下の通りである。

対　象：東京学芸大学附属国際中等教育学校　第２学年　英語アドバンスクラス（17名）
実施日：2014年２月21日㈮
授業者：Nicole Worthey 先生
問題について：本時で扱った問題はBMの評価問題の一つである，「Fares not Fair !」を日本に合わせて，多少の変更を加えたもので，タクシーの運転手であるサリーさんに代わって，タクシー業界の協議会へ，タクシーの初乗り料金を上げるべきであるという提案書を作成するものである（**資料１**）。生徒は，与えられた2000年から2008年までのガソリンの値段と初乗り料金のデータを基に，初乗り料金をいくらに設定するか，そしてその根拠は何かを考え，主張する必要がある。唯一の正しい答えは存在せず，多様なアプローチが可能な問題である。
事前検討：本実践で用いたルーブリックは**資料２**である。事前に自力解決したワークシートを回収して評価し，その結果に基づいた事前検討を行った結果，本時ではキー・プロセスのうちの「コミュニケーション」[2)] に焦点を当てた授業を行うことになった。具体的には，「提案をコミュニケーションという観点から改善する経験をすること」と「良いコミュニケーションとはどのようなことかを理解すること」である。

　また，理想的なアセスメントレッスンでは，評価問題に付属しているルーブリックを生徒が理解できる表現に直して生徒に与えて使用する場合が多いが，今回は対象の生徒がアセスメントレッスンを受けることが初めてであるため，ルーブリックを与えずに授業を行うこととした。

（１） 導入

・問題を再び導入する

事前に自力解決したワークシートを生徒に返却した。

・信頼できる答えとは何かを考えさせる

教師が，今日の授業では考え（idea）を見るということを伝えた。そして，この問題のような現実世界の問題には唯一の正しい答えはないということ，しかし，高次の思考（high order thinking）を使って導いた結論は，より信頼できるということを説明した。そして，この問題での高次の思考とは何かと発問した。生徒は「多くのアイディアを使っているもの」などと答え，教師は「高次の思考とは，多くの様々な情報や，影響を与えるかもしれない多くの要因を考慮に入れ，どのように料金を決定するかということです。」とまとめた。そして，今日はペアで取り組み，1つの提案を作ってもらうということを説明した。

・答案を改善する視点を示す

ペア活動に入る前に，どのような視点で提案を改善すればよいかをスライドで示した（**図１**）。そして，今日の授業の焦点は「どのように他者に取り組みを伝えるか」ということであることや，フィードバックの書き方（色ペンで，好きな方法やよくわからないところを記入する）を，具体例を交えて説明した。

数学的技能
□どんな方法を使っていますか－その方法は良い選択でしたか？
□何か他の情報を考慮に入れるべきでしたか？
分析と解釈
□結論に達するために，どのような作業（working）を使っていますか？
□結論は作業（work）に基づいて正しいですか？

図１

（２）相互評価

・良いコミュニケーションとはどういうことかを考えさせる

生徒はパートナーと答案を交換し，色ペンでコメントを書き込んだ。教師はその様子を見ながら，「どうしてそう思ったの？」「これはどういうこと？」などと，生徒に説明を求めながら教室を回った。

教師は，一度ペアでの取り組みを止め，「他の人がやったことを理解するのが難しいときもあるだろう。」と言って，何が良いコミュニケーションを作るのか，読むときに何が手助けになったか，またはならなかったかを尋ねた。生徒は過程が書いてあることや，なぜそのような計算をしたのか，なぜそのような結論を出したのかが書いてあること，グラフを使うことを挙げた。

さらに，教師は「あなたのパートナーに，パートナーの答案についてあなたが好きなところを伝えましょう。」と書かれたスライドを示し，再びペアで，パートナーの答案を改善するにはどうしたらいいかを伝え合わせた。教師は，再び「どんな話をしたの？」「どうやって考えたの？」などと個別に質問をしながら教室を回った。

（３）改善活動

・ペアでよりよい提案をつくらせる

ここまでの取り組みで考えた，いいコミュニケーションをするためのいくつかのアイディアを使って，一つの提案を考えるように伝えた。**図１**のスライドを再び示し，どの数学を使ったのか，どの情報を考慮したのか，などについて考えるように伝えた。教師は再び，「どの方法でやることにしたの？」「なぜ～と考えたの？」「どうして彼の結論は信頼できるの？」などと個別に質問をしたり， iPadでワークシートを撮影したりしながら，教室を回った。

