平成２８年９月

数学的リテラシーの育成を図る教材の開発

調査研究シリーズ No.
65

公益財団法人
日本教材文化研究財団

はじめに

現在の学校数学では，知識・技能を活用して課題を解決するための思考力，判断力，表現力等の育成のために，数学的活動を一層充実させ，生徒が学んで身に付けたものを生活や学習に活用することを重視し学ぶ意欲を高め，学ぶことの意義や有用性を実感させることが授業改善の重要課題となっている。また，教育課程の改訂の動向の中で，「知識・技能」，「思考力・判断力・表現力等」，「学びに向かう力や人間性等」の三つの柱に沿って，数学科の目標と内容を捉えなおすことが求められている。すなわち，生徒が何を知っていて何ができるようになっているか，知っていることやできることを様々な場面でどう使うか，そしてそのなかで数学のよさに気づき，学びに向かう態度をいかに身につけるかの検討が必要である。

一方，OECDによる国際学力調査（PISA）や国際成人力調査（PIAAC）等は，知識基盤社会に生きる市民に必要な数学的素養について，数学におけるリテラシーやニューメラシーを捉える評価の枠組みと具体的な調査問題を提示し，学校数学の目標・内容・方法の再考を促す役割を果たしている。

本研究は，上記のような背景を踏まえ，近年の数学的リテラシー論を参照しながら，数学的リテラシーをどのように捉えるか，また中学校数学科における数学的リテラシーの評価をいかに行うかについて理論と実践の両面から検討し，具体的な評価問題を開発することを目的として２年間にわたって行われた。

上記のような今日的課題に対し，望ましい教材のあり方，授業場面での具体的な評価方法の検討を行った。その際，海外の研究・実践動向を視野に入れながら理論的考察を行うとともに，実際の教室での授業実践を行って，数学科における授業改善の方向を具体的に提示することを目指した。

研究会では，教材や授業実践の検討を行うとともに，筑波大学附属中学校や練馬区立三原台中学校等で，授業研究や討議を行った。本研究のテーマは，重要な教育課題に対するものであるがその具体化には様々な困難が伴う。本研究にも多くの課題が残されているが，研究成果を生かして，さらに研究を深めていきたいと考えている。

本研究を進めるにあたり，公益財団法人・日本教材文化研究財団より多大なるご支援を賜りました。また，特に，同財団の鍛治紀彦氏には研究会の運営をはじめ様々な面でお世話になりました。心より感謝申し上げます。

平成28年７月

研究者代表　清水　美憲

目　　次

1　研究の概要
ー数学的リテラシーの育成を図る教材の開発ー

1．研究の目的
中学校数学科では，現行学習指導要領の趣旨を受け，知識・技能を活用して課題を解決するための思考力・判断力・表現力等の育成のために，数学的活動を一層充実させて，生徒が学んで身に付けた事柄を生活や学習に活用することを重視して学ぶ意欲を高め，学ぶことの意義や有用性を実感させることが授業改善の重要課題となっている。また，次期学習指導要領の検討過程で示された「論点整理」によって，コンピテンシーベースの資質・能力論とその検討枠組み（「３つの柱」）が提示された。

一方，学校教育の外部においても，OECDによる国際学力調査（PISA）や国際成人力調査（PIAAC）等にみられるように，知識基盤社会に生きる市民に必要な数学的素養について，数学におけるリテラシーやニューメラシーを捉える評価の枠組みと具体的な調査問題が提示され，学校数学の目標・内容・方法の再考が求められている。

本研究の目的は，このような状況下でこれからの数学科学習指導のあり方を探るために，近年の数学的リテラシー論と海外の数学的プロセス論を参照しながら，中学校数学科における数学的リテラシーの評価のあり方について検討し，具体的な教材開発と指導モデルの提案を行うことである。

2．研究の方法
上記の目的のために，２年間の研究計画を立て，まず，数学的リテラシーの指導と評価のあり方について先行する研究を検討し，教材開発の論点整理と具体的な教材の開発を行うことにした(第１年次)。また，この理論的検討による準備の下，第２年次には，新しい教材の開発を進めるとともに，数学的リテラシーの指導と評価のための授業モデルの開発と，中学校生徒を対象とする学習指導の試行による実践的検討を行うこととした（第２年次)。

3．本年の研究成果
本研究では，諸外国の研究動向のうち，OECD/PISAの数学調査における評価の枠組み，米国Common Core State Standardsで示された数学的実践（Mathematical Practices）の項目，全国学力・学習状況調査における「数学的なプロセス」等を検討し，数学的リテラシーを捉える枠組みを考察した。考察の結果，本研究では，数学の世界での活動と日常事象の活動の２つの区分で数学的活動を捉えた上で，それらを支える数学的表現の使用，数学的コミュニケーション，数学的説明等のプロセス面を数学的活動の第３の側面と位置付けた。そして，この区分に基づいて，教材開発の論点整理と具体的な教材の開発を行った。

第２年次には，数学的リテラシーの育成のための教材開発をさらに進めるとともに，数学的リテラシーを育成するための授業の設計・実施における原則について検討し，数学の世界での考察と日常事象の考察のそれぞれについて，授業モデルを開発し，実践授業を実施して，生徒の問題解決活動の分析から数学的リテラシーの育成のあり方を検討した。前

者は，凹四角形の外角の和を考察する中で，角の概念自体を拡張する必要の生じる場面での生徒の活動に焦点を当てたものである。後者は，身近な事象を統計的に考察する活動として，統計的リテラシーを育成するものである。実践授業の成果として，生徒が主体的に活動に取り組み，他者との相互作用の中で自らの活動を振り返り，発展的に考察する様子が観察され，教材と指導モデルの提示について，一定の成果が得られた。さらに，新しい教材として，「スキージャンプのルール改正の妥当性」，「津波避難ビルの配置」，「登下校マナーの改善」，「足跡による犯人の追跡」等を開発した。

以上の研究成果と評価問題，授業実践記録とその分析結果については，冊子体の研究報告書を準備しており，刊行予定である。

研究会は，筑波大学東京キャンパス文京校舎を主たる会場として二ヶ月に１回を基本として開催するとともに，筑波大学附属中学校，練馬区立三原台中学校で実践研究を展開し，教材や授業実践の検討を行った。

４．研究の組織

氏　名	所　　属	分　　担
清水　美憲	筑波大学人間系 教授	研究の統括 （研究会の運営）
西村　圭一	東京学芸大学教育学部 准教授	数学的リテラシーの評価に関する理論的研究（渉外）
新井　　仁	国立教育政策研究所教育課程研究センター学力調査官	数学的リテラシーの評価に関する理論的研究
清野　辰彦	東京学芸大学教育学部 准教授	数学的リテラシーの評価問題の開発と試行（渉外）
舟橋　友香	奈良教育大学 准教授	数学的リテラシーの評価問題の開発と試行
小石沢勝之	筑波大学附属中学校 教諭	調査結果の分析
石綿健一郎	練馬区立三原台中学校 主幹教諭	調査結果の分析
花園　隼人	東京学芸大学附属高等学校 教諭	調査結果の分析
平林　真伊	筑波大学大学院人間総合科学研究科院生	海外の研究・実践動向の検討 （数学的モデル化）
橋本　博信	筑波大学大学院教育研究科 院生	教材開発の動向の検討 書記（研究会の記録）

（平成28年３月現在）

2　数学的リテラシーの評価と学習指導の改善

筑波大学人間系　教授　清水　美憲

1　はじめに：数学的リテラシーの育成を図る教材の開発

中学校数学科では，改訂学習指導要領の趣旨を受けて，知識・技能を活用して課題を解決するための思考力，判断力，表現力等の育成のために，数学的活動を一層充実させ，生徒が学んで身に付けたものを生活や学習に活用することを重視し学ぶ意欲を高め，学ぶことの意義や有用性を実感させることが授業改善の重要課題となっている。また，次期学習指導要領の検討の経過で，育成すべき資質・能力を検討する枠組みとして「21世紀型能力」のモデルが「３つの柱」の形で提示されている。

一方，学校教育の外部においても，OECDによる国際学力調査（PISA）や国際成人力調査（PIAAC）等にみられるように，知識基盤社会に生きる市民に必要な数学的素養について，数学におけるリテラシーやニューメラシーを捉える評価の枠組みと具体的な調査問題が提示され，学校数学の目標・内容・方法の再考が求められている。

このような状況下において，本研究では，近年の数学的リテラシー論を参照しながら，中学校数学科における数学的リテラシーの評価のあり方について検討し，具体的な教材開発と指導モデルの提案を行うことを目的とする。この小論では，このような教材開発と指導モデルの提案において考慮すべき数学のプロセス面の評価の問題を考察する。

2　数学的活動における数学的方法の指導

現在の学習指導要領では，「算数的活動」や「数学的活動」（これ以降，両者を合わせて「数学的活動」と呼称する）が各学年の指導内容として規定された。従来，数学における活動や思考に関わる過程や方法(プロセス)は，「～の指導を，数学的活動を通して….」という形で，指導方法に関わるものとして位置付けられてきた。あるいは，ある指導内容（例えば，多角形の外角の和が一定であるという性質）の指導に関する記載のなかで，（「帰納的に調べ，論理的に説明する」といったように）埋め込まれる形で示されてきた。

このように，数学的活動は，算数・数学科の目標を達成するための指導方法と捉えられるが，同時に，「授業ではこのような活動を展開することが望ましい」という（教育的に価値ある活動の）姿を示すものでもある。この意味で，数学的活動は，算数・数学科の指導目標とも位置付けられるべきである。さらに，数学的活動は，授業において子ども達が身に付けるべき数学的な過程や方法（プロセス）を内包する学習内容という側面ももっている。

前述のように，このような活動や思考に関わる過程や方法（プロセス）は，従来の学習指導要領では，各領域の教科内容の記述のなかに埋め込まれてきており，今回のように明示されることは，わが国の教育課程の基準としては目新しいといえる。

このような立場から，数学的活動を指導方法として位置付けることに加え，指導目標・学習内容という観点から捉え直すことによって，授業のあり方も変わってくるはずである。特に指導目標と学習内容の観点から数学的活動を捉え，算数・数学科の学習で実現される

べき数学的プロセスの規範（どのような数学的プロセスが望ましいかを示すもの）として，位置付けることが授業では欠かせない。

このように強調された数学的活動について，生徒の数学学習のあり方を示すプロセススタンダードと捉えて，生徒の数学学習の過程に焦点を当てた学習指導のあり方について考える。そして，数学的活動の充実を図る学習指導の改善のなかで，数学的リテラシーをいかに涵養するかについて具体的な考察を進める。

3　プロセススタンダードとしての数学的活動

（1）指導内容としての数学的活動

上述のように，算数・数学科においては，知識・技能を活用する力を育成し，学ぶことの意義や有用性を実感できるよう，既習の数学を基にして数や図形の性質を見いだす活動などの数学的活動が指導内容として規定された。まず，この数学的活動の記述に注目してみよう。

中学校数学科で具体的に規定されたのは，第１学年と第２，３学年との間で表現の違いが見られるものの，各内容領域の学習やそれらを相互に関連付けた学習において，下記ア～ウのような数学的活動に取り組む機会を設けることである（文部科学省，2008，p. 82）。

ア　既習の数学を基にして，数や図形の性質などを見いだし，発展させる活動

イ　日常生活や社会で数学を利用する活動

ウ　数学的な表現を用いて，根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動

このような活動は，小学校算数科では具体的な指導内容に関連させて記述しているのと対照的で，内容によらないプロセス（過程や方法）をコンテントフリーな形で示そうとする意図を窺うことができる。

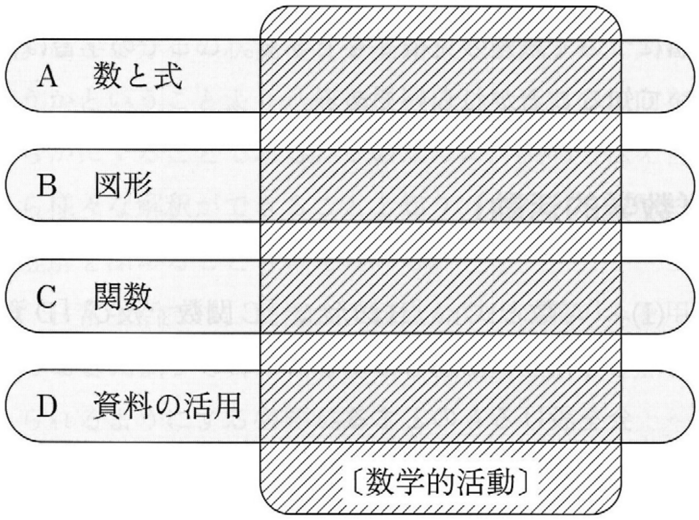


図１　内容領域と数学的活動の位置付け（文部科学省，2008，p. 82）

この数学的活動については，数学科の目標の冒頭に「数学的活動を通して」という表現が示されたことから，教科目標を達成する方法として数学的活動を根幹に位置付けたことは明瞭である。その一方で，指導内容としての数学的活動をどのように捉え，学習指導に