（４）全体での共有

・よりよく改善された答案を取り上げ，比較する

一人の生徒の前時の提案をスクリーンに映し，どんな数学を使ったかを本人に説明させた。次に，ペアになって改善した後の同じ生徒の答案をスクリーンに映して，これははじめの答案とどう違うかを本人に尋ねた。生徒はより多くの情報を使っている点を挙げた。さらに，コミュニケーションに関してはどう変わったかも尋ねた。生徒は，より理解しやすいように，どうやって最終的な結論にたどり着いたのかについて，やったことの流れを明確にしようとしたと説明した。

4．考察

（1）本アセスメントレッスンの特徴と背景にある考え

まず，BMのアセスメントレッスンの背景にある形成的評価の考えが，どこに反映されているのかを明らかにする。背景にあるその考えが，手立てや授業の工夫となってアセスメントレッスンに現れているはずであり，それらが日本の算数･数学教育の「思考･判断･表現」のような高次的な能力の評価へ示唆を与えてくれると考えるからである。

特徴①　事前の自力解決

前時に自力解決を行うことは，BMのアセスメントレッスンに関する資料にも示されており，アセスメントレッスンの一部であると言える。今回の実践では，自力解決の結果から多くの生徒が「コミュニケーション」に課題があることが明らかになり，「コミュニケーション」に焦点を当てた授業を行うことに決めた。このように，前時に自力解決を行うことで，捉えにくい「思考・判断・表現」の状況を把握し，学習者のニーズに合わせて授業を計画するということが実現されていると解釈できる。

特徴②　答案を改善する視点の提示と相互評価

教師は，対象の生徒がアセスメントレッスンに慣れていないため，ルーブリックを用いる前段階として，具体的な改善の視点を示して相互評価をさせた。この背景には，児童生徒の自己評価を目指した，「学び方を学ぶ」という形成的評価の考えがあると考えられる。

特徴③　教師による個別の頻繁な質問

教師は，相互評価やペア活動の最中に，頻繁に，「なぜそう考えたの？」「どうやって考えたの？」など，生徒により深く考えさせたり，考えたことを表現させたりすることを意図した質問をしていた。実際，教師は授業後に，「生徒が正しい視点から議論を進めているかを確認していた。」と言っていた。教師と生徒の頻繁な対話は，形成的評価の重要な要素として挙げられる。

特徴④　より良いプロセスの検討

生徒はキー・プロセスの質を認識しにくい。そこで，それに焦点を当てて答案を改善させることで，より良いキー・プロセス（ここでは「コミュニケーション」）とは何かを意識付けていると考えられる。さらに，一度答案の改善に取り組んだあとに，その改善のプロセスを共有することも意図されていた。教師は，授業の最後に全体で共有した答案について，「自力解決時からどのように変化して，どこが良くなったかの説明が上手だった子を取り上げた。」と言っていた。答案を改善する機会を提供したとしても，全員がうまく改善する経験をすることができるとは限らないため，改善のプロセスを共有することで，うまく改善できなかった生徒に対して，改善のモデルを示していると考えられる。これは，生徒全員が，形成的評価の目的である「学び方を学ぶ」ことができるための手立てであると考えられる。

（2）アセスメントレッスンにおいて明らかになった生徒の実態

次に，実践したアセスメントレッスンにおいて明らかになった生徒の実態について考察する。生徒の実態を明らかにすることで，アセスメントレッスンの意義を明らかにできると考えるからである。

生徒の実態については，次の二つのことが明らかになった。

一つめは，生徒のワークシートに現れた「コミュニケーション」の実態は，非常に多様

であるということである。自力解決時の生徒のワークシートを「コミュニケーション」の観点で見ると，数学的根拠がないもの，計算過程が明記されていないもの，データの一部しか使ってないもの，必要のない情報まで書いてあるものなど，様々であった。例えば，稿末に示した**図２**の生徒は，1年ごとに70円から100円くらい料金設定を上げることを提案しているが，その根拠として，「タクシー運転手について考えると，彼らの給料は運賃によるので運賃は確実に上げるべきだ。」と書いており，数学的根拠は示されていない。**図３**の生徒は，2006年から2007年の間の変化と2007年から2008年の間の変化のみを考慮しているが，なぜそのデータのみを選んだのかについては言及していない。このように，生徒の「コミュニケーション」の実態は多様であり，それぞれの生徒に応じた改善が必要なことがわかる。

二つめは，相互評価における，パートナーの改善に役立つようなコメントについてである。与えるコメントの質は答案の質にも依存すると考える。例えば，料金の計算をするときに2007年と2008年の利益の変化だけを取り上げた，**図４**におけるコメントは「なぜ46なのか」「2007年と2008年の間の利益の違いは本当に重要ですか？」となっており，この問題の文脈や目的に対して，使うデータはそれでよいのか，ということを考えさせる契機となることが期待される。

しかし，予め答案を見る視点を与えられているにもかかわらず，改善の指針を立てられるような具体的なコメントや，問題の文脈までを意識して妥当性や正当性を尋ねているようなコメントを書いた生徒は極めて少なかった。生徒の実際のコメントを見てみると，与えられたデータから問題の解決に使う情報を選ぶ場面と計算処理過程に対して，「すべての情報が使われているところが良い」，「計算過程が書かれているのが良い」，「どのように結論に至ったかが書かれているのが良い」などと書かれているものが多かった。教師が「答案について好きなところを伝えましょう」と書かれたスライドを見せたため，このように記述したと思われるが，その理由や問題の文脈に関わる妥当性・正当性を指摘するには及んでいないのである。**図５**におけるコメントは「結論にたどり着くまでの“推測”の仕方が好き。」「なぜ50なのか？」「どのように結論に至ったかを書くべきだと思う。」となっており，どのように好きなのか，なぜ好きなのか，ということがわからない。したがって，このコメントを受けた生徒は，推論の質を向上したり，根拠を明確にしたりするような改善には至らないであろう。

５．まとめ

「思考･判断･表現」のような高次の能力の長期的な育成と評価という視点から見た時，生徒の実態から，形成的評価とプロセスに焦点を当てる授業を一つの授業として実践に移そうとしているアセスメントレッスンは，日本の算数・数学教育にも必要であると考えられる。**４の考察**から，アセスメントレッスンの工夫や手立てとして，次の点が挙げられる。

・児童生徒が自力解決した答案を改善する経験を積めるようにする。全体の共有で改善過程に焦点を当てて発表をさせることは，良い改善過程のモデルを示す役割を持つ。
・「思考・判断・表現」に関わる能力と同時に自己評価能力の育成を目指す。自己評価能力の育成は，形成的評価を有効に機能させ，「思考・判断・表現」の育成を促す。
・教師と生徒が頻繁に対話することで授業の様々な場面で形成的評価を行う。教師の質問

は児童・生徒の思考を促し，教師と生徒の対話は思考を表出させる役割を持つ。
・教師はプロセスを授業で意識的に取り上げ，児童生徒はプロセスを意識的に改善するようにする。プロセスの意識化を助けるツールとして，ルーブリックが活用できると考えられる。

教師の発問に対する生徒の返答や変容の分析，ルーブリックの具体的な使用方法やその価値についての調査・考察は，今後の課題である。

〈注〉

1）イギリスの2007年版ナショナルカリキュラム（QCA，2007）に示されている。「生徒が成長するために学ぶ必要のある，数学における本質的なスキルとプロセス」であると説明されている。

2）イギリスのナショナルカリキュラムには，キー・プロセスの一つである「コミュニケーションと振り返り」について，以下のような説明がされている。
生徒は以下のようなことができるべきである。
a　わかったことを効果的に伝え合うこと
b　結果の数学的議論に携わること
c　どちらか一つを選ぶべき解法の正確さや能率について考えること
d　その問題に対する様々なアプローチと、似た構造をもった様々な問題の両方を比較して対応を探すこと
e　新しい状況や結果と、彼ら（生徒）が既に出会ったことのある状況や結果を関係付けること

〈引用参考文献〉

安藤輝次（2013），「形成的アセスメントの理論展開」，『関西大学　学校教育学論集』，第３号，pp.15-25.