反映させるかについては，実践上の重要な検討課題となっている。このような数学的活動は，それぞれの内容領域において，このような活動を行うべきであるという活動の基準を示したものと捉えることができ，諸外国ではそのような基準が「プロセススタンダード」として示されている。

（2）諸外国におけるプロセススタンダードの強調

数学科カリキュラム改革の世界の動向の一つに，学校数学の指導内容とその配列のみならず，数学学習で発揮されるべき能力（competencies），態度や学習傾向（dispositions）等の重要さを考慮に入れ，それを目標に明示する点に共通点がみられる（清水，2008）。わが国の数学的活動の指導内容への位置付けも，大きくみれば，このような動向と軌を一にするものと捉えることができる。以下，2，3の他国の例を概観してみよう。

・オーストラリアの全国統一カリキュラム

オーストラリアでは，従来から，州毎にカリキュラムの基準の設定を行なってきたが，2010年から全国統一カリキュラムが策定された。この全国統一カリキュラムでは，内容の3領域「数と代数」，「計量（測定）と幾何」，「統計と確率」に対置する形で，数学的に習熟すること（proficiency）についてのスタンダードが設定された。

これらは，数学学習において，生徒が数学らしい行為をどのように行うかについての期待を述べたものである。詳細は割愛するが，次の4項目からなるスタンダードが設定されている。

・理解　・流暢さ（fluency）　・問題解決　・推論

・アメリカの統一コアスタンダード

一方，アメリカでは，2010年6月に公表され，2014年から実施される予定の全米統一コアスタンダード（Common Core State Standards）の数学編に「数学的実践（mathematical practice）のためのスタンダード」（8項目）が以下のように示されている。これは，数学における活動で何を大切にすべきかを述べたものである。

・問題の意味がわかり粘り強く解決する
・抽象的に，量的に，推論する
・批判に耐えうる議論をし，他者の推論を批判する
・数学を用いてモデル化する
・適切な道具を戦略的に用いる
・正確さに絶えず注意する
・構造を求め利用する
・推論の連鎖において規則性を探し表現する

この全米統一コアスタンダードは，理解，問題解決，推論といった学習のプロセス面について，「数学らしい活動をするとはどういうことか」や「数学に長けた者はどんな特徴を示すか」を想定して，より踏み込んだ形で記述されている。この新しいスタンダードは，1989年に初めて示された全米数学教師協議会（略称：NCTM）のスタンダードとは色彩が異なっており，中心的に執筆に当たった3名の数学者の意見が色濃く現れている。

・スウェーデンの新カリキュラム

同様に，スウェーデンでも数学学習におけるプロセス面の充実が新たに強調されるようになった。具体的には，次のような過程や方法が重視されている（清水，2012）。

・問題を定式化して解決したり，選択されたストラテジーや方法を評価したりする
・数学的な諸概念及びそれらの関係性を用いたり分析したりする
・計算や，ルーティン課題の解決のために，適切な方法を選択したり用いたりする
・数学的推論を適用したり，辿ったりする
・数式のような形式を用いて，議論したり，問いや計算や結論に説明を与えたりする

以上のように，これらの国では，問題解決，理解，流暢さや戦略性，推論，コミュニケーション，モデル化等についてのプロセススタンダードが示されており，個々の数学内容を学ぶ際に，それぞれのプロセスが質の高いものになるように配慮することを求めている。

これら諸外国の場合と比較してみると，中学校数学科の学習指導要領で示された数学的活動の３つの類型には，数学の学習における理解の側面，計算や方法の使用と選択における流暢さや戦略性の側面，推論の側面等が明確に示されておらず，数学的活動を概括的に整理したものであることがわかる。

しかしながら，これら他国のプロセススタンダードと比較してみると，「既習の数学を基にして，数や図形の性質などを見いだし，発展させる活動」では数学的推論や数学的理解が，また「日常生活や社会で数学を利用する活動」では数学的モデル化が，そして「数学的な表現を用いて，根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動」では，数学的表現とコミュニケーションが，それぞれ活動の中核に位置付けられるべきものであることが読み取れる。

（３）数学的方法を教える

上述のような立場から，数学的活動における過程や方法を中核に据えて学習指導を改善するためには，従来よりも学習における数学的方法の側面に着目する必要が生じる。このような数学的方法は，生徒の学習プロセスに着目しないと顕在化してこないので，例えば，途中で現れる考え方や着眼点に焦点を当てる授業での話し合いのあり方を考えなければならない。数学的方法やアイディアは，最終的に黒板やノートに書かれる数学的結果から把握されるものではなく，途中のプロセスにおいて，いわば「オンラインで」把握し，そこから明示的に取り出されるべきものである。

問題例で，具体的に考えてみよう。平成22年度全国学力・学習状況調査Ｂ$\boxed{2}$の問題（１）では，「連続する３つの奇数の和」が９の倍数になるという予想が正しいかどうかを具体的な数で確かめ，反例を示すことが求められた（正答率は54.8%）。この場合，具体的な数を用いて帰納的に調べていくこと，予想された性質が成り立たない例を示すことが大切である。しかし，それにも増して大切なのは，そのような方法（帰納的に考えること，反例を示すこと）を用いたことということを活動の過程で意識化し，活動の過程を振り返ってその意義を理解することである。反例が一つでも見いだされれば，考察対象となっている数の性質はもはや成り立たないことが示されていることから，反例の威力を知り，この方法を身に付けることが生徒に求められる。

一方，平成24年度調査Ｂ$\boxed{6}$の「正多角形の外角」の問題では，頂点の個数と１つの外角の大きさが関数関係にあることに着目し，両者の関係が反比例の関係であることを説明する必要がある。

ここでも，正三角形，正方形，正五角形等の具体的な場合について，頂点の個数と１つの外角の大きさの関係を具体的に書き出して，両者の関係を帰納的に調べていく中で，変

化や対応の関係を探り，その関係を，表や式に表して，両者が反比例の関係にあることに気づいていくことが大切である。このようないわば「泥臭い」方法が，数学的活動において実は非常に大切であるし，効果的であることを生徒にも意識させたい。

4　数学的リテラシーの涵養と言語活動の充実

数学的リテラシーの涵養について考えるとき，本来数学も自然言語と同様に，思考およびコミュニケーションの手段として使われる言語としての性格をもっていることを視野に入れる必要がある。

学習指導要領の改訂の趣旨や全国学力・学習状況調査の枠組みで示されているこれからの数学教育の目指す方向からみると，数学科では，事柄を簡潔に説明する言語としての数学の性格にも配慮しつつ，表・式・グラフ等の多様な数学的表現を用いた言語活動の充実を図る必要がある。本節では，数学的リテラシーの育成を視野に入れて言語活動の充実を図る数学科の学習指導のあり方を考える。

（1）言語としての数学の特質

ガリレオは，「宇宙という書物は幾何学の言葉で書かれている」という思想に基づいて研究を進めていたという。この言葉にもみられるように，数学を世界を記述する一種の言語とみなす立場から，教授・学習を考察する研究がこれまでにも行われてきた。

例えば，オースティンら（Austin & Howson, 1979）は，数学の教授･学習を言語という観点から考察する場合，(i) 学習者の言語，(ii) 教師（著者）の言語，(iii) 数学の言語の少なくとも 3 領域について検討する必要があると指摘した。彼らは，数学の言語としての側面に着目してその機能を分析し，数学に固有の「文法」や「表記」に注目することの意義を強調した。

最近では，「数学は抽象と論理を重視する記述言語である」という立場から，21世紀の日本人が持つべき数学的素養を具体的に明らかにすることを意図して実施された研究がある。2006～2007年度の科学技術振興調整費調査研究「日本人が身に付けるべき科学技術の基礎的素養に関する調査研究」（通称「科学技術の智プロジェクト」）である。

この研究では，数学が日常用いられる自然言語と並んで思考およびコミュニケーションの基礎手段であるとの立場を踏まえて，「数学の言葉を用いて考える」ことを数学的方法の特徴とみなしている(科学技術の智プロジェクト，2008)。特に，報告書では，数学は自然言語と比較してどんな特徴をもつ言語かを，数学の「抽象性」「論理性」に焦点を当てて明らかにしている。

この立場から捉えると，例えば数式は一つの命題なので「文」であるということになるし，計算も文（正しい命題）の連なりからなる「文章」ということになる。あるいは「証明とは読む者に前提から結論に至る道筋を解き明かすものであり，どのように分かったかという思考のプロセスとは異なる」ということになる。そこでは，一般的な数や図形が文字や種々の記号を用いて表され，曖昧さを排除すべく言葉の定義が明確に述べられる。また，演繹的推論による特別な「文法」に依拠しながら，一定の前提から結論を得るプロセス（証明）が厳密な形で書かれるのである。

数学の学習は，このような言語としての数学の特徴を切り離して考える事はできないものであり，学習指導においては，数学における単語や句，文やそれらを用いる文法にあた

るものを考えておく必要が生じる。また，OECD/PISAの数学的リテラシーの規定にもみられる通り，コミュニケーションや判断のために確実な根拠に基づいて表現するといった数学的リテラシーの育成にとって，この言語としての数学の特質への着目は非常に重要である。

（2）議論や対話の中で数学的活動を振り返る

前述のように，数式などを含む広い意味での言語を，学習活動の基盤と捉えた上で，表現とコミュニケーションに関わる活動を，数学科の学習指導に取り入れることが要請されている。実際の授業では，生徒が自分の活動を振り返り，活動のなかで用いた数学的な過程や方法を表現する機会，またそれを互いに伝え合う活動を，かくことと読むこと，話すことと聞くことに着目して，設定することが大切である。

特に，数学的活動については，「数学的活動を楽しめるようにするとともに，数学を学習することの意義や数学の必要性などを実感する機会を設けること」，及び「自ら課題を見いだし，解決するための構想を立て，実践し，その結果を評価・改善する機会を設けること」などに留意することが，学習指導要領の「指導計画の作成と内容の取り扱い」で述べられている。また，数学的活動についても，その「過程を振り返り，レポートにまとめ発表することなどを通して，その成果を共有する機会を設けること」が，指導における配慮事項として示されている。したがって，事柄を簡潔に説明する言語としての数学の性格に配慮しつつ，表・式・グラフなどの多様な数学的表現を用いた言語活動の充実を図る必要がある。

その際，生徒に活動の記録やまとめを促し，何を活用したのか，それは何故かについて，説明する場面を設けることも大切である。さらに，ノート指導を充実し，レポートなどの多様な表現形態を用いることにも意義がある。「数学は世界を理解するための手段であり，かくことは数学を理解するための手段である」（Countryman, 1992）といわれるように，かくことを通して，学習した事柄のよさを認識し，学ぶことの意義や有用性を実感することができる。

このように活動を振り返って記述することの大切さについては，計算や式変形などの場合も同様である。平成19年度全国学力・学習状況調査の「主として知識」に関する問題に，次のような等式の変形の問題があった。

「等式　$2x+3y=9$　を，yについて解きなさい」

この問題の正答率は，予想以上に低く57.1%に止まり，等式の変形についての生徒の理解の不十分さと学習指導上の課題が浮き彫りになった。このような「表現・処理」の問題においても，計算の過程について言葉で説明することに意味がある。実際，「yについて解く」ということの意味を理解できているが正しく式変形できない生徒は，自分の変形の過程を他の生徒に説明するなかで自分の誤りに気付いたり，修正したりする機会，式変形の根拠を考える機会が得られるであろう。

このように，学習指導においては，学んだ概念や方法は説明すると理解が深まることに留意し，議論や対話の中で思考の過程や結果を説明し，互いに伝え合う活動を重視する必要がある。

（3）説明することの重視

数学の学習過程において説明することに関しては，全国学力・学習状況調査の記述式問題で示されている３つのタイプの説明を視野に入れて検討することが考えられる。また，この説明のタイプは，レポートの作成，論述など知識・技能を活用する学習活動にも参考になる（国立教育政策研究所教育課程研究センター，2012)。

・見いだした事柄や事実を説明する問題 ・事柄を調べる方法や手順を説明する問題 ・事柄が成り立つ理由を説明する問題

第一は，ある事実や事柄を的確に説明することを求める問題である。このタイプの問題には，例えば「位を入れかえた数」（平成20年度）や「紋切り遊び」（平成21年度）などがあり，これらの問題では，見いだした数や図形の性質について，命題の形で表現することが大切である。