鈴木秀幸（2012），「形成的評価（１）P･ブラック論文の衝撃」，『指導と評価』，58，（694），pp.43-45.

「Bowland Math.」http://www.bowlandmaths.org.uk/

OECD編（2013），「学習の本質－研究の活用から実践へ－」，明石書店，pp.159-188.

QCA（2007），*Mathematics：Programme of study for key stage 3 and attainment*

There are two ways to see the increases and decreases of the fares. One way is to see it from the customers (taxi riders)'s view. When you think about the customers, they are benefiting from the fact that the fare is not rising. However, when you think about the taxi drivers, who's wages depend on the fares, the fares should definitely go up.

During 2000 to 2004, when the gasoline price barely changed, the fare increase alot, which led to big profit. However, during 2004 to 2008, when the gasoline price rose sharply, the fares didn't change much, which led to very low profit. This is plus, minus, and zero so in total, there is barely any profit.

Therefore, the fare should be raised when the gasoline price rises. I suggest an increase by about 70 to 100 yen per year.

図 2

I think the taxis fee of current fare is too cheep. It has to be expensive than the current taxis.
my idea was to use proportion. I used it for the increased amount of money from 2006 to 2007, and 2007 to 2008.
The proportion is 8:46=33:x. 8 and 46 represents the increased price of gasoline from 2006 to 2007, and 2007 to 2008.
33 represents the increased base fare from 2006 to 2007.
x represents the taxis which should be expensive than 858 yen.
when I calculate this proportion it ends up 189.75. which is the amount of money (fee) should be add to the base fare, 858 yen.
which is 858+189.75=1047.75 yen.

図 3

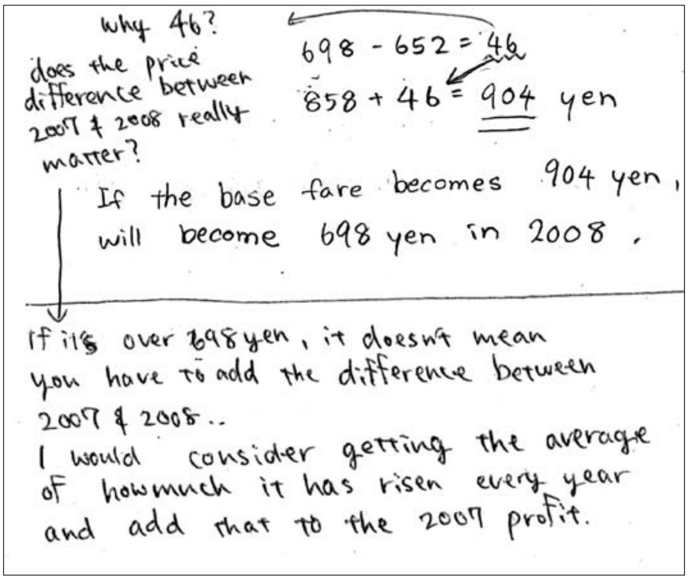

why 46?
does the price difference between 2007 & 2008 really matter?
698 − 652 = 46
858 + 46 = 904 yen
If the base fare becomes 904 yen, will become 698 yen in 2008.
If it's over 698 yen, it doesn't mean you have to add the difference between 2007 & 2008..
I would consider getting the average of howmuch it has risen every year and add that to the 2007 profit.

図 4

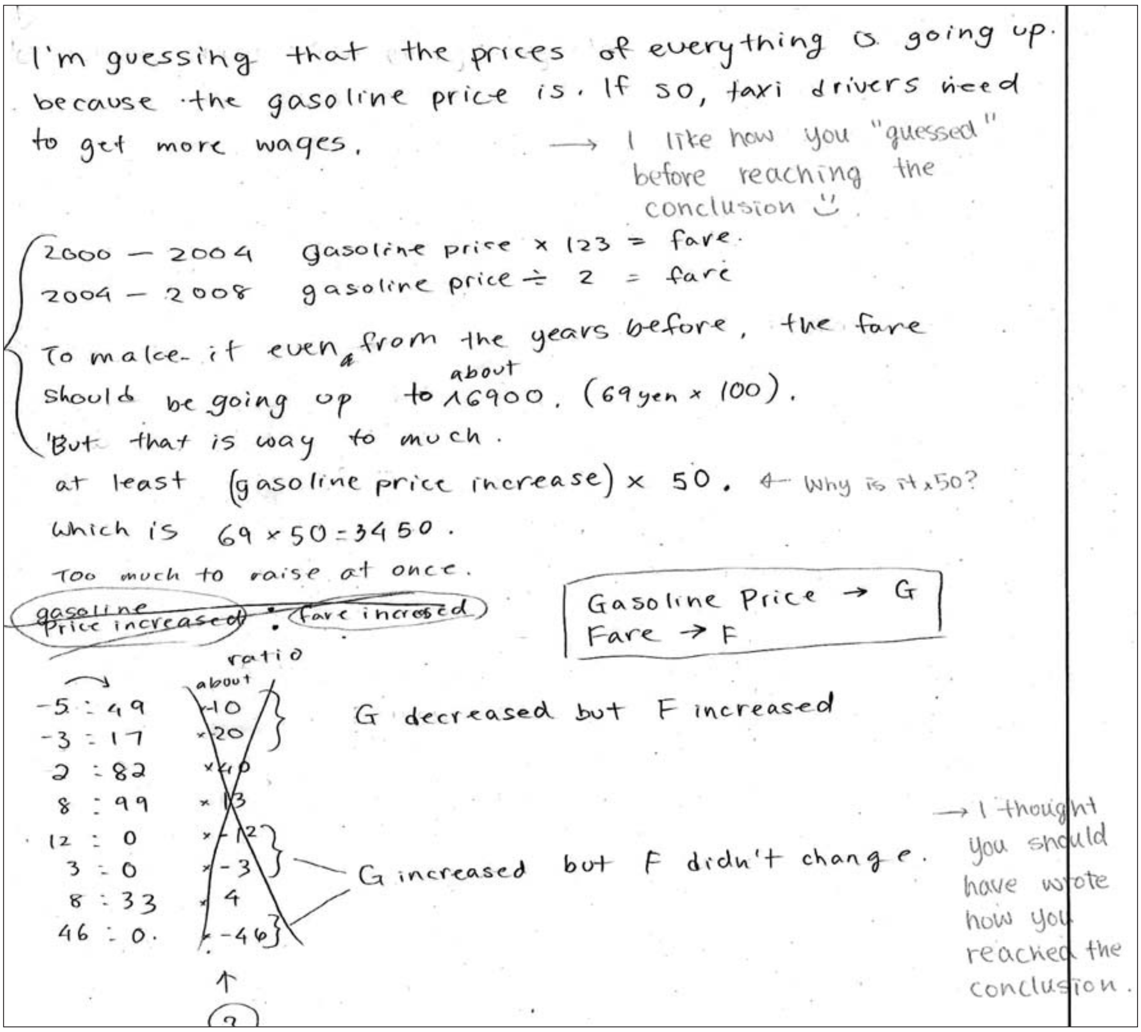

I'm guessing that the prices of everything is going up. because the gasoline price is. If so, taxi drivers need to get more wages.
→ I like how you "guessed" before reaching the conclusion ☺.
2000 − 2004 gasoline price × 123 = fare.
2004 − 2008 gasoline price ÷ 2 = fare
To make it even from the years before, the fare should be going up to about 16900. (69 yen × 100).
But that is way to much.
at least (gasoline price increase) × 50. ← Why is it ×50?
Which is 69 × 50 = 3450.
Too much to raise at once.
Gasoline Price → G
Fare → F
gasoline price increased : fare increased
ratio
about
−5 : 49 ×10
−3 : 17 ×20
2 : 82 ×40
8 : 99 ×13
12 : 0 ×−12
3 : 0 ×−3
8 : 33 ×4
46 : 0. ×−46
?
G decreased but F increased
G increased but F didn't change.
→ I thought you should have wrote how you reached the conclusion.

図 5

資料 1

Fares not fair !