第二は，ある事柄を調べる方法や手順の説明を求める問題である。このタイプの問題には，例えば「Tシャツプラン」（平成23年度）や「塵劫記」（平成24年度）などがある。これらの問題では，関数的な変化から判断を行うために用いるグラフや表等や，ある目的（例えば木の高さの測定）のために用いる図形の性質等を明示し，その用い方を説明することが必要である。

そして第三は，ある事柄が成り立つことの理由の説明を求める問題である。このタイプの問題には，例えば「セットメニュー」（平成19年度）や「身長の推定（福沢諭吉）」（平成20年度）などがある。このような問題では，成り立つことを示すべきことがらについて，根拠を明確に示して論理的に説明することが必要である。

それぞれのタイプの説明における表現のあり方をまとめると，おおよそ次のようになる。

・見いだした事柄や事実の説明

ある事柄を数学的に説明する場合，説明の前提と結論が指摘されること，すなわちその前提と根拠を明らかにした上で説明の対象となっている事柄を述べる必要がある。したがって，事柄や事実の説明を求める問題では，用いた前提や根拠を含む命題の形，すなわち前提と結論を明らかにして確認することが求められる。

このように，「事実や事柄の説明の問題」では，前提あるいは根拠となる事実の指摘と，その根拠によって説明される事柄自体の両方の記述が求められる。

・事柄を調べる方法や手順の説明

数学を活用する場面では，問題を解決する方法や手順を的確に説明させることが大切である。これは，「活用」の問題の柱に，様々な課題解決のための構想を立て実践し評価･改善する力が挙げられており，事象を数学的に解釈する場面でのアプローチの仕方や手順の説明を求める問題によって，構想を立てたり，それを評価・改善したりする力の評価を意図しているからである。

このタイプの問題では，問題にアプローチする上でどのような方法を採るのかとその方法を具体的にどう用いるのかの２点について解答することが想定されている（「○○を用いて，△△をする」の形式での解答が想定される)。この「方法の説明を求める問題」は，様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力を評価することにも対応する

ので，解答の正誤よりも，方法の説明がなされているかどうかに焦点を当てて評価することになる。

・事柄が成り立つ理由の説明

一般に，ある事柄が成り立つ理由を説明する場合，説明の対象となる事柄の根拠が示されること，その根拠に基づいて事柄の成り立つことが指摘されていることの両方が求められる。すなわち，「○○であるから，△△である」の形式で表現される前半部分と後半部分の両方が必要である。明示すべき根拠に当たる前半部分と後半の結論部分の両方を記述することが望ましい。

5　数学的リテラシーと統計的思考

算数・数学科では，国際的な通用性，内容の系統性の確保や小・中学校の学習の円滑な接続等の観点から，統計の内容の充実が図られている。それは，小学校での数量関係領域を強化し，中学校での「資料の活用」の新設によって統計に関する内容を位置付けて充実し，さらに高等学校で統計の内容を学習する「データの分析」を「数学Ⅰ」に位置付けることによって必修化したことに現れている。

このように，統計の内容が充実されたことによって，小・中・高のそれぞれの学校段階での統計の学習とその関連のあり方の検討が，重要な課題になっている。標語的に言えば，「資料の整理」を「データの分析」へとつなぐため，さらに生徒が近い将来の社会生活でデータを活用し情報を批判的に読み解くことができるようにするため，算数・数学科カリキュラムの構成と接続の問題，教室での学習指導の具体的なあり方などが，検討されなければならない。

本節では，数学的リテラシーの涵養について，特にこのようなデータの分析や読み取りに基づく判断力やコミュニケーション力の育成という側面に焦点を当てて考察する。

（1）データの読みとりと数学的リテラシーの涵養

統計学関連の17の学協会が中央教育審議会と日本学術会議に提出した「21世紀の知識創造社会に向けた統計教育推進への要望書」では，義務教育段階における継続的かつ教科横断的な統計リテラシー教育の再構築を要望し，義務教育期間中に，すべての生徒が身に付ける必要のある事項として以下を挙げている。

- 身近な問題に対してデータを通して正しく理解する態度
- 得られたデータの基礎的なまとめ方・表現方法
- 適切なデータ収集方法，実験・標本調査・観察研究の基礎知識
- 母集団と標本の基礎概念（標本誤差の知識など）
- 不確実な事象の起こりやすさを確率で表現する方法

この要望書では，児童・生徒は不確実性やデータのばらつきに早期から触れることが必要で，そのために例えば，小学校低学年で，身近の事象が起こりやすいこと，起こりにくいことの区別をデータの観察を通して行い，高学年では事象の生起に関して，「確実」「起こりうる」「不可能」の区別がきちんとできるようにする事を目指すべきである，と提言している。また，将来的に不確実な事象について理路整然とした議論を行えるように，中学校において確率やデータに基づく予測に関する理論の基礎を身に付ける事の重要性も指摘している。

学校数学における統計の学習では，与えられたデータを整理して図表やグラフに表す手法を学ぶに止まらず，身近な事象に関する問題意識に基づいて，児童・生徒が自らデータを収集し，整理・分析し，その結果に基づいて意思決定や判断をする，といった数学的活動が必要である。

科学技術振興機構（JST）は，このような学習をサポートするために，算数・数学の資料活用やデータ分析のために用いるデジタル教材「科学の道具箱」を公開している。この教材は，生徒自らが科学・理科的なデータや身近なデータに実際に触れて，新しい知識を獲得したり，更に疑問を深めたりするプロセスを繰り返し，自然現象や日常生活の諸活動を統計的に捉え考える「統計的能力」を育成する事に主眼を置いた教材である（酒折他，2010）。また，この教材を用いた授業モデルも提案されている。

さらに，上の「要望書」では，算数・数学科の教科内容と，理科，社会科，家庭科，体育など，他教科の内容との連携を図り，児童・生徒にとって身近な題材を学習対象にする事の重要性も指摘されている。例えば，社会科では，国内外で様々に行われている調査の手法の意義と限界について考えたり，理科で実験における誤差の意味を考えたりする事が考えられる。

（2）データに基づく判断力，コミュニケーション力の育成

統計領域での数学的リテラシーの育成を考えると，実社会の生活で，データに基づいて的確に結果を導き，その結果に基づいて判断でき，それを他者に的確に伝えることのできるコミュニケーション力をもった「賢い統計使用者」がイメージされる。実際，現在の社会では，必要なデータを集め，そのデータに基づいて適切な判断を行い，それに基づいて行動を決定したり，その結果を根拠として人と議論したりすることが非常に大切である。そのようなデータとの「付き合い」方として重要な5つの視点がある。（渡辺，2008）

- 全体のばらつきを測り，現状の傾向を把握する（分布をよむ）
- 層別して，グループ間の特徴を比較し，違いをみつける
- 変数間の関連性をみて，因果構造と要因効果を知る
- 時間系列に沿って，変化のトレンドやパターンの特徴をつかむ
- データを分類する

また，自然現象や社会現象へのアプローチの基本には，測る，予測する，制御するということがある。そのことを踏まえたデータ分析の方法には，次のようなものがある（ベネッセコーポレーション，2010）。ある問題（事象）を考察するために，要因の候補がどのような性格のものかによって，分析の手法を使い分けるのである。

- 比較する（グループ間の特徴を比較して違いを見る）
- 関係を調べる（数値として表せる要因候補と目的がどういう関係なのか調べる）
- 傾向をつかむ（時間の推移に伴う傾向の変化を見る）

学校教育の出口で，生徒にこのような力が身に付いているようにするために，それぞれの学校段階で行われるべき活動や身に付けるべきスキルや思考力を明らかにし，その育成のために適切な教材を開発することは最も難しく，しかし最も大切な作業であるように思われる。

高度に情報化が進んだ知識基盤社会といわれる今日の状況下では，ある事象についてのデータから，事象にみられる変化や傾向（トレンド）を読み解いて判断や意思決定をする

能力を伸ばすことは，数学的リテラシーの育成の観点からみて重要な教育課題である。特に，ある事象についてのデータから要因間の関係を調べたり，時間経過に伴う変動の傾向を調べたりすることは，ますます重要になってきている。このようにデータを収集したり分析したりする過程において，数学的リテラシーは重要な役割を果たす。

このことを，物価の優等生ともいわれる牛乳や卵の価格の変動の例で，具体的に考察してみよう。

表１：牛乳と卵の価格の変化

年	牛乳（円/200mL）	卵（円/kg）	年	牛乳（円/200mL）	卵（円/kg）
1973	33.00	263.00	1990	65.00	316.00
1974	44.00	341.00	1991	72.00	363.00
1975	48.00	367.00	1992	76.00	270.00
1976	52.00	339.00	1993	77.00	273.00
1977	53.00	365.00	1994	78.00	275.00
1978	54.00	312.00	1995	79.00	289.00
1979	56.00	314.00	1996	79.00	305.00
1980	56.00	382.00	1997	83.00	312.00
1981	57.00	415.00	1998	84.00	282.00
1982	57.00	359.00	1999	89.00	308.00
1983	57.00	325.00	2000	93.00	309.00
1984	57.00	339.00	2001	97.00	302.00
1985	58.00	350.00	2002	97.00	204.00
1986	58.00	361.00	2003	98.00	187.00
1987	58.00	252.00	2004	99.00	200.00
1988	59.00	246.00	2005	101.00	231.00
1989	63.00	277.00		79.00	289.00

（出典：「主要品目の東京都区部小売価格（昭和25年～平成22年）」総務省）

表１は，1973年から2005年までの牛乳（200mL当たり）と卵（１kg当たり）の価格の変化である（総務省ホームページ）。**表１**からは，牛乳の価格が1973年から上昇し2005年にはその約３倍になっていること，一方，卵の価格は変動しながらも全体としては徐々に下降してきていることがわかる。**図２**は，それをグラフに表したものである。

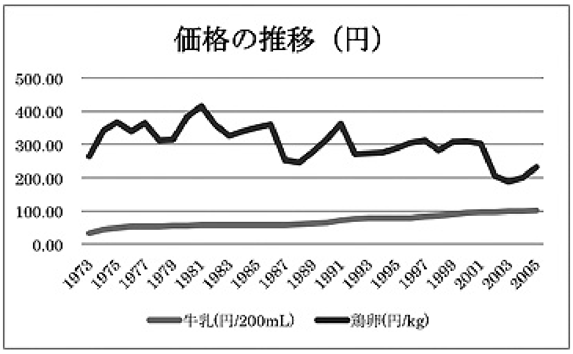


図２：牛乳と卵の価格の推移

牛乳や卵が物価の優等生かどうかを知るためには，価格の推移のみではなく，その時々の他の物価との相対的関係を知る必要がある。そこで，ある年（この場合，2005年）の平均物価を100として表した指数（物価指数）で価格を割った数値を用いて，物価の変動によらない商品の価値（「実質価値」）を考える。

牛乳と卵の「実質価値」を示す**図３**と**図４**からは，**図２**とは異なる情報が読み取れる。実質価値でみると，卵の価値は大きく下がり，牛乳はほぼ１の近くで安定していることがわかる。このデータを加工して，ある年の値をその前後の数値を合わせた３年間の平均値で置き換える（３時点移動平均を求める）と，より滑らかなグラフが得られ，この特徴が一層顕在化する。

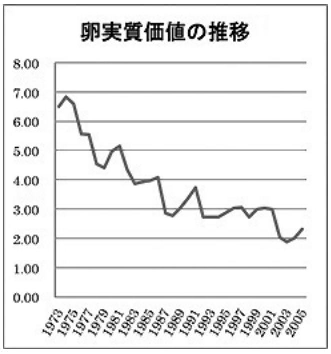


図３　卵の実質価値

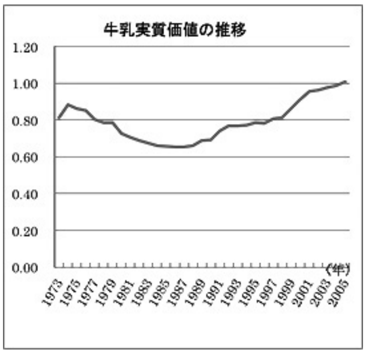


図４　牛乳の実質価値

このように変化や傾向をデータから読み解く活動では，変化を捉える視点を変えながら，より実質的なものへと牛乳と卵の価値を考えていく。視点を変えて調べながら，背景にある前提や諸要因についても批判的に考察し，判断の根拠をより確実なものにしていくのである。

今日の社会で，数値，表やグラフ，形など様々な形式で身の回りにあふれる情報を数学の眼で正しくとらえて比較・評価し，その解釈に基づいて的確な判断を下す能力の重要性を疑う者はいないであろう。このような能力は，これからの時代には一層重要になるに違いない。OECD/PISAの調査に端を発した今日的数学的リテラシー論は，教育の主目的をそのような能力を備えた人材の確保とみなす経済界・産業界が，教育界に送った要請のメッセージともみることができ，むしろ教育界の外側の人々にとって受け入れやすいものになっている。

しかし，重要なのは，日々の教室での学習指導において，数学的活動を通して数学的リテラシーをいかに涵養するかについて，生徒にとって興味のある教材の開発と学習指導と評価を中核とする実践的な研究である。

6　おわりに

本稿では，数学的リテラシーの涵養のために，数学科学習指導をいかに改善することが出来るかを考察した。学習指導要領で指導内容として位置付けられた数学的活動について，これをプロセススタンダードととらえて生徒の学習過程に位置付けたとき，学習指導のあり方はどのように変わるか。この問題を突き詰めると，いわゆる「方法知」の問題に行き当たる。数や図形の性質を探究する過程，問題場面の要素に着目して方程式を立式する学習，数量の変化に着目する関数の学習等，いずれも数学的方法に焦点を当てた学習指導の局面を具体的に考えることが大切である。

一方，言語活動の充実は，新学習指導要領において各教科等を貫く重要な改善の視点である。数学科の学習指導においては，数学科の学習のなかで言語活動を活発に行うことによって生徒の表現力や思考力を高めるという面と，言語活動の充実によって数学科の内容の学習が一層深まるという面の両面を視野に，表現することと説明することを大切にしながら，教室での言語活動を充実していく必要がある。このような活動を通して，構想を立ててそれを評価・改善することなど，数学的リテラシーに関わる力を育むことが可能になる。

引用・参考文献

Austin, J. L. & Howson, G. A. (1979) *Language and Mathematical Education. Educational Studies in Mathematics* , 10, pp. 161－197.

Countryman, J. (1992). Writing to Learn Mathematics. Portsmouth, NH : Heinemann.

科学技術の智プロジェクト（2008）『21世紀の科学技術リテラシー像～豊かに生きる智～プロジェクト』数理科学専門部会報告書

国立教育政策研究所教育課程研究センター（2007）『平成19年度全国学力・学習状況調査解説資料中学校数学』国立教育政策研究所.

国立教育政策研究所教育課程研究センター（2009）『平成21年度全国学力・学習状況調査解説資料中学校数学』国立教育政策研究所.

酒折文武，西村圭一，竹内光悦，田村義保，深澤弘美，渡辺美智子，長崎栄三（2010）「統計的思考力育成のための複合デジタル教材－数学科で活用する『科学の道具箱』－」日本数学教育学会誌・数学教育，92（１），pp. 20－28.

清水美憲（2007）「数学的リテラシー論が提起する数学教育の新しい展望」（小寺隆幸，清水美憲（編）『世界をひらく数学的リテラシー』，明石書店

清水美憲（2008）「今日的数学的リテラシー論からみた学校数学の現状と課題」科学教育研究，32（４），pp. 321－329. 日本科学教育学会

清水美憲・渡辺美智子監修，ベネッセコーポレーション（2010），『数コミBook－データに基づく客観的なコミュニケーション力を鍛える』Benesse.

総務省「主要品目の東京都区部小売価格（昭和25年～平成22年）」

http://www.stat.go.jp/data/chouki/zuhyo/22-19.xls （2012.6.18確認）
文部科学省（2005）『小学校算数・中学校数学・高等学校数学指導資料－PISA2003（数学的リテラシー）及びTIMSS2003（算数・数学）結果の分析と指導改善の方向－』文部科学省
文部科学省（2008）『中学校学習指導要領解説数学編』文部科学省
日本数学教育学会教育課程委員会（2006）『新しい時代の算数・数学教育を目指して－算数・数学科学習指導要領改訂についての要望』日本数学教育学会.
中央教育審議会（2008．1）『幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について（答申）』
渡辺美智子（2007）知識創造社会を支える統計的思考力の育成－アクションに繋がる統計教育への転換－」日本数学教育学会誌・数学教育，89（7），pp.29－38
渡辺美智子（2008）「身近にある統計－事例から学ぶやさしい統計の活用方法－」品質月刊委員会

3　数学的リテラシーを育成するための授業原則

東京学芸大学　准教授　西村　圭一

1．はじめに

PISA2000から早16年がたった。日本において，数学的リテラシーの育成を意図する教材や授業は充実してきただろうか。数学的リテラシーの育成に関わる授業について，次のような現状があると考える。

第一に，PISAをはじめとする評価問題を数学的リテラシーの外延としてとらえ，それをもとに「数学的リテラシー」の育成を意図する教材を考えた結果，「正解」が存在するものになっていることが多い。すなわち，本来は解が一意に定まらない現実事象を扱っていても，条件を提示し，そのもとで得られた結果や近似的に処理した結果を「正解」として扱っている授業が多い。

第二に，内容毎に構成された単元にしたがって授業をしているため，その内容に即して教材を位置付ける場合が多い。すなわち，学習した内容の活用として位置付けるため，生徒はあらかじめ用いる数学を特定していることが多い。また，単元の学習においてICTを探究ツールとして利用することが少ないため，その使用を前提とすることが極めて少ない。

本稿では，このような現状の問題点を数学的リテラシーの内包から明らかにし，数学的リテラシーの育成を意図する授業の原則を提案する。

2．数学的リテラシーの内包

Ole Skovsmose（2007）は，数学が埋め込まれた現代社会に生きる人々を，数学への関わり方によって，次の４つの社会集団に分類している。それは，意思決定のための数学的な道具を開発する集団（「構築者」），数学的な道具への入力の決定とその出力に基づいた決定をする集団（「操作者」），他者の決定を正しいものとして受け入れる集団（「消費者」），さらに，グローバル化された世界との関係において自分がどういう損失を受けているかが明確に分かっていない集団（「使い捨てされる者」）である。そして，それぞれの集団に求められる数学的リテラシーについて，次のような「機能的なリテラシー」と「批判的なリテラシー」の２つの側面から検討している。

> 「機能的リテラシーは，何よりもまず，ある個人がある特定の職業的機能を達成するのに所有しうる能力によって定義されるものと考えられるだろう。労働の諸条件や政治的争点は機能的リテラシーによって問われることはないが，他方，批判的リテラシーはまさにそのような課題を処理するものである。」（p. 4）

すなわち，「機能的リテラシー」は，職業や日常生活の必要条件として役立つ数学的スキルと知識に関わるものであるのに対し，「批判的リテラシー」は，数学が埋め込まれた社会に能動的に参加していく上で必要なものと考えられている。例えば，「消費者」も，情報を受け取るだけではなく‘問い返す’ために「批判的リテラシー」が必要なことを指摘している（pp. 13－14）。

このSkovsmoseの考えをふまえ，次のPISA2012の数学的リテラシーの定義を見てみよう。

> 「数学的リテラシーとは，様々な文脈の中で数学的に定式化し，数学を適用し，解釈する個人の能力であり，数学的に推論し，数学的な概念・手順・事実・ツールを使って事象を記述し，説明し，予測する力を含む。これは，個人がこの世界において数学が果たす役割を認識したり，建設的で積極的，思慮深い市民に求められる，十分な根拠に基づく判断や意思決定をしたりする助けとなるものである。」（OECD，2013）

この後半部分は，数学的リテラシーの育成の最終目標が「社会参加やシチズンシップ」にあることを示している（国立教育政策研究所，2016，p.25）。

このような数学的リテラシーの内包からは，1に述べたような授業では，「機能的リテラシー」にとどまり，「批判的リテラシー」や「社会参加やシチズンシップ」を志向した数学的リテラシーには至らないことが指摘できる。なぜなら，社会的な判断や意思決定，さらには問題点や問題状況を解消・改善する問題解決には，否応なく社会的価値観や個人的価値観が関わり，それらの価値観に応じて問題の定式化や数学の選択・使用がなされるからである。また，得られた結果に対しては，論理的な正しさではなく，妥当性や信頼性，有効性に関する評価が必要だからである。特に，「正解」が存在することは，生徒によっては，教師が持っている「正解」に従うことになり，有能な「消費者」を育てることにとどまる可能性がある。

では，日本では，「批判的リテラシー」や「社会参加やシチズンシップ」に光を当てることは要請されていないのだろうか。この点について，まず，これからの社会で求められる能力として多様な立場から議論されてきた能力観である「21世紀型能力」（勝野，2013）に着目してみよう。「21世紀型能力」は，「基礎力」「思考力」「実践力」の3つから成る。「思考力」は，21世紀型能力の中核であり，「一人ひとりが自ら学び判断し自分の考えをもって，他者と話し合い，考えを比較吟味して統合し，よりよい解や新しい知識を創り出し，さらに次の問いを見つける力」である。「基礎力」は「思考力」を支えるもので「言語，数，情報（ICT）を目的に応じて道具として使いこなすスキル」（勝野，2013：27）である。また，「実践力」は「日常生活や社会，環境の中に問題を見つけ出し，自分の知識を総動員して，自分やコミュニティ，社会にとって価値のある解を導くことができる力，さらに解を社会に発信し協調的に吟味することを通して他者や社会の重要性を感得できる力」（同上：27）である。

また，中央教育審議会教育課程企画特別部会の「論点整理」（2015）における，これからの学校教育に求められる役割に関する記述も示唆的である。

- ○ 子供たちが，身近な地域を含めた社会とのつながりの中で学び，自らの人生や社会をよりよく変えていくことができるという実感を持つことは，貧困などの目の前にある生活上の困難を乗り越え，負の連鎖を断ち切り未来に向けて進む希望と力を与えることにつながるものである。
- ○ このように考えると，子供たちに，新しい時代を切り拓いていくために必要な資質・能力を育むためには，学校が社会や世界と接点を持ちつつ，多様な人々とつながりを保ちながら学ぶことのできる，開かれた環境となることが不可欠である。

○　こうした社会とのつながりの中で学校教育を展開していくことは，我が国が社会的な課題を乗り越え，未来を切り拓いていくための大きな原動力ともなる。（p.4）

言うまでもなく，算数・数学科も上述のような能力の育成や学校教育の役割の一翼を担うものであり，「批判的リテラシー」や「社会参画やシチズンシップ」を志向した数学的リテラシーの育成が要請されていることがわかる。

以上の点から，「批判的リテラシー」や「社会参画やシチズンシップ」を志向した数学的リテラシー（以下，社会参画志向の数学的リテラシー）の育成が図られていない点に，日本の数学的リテラシーを意図する教材や授業の問題点があることが指摘できる。

３．数学的リテラシーの内包から授業を考える

では，社会参画志向の数学的リテラシーを育成するには，どのような授業が必要だろうか。以下では，算数・数学科における現実世界の問題や社会的な問題の扱いに関する見解を参照した上で，日本における社会参画志向の数学的リテラシーの育成を意図する授業の原則について考えてみることにする。

はじめに，次の，島田茂（1942（昭和17））の「数学を現実に使う」ことに関する記述に着目する。

「ココデ色々ナ問題トイフモノノ中ニ，各節ノ終リニアル所謂「應用問題」ノ含マレルコトハ勿論デアルガ，ソレハ多クノ場合現實カラ數回抽象サレタ問題デアリ，適用スベキ方法モソノ節ノ方法ヲ適用スレバヨイトイフコトハ既知トミナサザルヲ得ナイカラ，アル一ツノ概念ヲ如何ニapplyスルカトイフ練習ニシカナラナイ．トコロガ數學ヲ現實ニ使ウトイフ場合ニハ，次ノ様ナ性格ガ考ヘラレル．

（１）　如何ナル方法デ解ケルカハ前モツテワカツテヰナイ．自分ノモツテイルアラヰル武器ヲ総動員シテカカラネバナラヌ．

（２）　問題ハ常ニ複雑シテヰル．ソレ故，自分ノ目的ニカナフ様ニ適當ニ假定ヲ作ツテ，數學ノ問題ニ化サナケレバナラナイ．

（３）　従ツテ解決ノ方法ハ色々アリ，ソノ結果モアクマデ近似的デアル．

（４）　數學的ナ解決ハ，今一度現實ト自分ノ問題トノ相關ノ中ニオイテ考ヘテミテ初メテ眞ノ解決ニナル．ココデ初メテ始メニ自分ガ考ヘタ假定ガ現實ニ即シテヰルコトガ検證サレル．即チココノ検證ハ答ノ驗ノミナラズ，假定ノ驗，方法ノ驗ニナル．コノ様ナ性格ハ，數學ノ中ノ問題デハ中々オコリ得ナイ．コトニ（２），（４）ハ大切ナモノデアリ，コノ様ナ考ヘ方ガカヘツテ數學的内容ヲヨク理解サセルコトヲ思ヘバ數學ヲ使ヘル様ニスル為ニハ，コノ様ナ現實ニブツカラセルコトガ必要デアラウ．」