2008年５月にイギリスでは，ガソリンの値段が上昇した。それにもかかわらず，タクシー業界の協議会では，初乗り（最初の３km）料金を上げようという結論にはならなかった。

タクシーの料金は，企業運営であっても個人運営であっても，協議会の意向にそって設定される。

下の表は，１Lあたりのガソリンの値段とタクシーの初乗り料金の変化を示している。

	１Lあたりのガソリンの値段	初乗り（最初の３km）料金
2000年５月	135円	578円
2001年５月	130円	627円
2002年５月	127円	644円
2003年５月	129円	726円
2004年５月	137円	825円
2005年５月	149円	825円
2006年５月	152円	825円
2007年５月	160円	858円
2008年５月	206円	858円

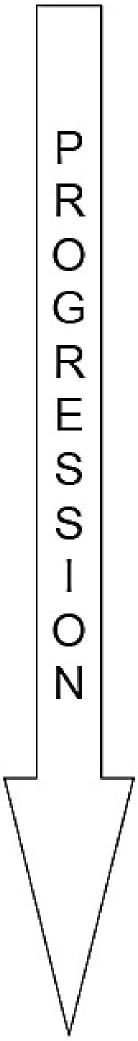
（ポンドを円に換算してあります）

個人経営でタクシーの運転手をしているサリーさんは，2008年にガソリンの値段が上がったのに対し，初乗り料金が上がらなかったことに対して不満を持っている。そこで，タクシー業界の協議会に提案書を作成することにした。あなたがもしサリーさんの立場だとしたら，初乗り料金を，どのような根拠で，いくらと設定することを提案するか。提出用のスライドを別紙に作成しなさい。このワークシートには，スライドを作成するにあたり，自分が何をどのように考えたのか，その過程がわかるように詳細に記述しなさい。消しゴムは原則使わないこと。尚，これ以外のデータが必要だと考えた場合は，各自でその値を想定すること。

資料２

Assessment guidance

キー・プロセスの発達



表現	分析	解釈と評価	コミュニケーションと振り返り
データ処理の内容	パターンと例外に対する洞察を得るためのデータ処理	提案した料金を正当化するのに用いられる発見	全体の方法と発見の説明；示された問題への洞察
コストの変化を比較するために加算的な方法（additive method）を選んでいる。 Pupil A	ディーゼルのコストの値上がり（値下がり）が必ずしも料金の値上げ（値下げ）に一致していなかったことを認識している。 Pupil A	提案した料金を示している。	どの年が考慮されているかを特定し，もっとも単純な方法で明快に説明している。 Pupil A
加算的な方法から結果を要約しようとする（例えば平均の使用）。	データを要約するとき、単純な文章，例えば，「2001～2003年に、ディーゼル経費は下がりましたが，料金は上がりました。」を作っている。	単純な論を立てて，提案した料金を正当化している。 Pupils A and B	どの年が考慮されているかを特定し，解を導く計算を示し，それらを確かめている。 Pupil B
単純であっても，非加算的な方法を使用している。 Pupils B and C + D	情報を処理して，例えば，平均や百分率を使って，データに対する洞察を得ている。 Pupils B and C + D	より複雑な論を立てて，提案した料金を正当化している。 Pupils C + D	明快に解決の「流れ」を示している；料金を決定するのに，他の要因が適用できることを認識している。 Pupil C+ D
少なくともこの４年間に基づく，非加算的な方法を使用している。	散布図や他の洞察に満ちた方法を使って，ディーゼルのコストと料金の関係を示している。	さらなる数学的道具を使って，例えば，データにもっとも合う直線を引いて，提案した料金を示している。	上と同様だが，問題がなぜ複雑かも正当化している，例えば、『燃料はコストのうちのわずかな部分であり，他のコスト（例えば労働）が考慮される必要がある。』

調査研究シリーズ 58

算数・数学科における「思考・判断・表現」の評価に関する研究

平成26年９月30日発行
編　集／公益財団法人　日本教材文化研究財団
発行人／新免　利也（専務理事）
発行所／公益財団法人　日本教材文化研究財団
〒162-0841　東京都新宿区払方町14番地１
電話 03-5225-0255　FAX 03-5225-0256
http://www.jfecr.or.jp

表紙デザイン（株）エスファクトリー 竹内則晶／印刷（株）天理時報社