ここで言われている「問題」は広く現実世界の問題を指しているが，少なくとも社会参画志向の数学的リテラシーを育成する授業には，次の点を含むことが示唆される。

S１　前もってどのような方法で解決するかがわからないようにする。
S２　自ら数学の問題に定式化する。
S３　解決の方法は複数ある。

S４　定式化する際においた仮定が現実に即しているかなどを検証する。

次に，戦後初期の「問題解決学習」を見てみよう。これは，「環境と主体との間の不均衡の回復をはかる過程，すなわち生活一般ないし行為一般と同じであるとみなすような広義の使用ではなく，はっきりと生活の矛盾を解決するのだという課題意識をもって，その解決に必要な資料を，実地調査や文献調査によって集収し，その資料を整理して，問題解決の試案的な結論を出し，ついでその結果を検証するといったひとまとまりの計画作業を意味する」（文部省，1954，p. 34）ものである。算数・数学科においても，自らの生活や行為をよりよい方向に高めていくという目的意識のもと，生活に根ざした学習者自身の「問題」の解決から学習を始め，次に，新しい知識・技能の一般化や機能化（使える状態にする）を図り，それらを活用する「問題」，既習の知識や技能を総合的，機能的に活用する「問題」へと順次発展させることが構想された（金児他，1961）。実際には，これらにあたる具体的な問題場面を数多く設定することには難しさや時間的な制約が伴うため，学習者自身の「問題」の解決から学習を始めることを前提とした上で，これらの代替として「文章題」が位置付けられるようになった（同上）が，生活に根ざした学習者自身の「問題」の解決にとどまらず，新しい知識・技能の一般化や機能化を志向していたことが注目される。

また，川口（1957）は，問題に付随していたり，問題を生み出したりしている「場」に着眼し，その内容的類型として，社会的な内容の「場」，日常生活的な内容の「場」，数理的な機能を内容とする「場」を挙げ，社会的な内容や日常生活的な内容の「場」の価値について次のように述べている。

> 「問題解決的活動が数理の筋とは別の筋で展開されるため，かえって，数理をどのように適用したらよいかの判断や，処理の仕方が重要な思考の対象となる。すなわち主として数理の自由な応用面に，主要なこの学習の価値がある。」（p. 75）

その一方で，「場」の自由度によって，構成される問題や問題解決の性格に著しい差異が生じるとして，次のような「場」の構造に基づき，社会的な内容や日常生活的な内容の「場」を，学習に適した場に単純化しておく必要性について言及している。

第一次構造の「場」：問題解決に必要な資料が全部用意されていて（あるいは，資料がやや不備の場合であっても，すぐに求められて），問題は，その整備された資料に対して，どのような数学的処理をしたらよいかという判断とその処理の実行を求めている。

第二次構造の「場」：問題を構成するために，場にある条件を設定しなければならなく，どのような資料を集めるとよいかの判断が要求される。また，解決の試案に基づいて，必要に応じて，条件を修正したり変更したりする。

高次構造の「場」：例えば，第三次構造の「場」は，場の持つ目標に指向されて条件を設定し資料を整えることで，複数の第二次構造の場が生まれる。理論的にはさらに自由度の高い高次の「場」を考えることもできる。

「真実の生きている場は迫力のある緊張関係を生み出す意味においては，有意義なものであろう。しかし，自然の場は余りにも自由度の高い高次の構造の場であったり，場の内容が子どもの発達の程度に応じないものであったりする。このような場は，かえって学習の効率を下げ，教育の効果を低めるものであるから，教師の側から場の条件を設定して自由度を下げたり，場の内容を単純化して，学習活動が複雑にならないようにしたりする。このために，問題解決学習が或程度の迫真性を失うのは止むを得ないことである。」（pp. 73－74）

この川口の見解は，高次の構造の「場」であることと，数学（広く言えば数理科学）の内容や方法を創出したり，特定なものを超えて，その中の普遍を抽象して一般化したり発展させたりすることの実現がトレードオフの関係にあることを示している。このことは，算数教育に限らず数学教育にも通じる面があると考えられる。他方で，社会的な判断や意思決定は，様々な可能性を探り様々な「選択肢」を創出し，それらを吟味し合意形成を図る必要があるため，第三次構造（あるいはそれ以上）の「場」である。したがって，社会参画志向の数学的リテラシーを育成する教材や授業をデザインする上では，第三次構造の「場」であること，換言すれば，第三次の構造の「場」によって実現する社会的な判断や意思決定のプロセスの習得と，算数・数学の原理・法則の創出や一般化や発展の両立が不可避となると考えられる。

以上のことから，次のような社会参画志向の数学的リテラシーの育成を意図する授業の原則を導出することができる。

原則１　問題場面を様々な定式化が可能な形で提示する。
原則２　個人や小グループで「選択肢」を創出し，学級全体で，それらを妥当性や信頼性，有効性の観点から評価する場面を設ける。
原則３　算数・数学の原理・法則を創出したり，数学（広く言えば数理科学）として一般化したり発展させたりする活動をデザインする。
原則４　従事したプロセスを振り返らせるとともに，同様のプロセスで意思決定ができそうな問題場面を考えさせる場面を設ける。

原則１は，第三次構造の「場」として提示することにあたる。この原則１と原則２により，島田の見解に基づくS１～S４を満たすことが担保される。原則３は，原則２をふまえ，教師の働きかけのもとで始める活動である。例えば，妥当性や信頼性，有効性を示すための数学（数理科学）－ばらつきを表す統計量，「重み付け」や「起こりやすさ」に関する指標，乱数を用いたシミュレーション，アルゴリズム，有効性を測定するための調査方法など－を創出することが考えられる。これらは当該の文脈に依存して創出されるが，「選択肢」の妥当性や信頼性，有効性の評価を目的として，他の文脈への適用可能性や汎用化を検討することも考えられる。このような活動をデザインすることには，従来の日本の算数・数学科における「内容」として位置付けられていないものにも光を当てることになる。原則４は，算数・数学を用いて社会的な判断や意思決定をするプロセスの習得を意図するものである。そして，このような原則を満たしうる教材を開発し，中・高等学校にある「課題学習」のような時間を設けたり，総合的な学習の時間に位置付けたりして実践

することが考えられる。

4．おわりに

本稿で提案した授業原則に基づく授業の実践には，従来の算数・数学科の授業とは大きく異なる算数･数学の授業文化が必要なことが想像されよう。逆を言えば，1に述べたような授業は，従来の算数・数学の授業文化の中で，数学的リテラシーの育成を図ろうとしていると見ることができる。2では，そのような授業だけでは，「機能的リテラシー」や「基礎力」としての数学的リテラシーにとどまり，ややもすると有能な「消費者」の育成を図ることにすぎないことを指摘した。確かに，客観的な正しい答えに導くプラトン主義的な算数・数学教育観に立っていると，社会参画志向の数学的リテラシーの育成を図る授業は受け入れがたいものがあると思われる。しかし，すべての学習者を数学の創造者とみなし，数学共同体の批判的な検討を経て合意を得ることにより数学の知識を作るという社会的構成主義に立てば（アーネスト，2015），算数･数学を用いながら合意形成を図る社会的な判断や意思決定のプロセスに同質性があると捉えられる。実際，専門的な数理科学者は，具体的な社会的な判断や意思決定の場面において数学的（数理科学的）モデルを作った後，妥当性や信頼性，有効性に関する合意形成を図りながら，その汎用性や応用可能性を高め，新たな数理科学の内容や方法を創出している。評価問題のような「正解」の存在する問題を乗り越えることで，社会参画志向の数学的リテラシーの育成を図ることができ，そうすることで，算数・数学教育が数学だけではなく社会の要請にも応えるものになると考える。

引用・参考文献

勝野頼彦（研究代表）（2013），『社会の変化に対応する資質や能力を育成する教育課程編成の基本原理』，国立教育政策研究所平成24年度プロジェクト研究調査研究報告書

金児賢治他（1961），『文章題の指導』，東京書籍

川口廷（1957），「算数科における問題解決学習と系統学習－問題解決学習か系統学習か-」，『算数課の教育心理』，金子書房，pp. 39－76

国立教育政策研究所（編著）（2016），『国研ライブラリー資質･能力〔理論編〕』，東洋館出版

文部省（編）（1954），「単元学習の理解のために:教育課程におけるその位置と構造」，牧書店

OECD （2013），PISA 2012 Assessment and Analytical Framework： Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy, OECD Publishing.

Ole Skovsmose（2007）， Mathematical Literacy and Globalisation, *Internationalisation and Globalisation in Mathematics and Science Education,* Springer, pp. 1－18

ポール・アーネスト（長崎栄三・重松敬一・瀬沼花子監訳）（2015），『算数・数学教育の哲学』，東洋館出版社

中央教育審議会教育課程企画特別部会（2015），「論点整理」，http://www.mext.go.jp/component/b_menu/shingi/toushin/_icsFiles/afieldfile/2015/12/11/1361110.pdf （2016年3月現在）

4　数学的リテラシーの具体化とその検討

東京学芸大学　准教授　清野　辰彦

1．本稿の目的

学校数学において，どのような能力や態度を育成することが必要であるのか。この問に対する１つの側面からの解答は，数学的リテラシーの育成ということができるであろう。数学的リテラシーの意味は，様々に捉えられ定義されているが，数学的リテラシーという用語の普及に貢献を果たしたOECD（Organisation for Economic Co－operation and Development）によるPISA調査（Programme for International Student Assessment）では，次のように定義している。[1)]

「数学的リテラシーとは，様々な文脈の中で定式化し，数学を適用し，解釈する個人の能力であり，数学的に推論し，数学的な概念・手順・事実・ツールを使って事象を記述し，説明し，予測する力を含む。これは，個人が世界において数学が果たす役割を認識し，建設的で積極的，思慮深い市民に必要な確固たる基礎に基づく判断と決定を下す助けとなるものである。」（国立教育政策研究所，2012，p. 66）

数学的リテラシーは，トピック的な内容の１時間の授業だけで，育成できるものではない。各授業の中で，数学的リテラシーを育成することが可能な場面を見いだし，その育成に向けて，授業を展開し，それを積み重ねていくことが大切となる。そのためには，数学的リテラシーの具体的かつ詳細な把握が欠かせない。本稿では，事例の考察を通して，数学的リテラシーのどのような能力を，どのような場面で育成していくことが可能なのかについて考察する。

また，具体化した数学的リテラシーを，昭和31年に発行された高等学校学習指導要領数学科編に記載されている「中心概念」を参照しながら，整理する。「中心概念」は，「代数的内容および幾何的内容を通して一般化すべき数学的な考え方を，中心概念として例示する」とあるように，当時ほとんど明確にされていなかった数学的考え方の具体像を示したものである。この「中心概念」に着目することによって，我が国が大切にしてきた数学的な考え方を包含した数学的リテラシーを整理することができると考えたのである。

本稿の目的は，事例の考察を通して，数学的リテラシーの具体像を抽出し，「中心概念」を参照しながら，整理することである。

2．数学的リテラシーの具体像の抽出

（1）事例１：数学を活用して仕組みを解明できることを感得させる教材例

本節で取り上げる教材は，近年では，教科書の発展問題としても掲載されている「17段目の不思議」である。文字式を用いることによって，現象の背後にある規則を解明できることを実感することが目標となるが，この教材に含まれるフィボナッチ数列が，次の教材の導入にとって，重要となる。

問題とともに，この問題に取り組む際の活動を簡単に記述する。

ルール
①１段目に好きな１けたの数を書きます。
②２段目の数を５にします。
③１段目と２段目の数の和を求めて，その一の位の数を３段目に書きます。
④２段目と３段目の数の和を求めて，その一の位の数を４段目に書きます。
⑤　③，④の手順と同じようにして，17段目まで繰り返し計算します。

１段目	1		
２段目	5		
３段目	6		
４段目	1		
５段目	7		
６段目	8		
７段目	5		
８段目	3		

上記のルールに従って，以下の２つの問を調べていくことになる。

(a) １段目の数を様々に変えた時，17段目の数は，どのような数になるか。
(b) ２段目の数を様々に変えた時，17段目の数は，どのような数になるか。

実際には，以下のように調べていく。

（a）の問に関する調査活動

１段目	1	2	3	4
２段目	5	5	5	5
３段目	6	7	8	9
４段目	1	2	3	4
５段目	7	9	1	3
６段目	8	1	4	7
７段目	5	0	5	0
８段目	3	1	9	7
９段目	8	1	4	7
10段目	1	2	3	4
11段目	9	3	7	1
12段目	0	5	0	5
13段目	9	8	7	6
14段目	9	3	7	1
15段目	8	1	4	7
16段目	7	4	1	8
17段目	5	5	5	5

（b）の問に関する調査活動

１段目	1	1	1	1
２段目	4	3	6	7
３段目	5	4	7	8
４段目	9	7	3	5
５段目	4	1	0	3
６段目	3	8	3	8
７段目	7	9	3	1
８段目	0	7	6	9
９段目	7	6	9	0
10段目	7	3	5	9
11段目	4	9	4	9
12段目	1	2	9	8
13段目	5	1	3	7
14段目	6	3	2	5
15段目	1	4	5	2
16段目	7	7	7	7
17段目	8	1	2	9

左の調査活動から，1段目の数は，17段目の数に影響しないのではないかという仮説が得られる。また，右の調査活動からは，2段目の数と17段目の数には，何か関係があるのではないかという仮説が得られ，さらなるデータの収集を行い，明確な仮説を得るための活動を行うことになる。

2段目の数を0～9まで変えた際の17段目の数は，以下の表になる。

表1　2段目の数と17段目の数を整理した表

2段目の数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
17段目の数	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3

表1を丁寧に観察すると，2段目の数を7倍した数の一の位の数が，17段目になっているという発見に辿りつく。次に，考察するのは，7倍という数値はどこからきているのかである。そこで，現象の背後にある仕組みを解明するために，文字を用いた考察を行う。具体的に，1段目，2段目を文字を用いて表現し，文字に関する処理を行ってみる。

表2　文字による表現

1段目	a
2段目	b
3段目	$a+b$
4段目	$a+2b$
5段目	$2a+3b$
6段目	$3a+5b$
7段目	$5a+8b$
8段目	$8a+13b$
9段目	$13a+21b$
10段目	$21a+34b$
11段目	$34a+55b$
12段目	$55a+89b$
13段目	$89a+144b$
14段目	$144a+233b$
15段目	$233a+377b$
16段目	$377a+610b$
17段目	$610a+987b$

三輪辰郎（1996）は，思考の方法としての文字式利用の図式を以下のように示している。

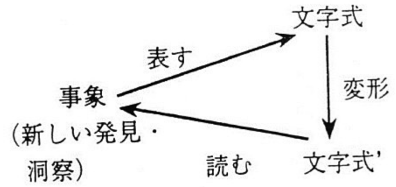


図１　思考の方法としての文字式利用の図式（三輪辰郎，1996，p. 2）

これまでの上記の活動は，**図１**における「文字式'」を得るまでの活動であった。次は，文字式を読む活動である。$610a+987b$は何を意味しているのか。

$610a$は，１段目の数aが，どのような数であっても，0をかけていることになるので，17段目には影響しないことを意味している。また，$987b$の$7b$は，２段目の数bを７倍していることを意味しており，先の疑問であった「７倍の７」という数値のルーツを表している。

このように，本教材を通して，文字式を用いることによって現象の背後にある仕組みを解明できることを実感するとともに，**図１**が示している文字式利用の過程を明確に意識することができる。

さて，ここで，文字で表現した際の３段目以降に着目する（**表２**）。特に，aの係数に着目する。aの係数を抜き出してみると，次のようになっている。

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，377，610，987，…

この数列は，フィボナッチ数列である。フィボナッチ数列は，一般式は複雑な形式をしているが，漸化式は易しい。具体的には，$f_1=1$，$f_2=1$，$f_n+f_{n+1}=f_{n+2}$として表現される。

フィボナッチ数列の数は，自然界において，様々に現れると言われている。実際に，どのようなところに現れるのかを提示することから第二の探究がはじまっていく。例えば，ひまわりを提示し，その種がどのように並んでいるかを観察させ，実際に並んでいるらせんの数を数えてみる。

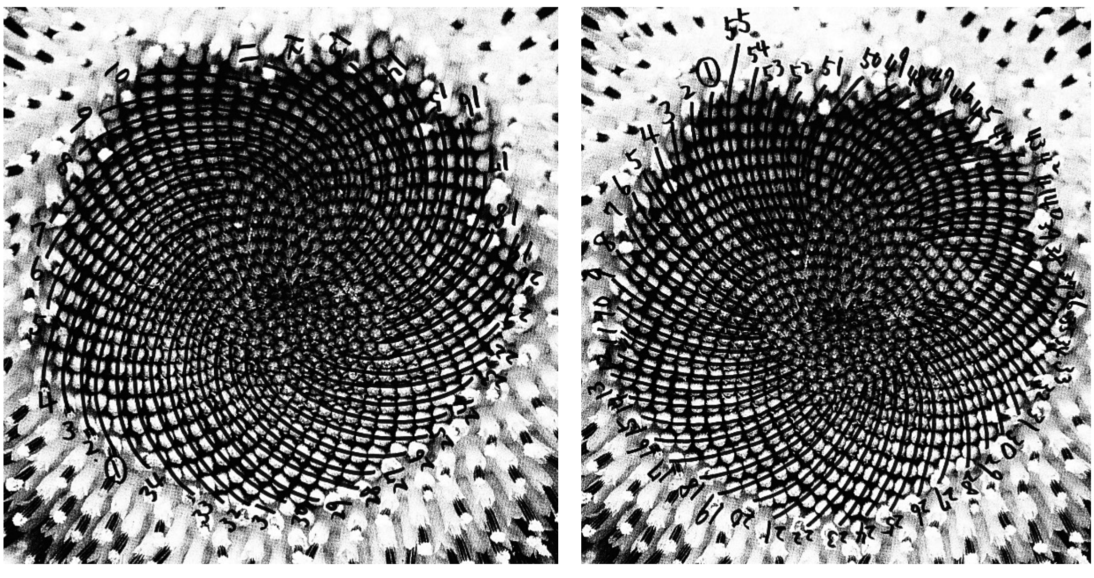


図２　ひまわりの種が並んでいるらせんの数を数えた図（左が時計回り，右が半時計回り）

図2からひまわりの種が並んでいるらせんの数を数えると，34本あることがわかる。この数は，先に示したフィボナッチ数である。では，今度は，反時計まわりでらせんの数を数えてみる。すると，今度は，55本あることがわかる。この数もフィボナッチ数である。生徒には，「17段目の不思議」の中で扱われていた計算ルールから生まれたフィボナッチ数が，自然界に現れることに，驚きを感じさせたい。必要ならば，13 や 21 をらせんの数として持つ松ぼっくりを提示することも考えられる。

ここでは，驚きを感じるとともに，疑問を感じると考えられる。その疑問とは，「なぜ，ひまわりの種がならんでいるらせんの数の中に，フィボナッチ数が現れてくるのか」である。この疑問を解消するために，考察を進めていく。

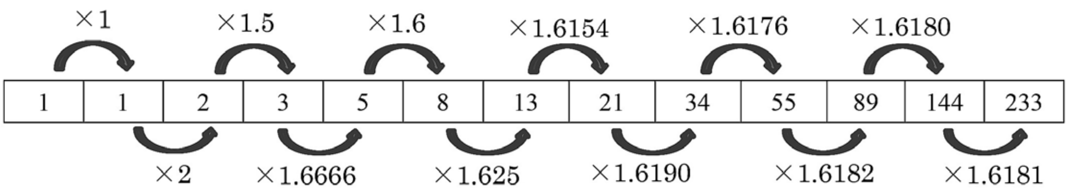
らせんがきれいに現れているのは，ひまわりの種が整然と配列されているからである。すると，種がどのように配列されているかを解明していくことが，上記の疑問の解消への第一歩になると考えられる。その際，手がかりとなるのは，フィボナッチ数自体の考察である。

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，377

上述したフィボナッチ数のうち，ひまわりには，34と55という数が現れ，松ぼっくりには，13と21というそれぞれ隣り合う数が現れた。そこで数は，次々と変化し，大きくなっていくが，隣り合う数において，何か関係がないかを考えてみる。

関係を考える際，差と倍が観点になる。ここでは，数同士の倍の関係を考えてみる（**表3**）。

表3　フィボナッチ数列における数同士の関係



すると，徐々に1.618 …に近づいていくことがわかる。この数は，一体何か。ここで，学習した無限小数をいくつか思い出させる。

$$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$$
$$\sqrt{3}=1.7320508\cdots$$
$$\sqrt{5}=2.2360679\cdots$$

上記の数の中に，1.618…という数はない。しかし，2 で割るという簡単な計算を$\sqrt{5}$にしてみると，1.11803…という数が得られ，さらに$\frac{1}{2}$を加えると1.618…になる。
つまり，1.618 …の正体は，$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$となる。ここで確認のため，フィボナッチ数列の比から，$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$が導きだせるのかを考えてみる。なお，これは中学生が行うことではない。

フィボナッチ数列は，次のように表すことができた。$f_n+f_{n+1}=f_{n+2}$

ここで両辺をf_{n+1}でわると，$\dfrac{f_n}{f_{n+1}}+1=\dfrac{f_{n+2}}{f_{n+1}}$

分子が分母よりも，大きな順番で表したいので，左辺を次のように表現し直す。

$$\frac{1}{\frac{f_{n+1}}{f_n}}+1=\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}$$

ここで，nを大きくした際の極限を考える。$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\frac{f_{n+1}}{f_n}}\right]+1=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}\right]$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{f_{n+1}}{f_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{f_{n+2}}{f_{n+1}}$ とみなすことができるから，その値をαとすると，

$\dfrac{1}{\alpha}+1=\alpha$ よって，$1+\alpha=\alpha^2$, すなわち$\alpha^2-\alpha-1=0$

$\alpha=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $\alpha>0$ より，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

ゆえに，フィボナッチ数の隣同士の比は，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$になる。

$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$をはじめて見た生徒には，この数が黄金数と呼ばれていることを伝えるとともに，黄金数が生まれてくる際の基になっている，黄金比の定義について伝える。

黄金比とは，線分 c を a，b（$a>b$）の長さで２つに分割するときに，$c:a=a:b$が成り立つように分割したときの比 $a:b$ のことである。なお，『原論』では，黄金比という用語ではなく，外中比という用語が使用され，次のように定義されている。

「線分は，不等な部分に分けられ，全体が大きい部分に対するように，大きい部分が小さい部分に対するとき，外中比に分けられたといわれる。」（『ユークリッド原論』，1971，訳中村幸四郎他，共立出版，第６巻定義３，p. 117）

これらの定義を基に，次の問題を考える。

問題

図３のように，１辺が１の正方形の１辺に，縦の長さが１，横の長さが x の長方形をおく。

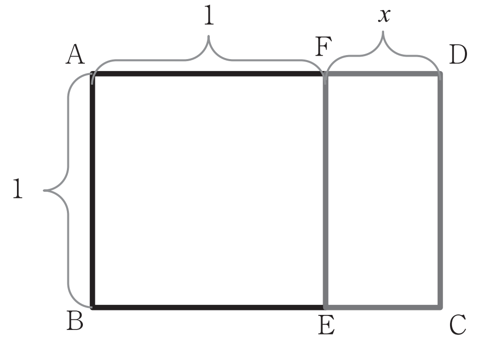


図３　黄金長方形

今，線分ADを黄金比に分けるように，点Ｆを設定したい。そのときの x の長さを求めよ。

上記の問題を解決するために，$(1+x):1=1:x$ という比の式を設定する。すると，$x_2+x=1$ が得られ，この x の値を求めると $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ となる。ここでADの長さを求めると，$1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となり，先の数値が出てくることになる。

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の意味が理解されたところで，次に，$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ がひまわりのどこに関係してくるかを考える。これまで見てきた黄金比は，線分を分割する際に現れた比であった。しかし，ひまわりの種の配列を考えるにあたって，長さが関係するとは考えにくい。そこで，種を配列する角度に影響を与えているのではないかと考えてみる。

360°を全体と考え，その全体を黄金比で分割した際の角度を考える。**図４**のようになろう。

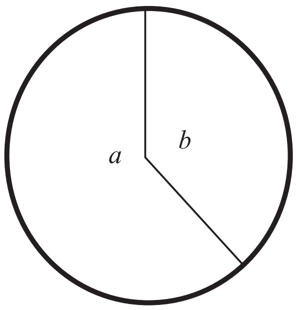


図４　黄金比による円の角度の分割

関係式は，$360:a=a:b$ であり，そこから $a^2=360\,b$ が得られる。$a+b=360$ なので，次の連立方程式を解けばよい。

$$\begin{cases} a^2=360b \\ a+b=360 \end{cases}$$

$b=360-a$ と変形することができるので，$a^2=360\,(360-a)$

$$a^2+360a-360^2=0$$

$$\text{ゆえに},\ a=180(\sqrt{5}-1)\fallingdotseq 222.492...^\circ$$

$$b\fallingdotseq 137.507...^\circ$$

これは，円を黄金分割した際の角度が約137.5°であることを意味している。
ここで，円の半径を１として，137.5°ごとに円を作図していく活動を行う。その際，作図する円の中心は，原点から $\sqrt{n}$ だけ離していく。

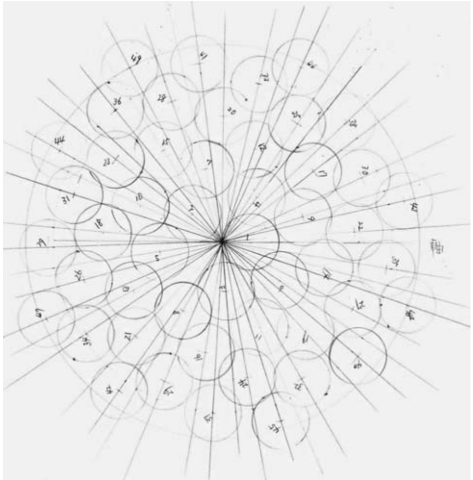


図５　黄金角で円を記述していった際の作図

図５には，49個の円が描かれている。１つの円の面積がπ cm^{2}であるから，49π cm^{2}の小さな円が描かれていることになる。一方，49番目の円の中心までの距離は，$\sqrt{49}$ =7cmである。よって，49番目の円の中心までの距離を半径とした円を考えた際，その円の面積は，49π cm^{2}となる。すなわち，小さい円の面積の合計と大きな円の面積が同じになるように，描く円の距離を変えていったことになる。このように描くと，重なっている面積がほぼ隙間の面積と同じことになる。

この活動によって，137.5°という黄金角の近似角度を描いていくことによって，ひまわりの種と似た配列が得られることが実感されると考えられる。また，１～７の間に，多くの無理数が存在していること，n が大きくなればなるほど，$\sqrt{n-1}$ と $\sqrt{n}$ の値の幅が小さくなっていくことを実感すると考えられる。

では，なぜ黄金比は，重なりの少ない均一性のある配列を生み出すことができるのか。ひまわりの種にあたる円を配置している際に気付いたことは，ひまわりは，種を一直線上に配置していないということである。一直線上に配置してしまうと，大きな隙間を生み出してしまうからである。このことは，360°×有理数になっていないことを意味している。では，360°×無理数であれば，きれいに均一に種が配列されるのか。これは違う。無理数であっても，より適切な近似分数が作られる場合，中心から離れている種が一列に並んでしまうことがあるからである。

近似分数は，連分数を用いて作成できる。例えば，π の場合，次のような連分数展開ができる。

π ＝3.1415926535…とすると

π ＝3＋0.1415926535

$$=3+\cfrac{1}{\cfrac{1}{0.1415926535}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{\cfrac{1}{0.0625159}}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{\cfrac{1}{0.99593}}}}$$

$$=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{0.004086}}}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1/4}}}}}$$

このπは，$\frac{1}{292}$ というほぼ０に近い数字が出てきたので，次の分数で近似できる。

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}}=\frac{355}{113}$$

このように有理数で表現されると，先に述べたように，中心から離れている種が一列に並んでしまうことになる。

では，黄金数は連分数によって，どのように表現されるか。

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{0.6180339}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{0.6180339}}}$$

上記のように，1が永遠に続く。これは，適切な近似分数を作ることができないことを意味している。黄金比が，きれいに均一に種が配列している理由が，ここにあると考えられるのである。

なお，34や55というフィボナッチ数がひまわりのらせんの数の中に現れていたのは，黄金数を連分数表示し，途中で切り上げ近似分数を作りあげた際の値として $\frac{55}{34}$ が得られるため，出現していると考えられる。

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1/4}}}}}}}}}$$

上記の事例の考察の中で見られた数学的リテラシーを抽出すると次のものが挙げられる。

・条件の制御：１段目の数と２段目の数を同時に変えてしまうと，17段目の数にどちらの

数が影響しているのかがわからなくなるため，1つずつ変化させていく考え

・対応の把握：作成した表を縦に見て，対応を特定する考え

・文字式による表現・処理・解釈：文字を用いて表し，数学的処理を行い，処理した結果を事象と照合させながら解釈する考え

・変化の把握：作成した表を横に見て，差や倍の観点から，変化を特定する考え

・数学的処理における近似：円周率πの値の近似分数を作る際，見出された$\frac{1}{292}$を0と近似した考え

（2）事例2：近似を意識させる教材例

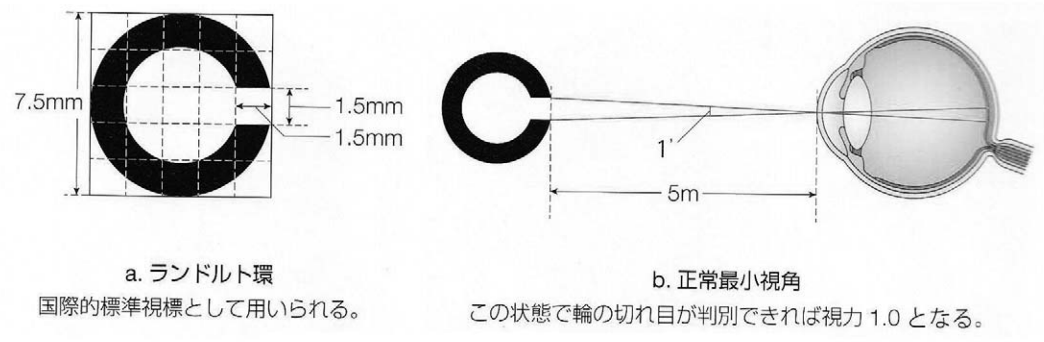
現在使用されている視力表には,「C」の記号が並んでいる。この「C」は，ランドルト環と呼ばれている。視力表にランドルト環が，用いられるようになったのは，次の記述のように，20世紀の初頭までさかのぼる。

「明治42年（1909）第11回国際眼科学会において，かねてより万国共通の視力検査法および視力記載法の必要に迫られ，討議されていた事柄に対し，国際試視力表（0.1より2.0まで12段，視標の形はLandolt環とアラビア数字）の制定を見，直ちに『日眼』14巻に載せられた。それまで日本においてもSnellen氏試視力表（ちなみに明治30年（1897）頃，川上元治郎のSnellen氏試視力表は1枚12銭であった）が最も広く用いられていたが，これを契機にLandolt氏環視力表（ラ環）へと移行し，…」（日本眼科学会百周年記念誌編纂委員会，1997，p.8）

第11回国際眼科学会では，2点を分離して見分けることのできる正常の最小視角は1’（1分）であることを基本としたうえで，直径7.5mm，すき間の幅1.5mmの大きさのランドルト環を，5m離れたところから見て，すき間の開いた方向を識別できた視力を1.0と定めた。現在の視力検査表は，この規定に基づき，上記の数値で作成されているものがほとんどである。

しかし，5m離れたときの視角が1分の大きさと1.5mmとは，実際には異なる。ほとんど同じ大きさであると捉えて，以下のように近似しているのである。

「視力は2点を分離して見分けることのできる最小の角度であらわす。これを最小視角といい，正常の最小視角は1’（1分），つまり1°の$\frac{1}{60}$である。図4－1－aの大きさのランドルト環を5mの距離から見ると，視角は1’となり，これを見分けるときの視力を1.0とする。」



（『系統看護学講座　眼　成人看護学13』，2013，第12版第１刷，大鹿哲郎ら，医学書院，p. 36**図４－１**）

では，5 m 離れたときの視角が１分の大きさは，どのくらいになるのか。引用の図において，二等辺三角形の底辺の大きさを y，頂角の大きさを x とすると，x と y の関係は次のように表せられる。

$$\tan\left(\frac{x}{2}\times\frac{1}{60}\right)=\frac{\frac{y}{2}}{500}$$

$$\text{よって，}y=1000\times\tan\left(\frac{x}{120}\right)$$

この関係式に，$x=1$ を代入すると，$y=1.45$ になるので，5 m 離れたときの視角が１分の大きさは，1.45（mm）となるのである。したがって，すき間の幅1.5mmの大きさのランドルト環は，視角とランドルト環の幅の関係から算出した値からすると，近似値にあたる。

視力と視角の関係を「最小視角の逆数が視力になる」（『眼科検査法ハンドブック』，2005，p. 9）と仮定すると，厳密には，ランドルト環の幅の長さと視力は，反比例の関係ではない。視角の値が微小であるので，「視角と幅の長さ」が比例していると近似的にみることができ，それゆえ，「幅の長さと視力」が反比例していると近似的にみているのである。

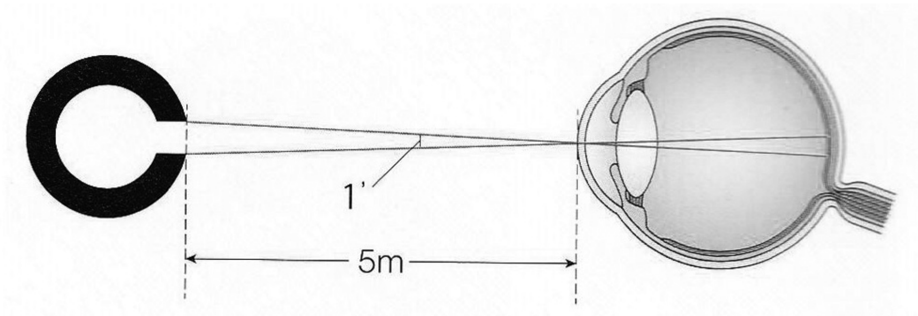
生徒たちには，ランドルト環の幅の長さと視力との関係を考えさせるだけではなく，視角とランドルト環の幅の長さとの関係を考えさせることも価値がある。例えば，次のような問題の考察である。

問題　春の視力検査のとき，視力検査表の「C」がランドルト環と呼ばれていることに興味をもった有紀さんと健三さんは，ランドルト環について調べてみることにしました。

有紀さんと健三さんが調べたこと

○５m離れた場所から，視角１分（１分は，1度の $\frac{1}{60}$ の角度）の大きさのランドルト環のすき間を見分けることができるとき，視力を1.0とする。

ランドルト環



○視力と視角の関係式は，次の式である。

$$(\text{視力}) = \frac{1}{(\text{視角}(\text{分}))}$$

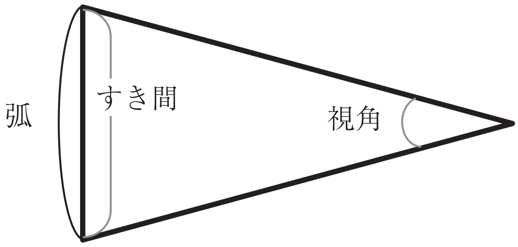
○それぞれの視力に対応するランドルト環の大きさは，変化するが，形は変わらない。

次の（１）から（３）までの各問いに答えなさい。

（１）視角５分のときのランドルト環のすき間を見分けることができる視力を求めなさい。

（２）**調べたこと**をもとにすると，有紀さんは視力検査表を自分でも作成することができるのではないかと思いました。そこで，視角とランドルト環のすき間の大きさとの関係を考えるために，右のような図を描き，視角の大きさとランドルト環のすき間にあたる弦の長さとの関係について考えることにしました。

有紀さんは，はじめ，弦の長さは，それに対応する視角の大きさに比例すると考えました。



図

しかし，弦の長さは，それに対応する視角の大きさに比例しません。その理由を説明しなさい。

（３）視角とランドルト環のすき間の大きさとの間に，厳密には，比例の関係がないことがわかりました。しかし，次のように考えれば，視角とランドルト環のすき間の大きさとの間に比例の関係があるとみなすことができます。下の□に当てはまる言葉を書きなさい。

□ので，ランドルト環のすき間の大きさと弧の長さをほとんど同じ長さとみなすことができる。

上記の問題の（2）では，「視角が60°である1辺の長さが1の正三角形を考え，それを2つつなぎあわせ，120°の視角を作る。このとき，視角の大きさは2倍になったが，弦の長さは，2よりも小さくなるため，2倍にはならない。つまり，弦の長さは，それに対応する視角の大きさに比例しない。」などのように，反例を1つあげて，視角とランドルト環のすき間の大きさが比例しないことを説明することが考えられる。

また，問題の（3）では，視角とランドルト環のすき間の大きさとの間に比例の関係があるとみなす際の根拠，すなわち，視角が非常に小さいことを考えさせている。

このように，近似していることを明確に意識させ，近似している際の根拠を考えさせることも重要であると考える。

上記の事例の考察の中で見られた数学的リテラシーを抽出すると次のものが挙げられる。

・定式化における近似：視角が微小であることから，視角とランドルト環のすき間の大きさが比例するとみなせるという考え

・反例を用いた説明：反例を1つあげて，視角とランドルト環のすき間の大きさが比例しないことを説明する考え

3．「中心概念」を参照した数学的リテラシーの具体像の整理

昭和31年に発行された高等学校学習指導要領数学科編に記載されている具体的な「中心概念」は，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲの中に，次のように示されている。

数学Ⅰに示された「中心概念」

a　概念を記号で表わすこと
b　概念・法則を拡張すること
c　演繹的な推論によって知識を体系だてること
d　対応関係・依存関係を捉えること
e　式や図形について不変性を見いだすこと
f　解析的方法と図形的方法との関連

数学Ⅱに示された「中心概念」

a　概念を記号で表わすこと
b　概念・法則などを拡張すること
c　演繹的な推論によって知識を体系だてること
d　函数の大域的な性質や局所的な性質を捉えること
e　式や図形について不変性を見いだすこと
f　解析的方法と図形的方法との関連

数学Ⅲにおいて示された「中心概念」

a　概念を記号で表わすこと
b　概念・法則などを拡張したり，一般化したりすること
c　演繹的な推論によって知識を体系だてること
d　函数の大域的な性質や局所的な性質を捉えること
e　統計的な事象を量的に捉えること

f　極限によって量を捉えること
g　式や図形について不変性を見いだすこと
h　解析的方法と図形的方法との関連

上記の「中心概念」には,「概念･法則などを拡張すること」のように,数学の内容は背景化され,数学の方法が前面に出されて記述されているものや「函数」や「極限」のように,数学の内容が前面に出されて記述されているものもある。本稿では,数学の内容を背景化した記述方法をとり,「中心概念」を基にして,数学的リテラシーを次のことができる能力と考える。

表 4　「中心概念」を基にした数学的リテラシーの特徴付け

a	概念の記号化
b	概念・法則の拡張や一般化
c	演繹的推論による知識の体系化
d	対応関係・依存関係の把握
e	不変性の特定
f	解析的方法と図形的方法との関連付け
g	現実事象の量的把握

そして,**表 4** の数学的リテラシーに,事例の考察を通して,抽出した数学的リテラシーの要素を位置付けると次のように表すことができる。

a　概念の記号化
　　－文字式による表現・処理・解釈
b　概念・法則の拡張や一般化
c　演繹的推論による知識の体系化
　　－判例を用いた説明
d　対応関係・依存関係の把握
　　－変化の把握,対応の把握,条件の制御
e　不変性の特定
f　解析的方法と図形的方法との関連付け
g　現実事象の量的把握
　　－数学的処理における近似,定式化における近似

4．結語と今後の課題

本稿の目的は,事例の考察を通して,数学的リテラシーの具体像を抽出し,「中心概念」を参照しながら,整理することであった。「中心概念」への着目は,我が国が大切にしてきた数学的な考え方を包含した数学的リテラシーの具体化が可能になると考えたからである。

本稿では,「中心概念」を基にした数学的リテラシーの特徴づけを試みたが,その特徴付

けに対して，適切性の検討を行わなければならない。そのためには，先行研究において指摘されてきた数学的リテラシーとの比較検討や，さらに多くの事例研究からの数学的リテラシーの抽出が必要である。これが，今後の課題である。

注

1）PISAにおける数学的リテラシーの定義も，PISA調査の開始当初から，変更がなされている。

引用参考文献

木村俊一（2010）『Newton－図形に強くなる』ニュートンプレス

木村俊一（2012）『連分数のふしぎ』ブルーバックス，講談社

三輪辰郎（1996）「文字式の指導序説」筑波数学教育研究，第15号，pp. 1－14

中村幸四郎他訳（1971）『ユークリッド原論』共立出版

日本眼科学会百周年記念誌編纂委員会（1997）『日本眼科の史料』日本眼科学会百周年記念誌第6巻，思文閣出版，p. 8

OECD（2013）『生きるための知識と技能5　OECD生徒の学習到達度調査（PISA）2012年調査国際結果報告書』国立教育政策研究所監訳，明石書店

小口芳久ら編者（2005）『眼科検査法ハンドブック』医学書院，第4版第1刷，p. 9

大鹿哲郎ら（2013）『系統看護学講座　眼　成人看護学13』医学書院，第12版第1刷，p. 36

https://www.nier.go.jp/guideline/s31hm/index.htm

5　数学的リテラシーの育成を図る教材の開発
ーボロノイ図を用いた探究に焦点を当ててー

奈良教育大学　准教授　舟橋　友香

1．はじめに

平成27年８月に，教育課程企画特別部会より論点整理が公表され，次期学習指導要領の方向性が明らかになってきた。注目すべきは，子どもたちが身に付けるべき力が３本の柱という形で整理されている点である。具体的には，子どもたちが「何を知っているか」だけではなく,「知っていること・できることをどう使うか」，そして「どのように社会・世界と関わり，よりよい人生を送るか」ということを視点に議論が展開されている。

数学的リテラシーの育成を意図したとき，特に上記の第３の柱と算数・数学とのつながりを考える必要があるだろう。このとき，二つの方向性が考えられる。一つは，実生活を支えるあらゆるメカニズムの中で，いかに数学が使われているかということを意識化していく必要性を強調する方向である。もう一つは，数学の中の世界での発展的，統合的な考察といった考える力そのものが，学びに向かう力や人間性そのものの育成を担うとする方向である。両者は相反するものではなく，また二者択一のものでもなく，その両面から検討していくことが重要であろう。

本稿では，上述の立場に立ち，教材の開発にあたっては実生活の文脈から問題場面を設定しながらも，個々の数学的知識がある観点で統合されることを意識化できるよう試みた。具体的には，災害対策としての津波避難ビルや，区画整備に伴う境界線の決定という現実の社会での問題を取り上げた。そして，問題を解決していく過程で，中学校や高等学校で学習する垂直二等分線，角の二等分線，放物線が「距離の等しい点の集合」という統一した観点から用いることが必要となる文脈を設定した。

2．教材開発の視点

（1）浜松市津波避難ビルの配置に関する評価

教材の開発にあたり，工学の立場から最適施設配置問題について静岡県浜松市に位置する高等学校と連携した取り組みを行っている安藤（2014）[1]を参考にした。浜松市は，平成23年度に浜松市津波対策委員会を設立し，災害発生時への対応の一環として「津波避難ビル」を指定している。浜松市南部の沿岸部には高台が少ないため，津波が発生したとき，または発生の恐れがあるときには，市民が津波から避難するために人工建造物が必要となる。津波避難ビルとは，民間ビルなどの一部を一時的に避難場所として使用することができるように市と所有者，管理者が協定を結んだ建物である。[2]この津波避難ビルに関して，高校生が取り組んだ課題は，第１に，現在の津波避難ビルで収容能力は十分か，第２に，津波が発生した際に津波避難ビルまで移動することは可能か，という２点から津波避難ビルの配置を評価することである。

配置の評価をするために，ボロノイ図を用いた人口の推定が行われている。ボロノイ図とは，ある平面上に配置された母点と呼ばれる複数個の点に対して，その平面内の各点を，

どの母点に最も近いかによって分割した図である（**図１**）。２次元ボロノイ図において，それぞれの母点から等距離にあり２つの領域の境界をなす線分（あるいは半直線または直線）は，２つの母点を結ぶ線分の垂直二等分線となる。このボロノイ図は，私たちの生活を支えるシステムの中に様々に応用されている。例えば，事故でけが人が出た場所の連絡を受けたとき，出動すべき救急車の決定は，救急車が待機している地点を母点としたボロノイ図を作成することで決定することができる。さらに，救急車が事故現場に到着して，けが人を収容した際に最も近い救急病院を決定（**図２**）するためには，救急病院を母点とするボロノイ図を考えればよい（杉原，2009[3]，p. 5）。

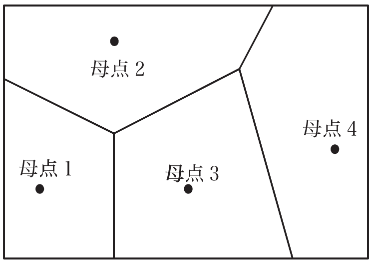


図１　ボロノイ図の例

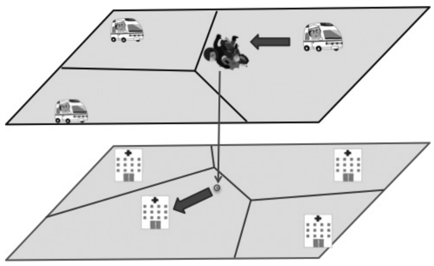


図２　けが人が出た際の救急車の動き

高校生らは，ボロノイ図を用いた津波避難ビルの配置の評価から，次の結論を導いている。第１に，収容能力についての分析から，対応するボロノイ領域内人口の５分の１以下の収容能力しか持たない津波避難ビルは全体の約３分の１にのぼること，全体の約４分の１の避難ビルの収容能力は，ボロノイ領域内人口の10分の１以下であることを指摘した。第２に，移動時間に関する分析から，50から70歳代の人で早足で移動できる人ならば避難できる可能性が高いが，浜松市全域の中で，車椅子利用者，災害時要援護者の対象者の数は平成23年３月16日時点で17,540人いることを鑑みると，車椅子利用者等は避難しきれない可能性が非常に高いことを指摘した。以上より，津波避難ビル以外の避難に関する施設や防潮堤の整備を早急に進めるとともに，「津波避難ビルの指定をさらに増やすことによって，市民が安心・安全に暮らしていける街を目指していく必要がある」（安藤，2014，p. 335）と結論付けている。

（２）ボロノイ図を用いた探究に必要な視点の検討

上述の津波避難ビルの評価では，用いる数学は垂直二等分線の作図という中学校１年生で学習する事柄でありながら，その眼で自分たちの生活を支えるシステムを見直し評価・改善のための方向性を提案するというところまで踏み込んでいる点で非常に価値のある取り組みであるといえる。一方で，教材化にあたっては，さらに次の２つの視点を検討する必要があるだろう。

一つは，ボロノイ領域を決定するためには垂直二等分線を用いればよいという気付きを促す文脈の設定である。まず，各避難ビルに集まってくる人口を推定するために，避難する人の視点から最寄りの避難ビルというのは最短距離を考えればよいという前提を共有する必要がある。これを数学的に解釈しようとすると，最寄りの避難ビルというのは家を中心とした円を想定した時に，半径が最小になる円に含まれる避難ビルを見つけることにな

る。このようにして，円を想起できるようにしておく。これにより，それぞれの避難ビルの視点から避難してくる家の領域を考えると，避難ビルを中心とする同一半径の円をもとにした考察から，垂直二等分線が境界線となることを発見できるだろう。

もう一つは，津波避難ビルの探究では，平面内の各点を母点としたときに，どの母点に最も近いかによって分割した図を考えたが，この「点」を「線分」に拡張する文脈を設定することである。身の回りの事象を考えたとき，領域の分割は必ずしも点によるものばかりではない。例えば，動物がどの湖（閉曲線）に水を飲みに行くかを考えるときには，森全体がそれぞれの閉曲線の勢力圏に分割される。また，緊急避難場所が緑地や公園といった多角形の場合もある。多角形は線分の組み合わせから考えることができるし，閉曲線は線分に近似すればよいので，線分をもとに領域を分割する方法が見いだせればよい。２つの線分から形成される領域を考えるためには，線分の両端の点と点から決定される垂直二等分線，一方の端点と一方の直線から決定される放物線，2つの直線から決定される角の二等分線という３通りから位置関係を考慮して決定する必要がある。中学校から高等学校で学ばれる垂直二等分線，放物線，角の二等分線について，「等しい距離にある点の集合」という観点から統合するよい教材になると考えた。そこで，点からなるボロノイ図の次に，線分からなるボロノイ図へ拡張する文脈を取り入れた。

３．開発した教材について

問題１

平成23年３月に発生した東北地方太平洋沖地震は，これまでの想定をはるかに超える巨大な地震・津波により，一度の災害で戦後最大の人命が失われるなど甚大な被害をもたらしました。そこで平成23年８月に内閣府に設置された「南海トラフの巨大地震モデル検討会」では，将来発生が予想されている南海トラフ沿いで発生する大規模な地震・津波に関して検討が進められ，その結果，関東から四国・九州にかけての極めて広い範囲で強い揺れと巨大な津波が想定されることとなりました。特に，津波については，「発生頻度は極めて低いものの，発生すれば甚大な被害をもたらす最大規模の津波」を想定した結果，津波高10m以上の巨大な津波が13都県にわたる広い範囲で襲来することが想定されることとなりました。[4]

南海トラフに位置する浜松市は，平成23年度に浜松市津波対策委員会を設立し，災害発生時への対応の一環として「津波避難ビル」を指定しています。浜松市南部の沿岸部には高台が少ないため，津波が発生したとき，または発生の恐れがあるときには，市民が津波から避難するために人工建造物が必要となります。津波避難ビルとは，このような状況を踏まえて，民間ビルなどの一部を一時的に避難場所として使用することができるように市と所有者，管理者が協定を結んだ建物です。

（１）　浜松市に住む理英さん，友香さん，賢祐さんは，地震が発生したときに，どの津波避難ビルに避難すればよいか，確認することにしました。図３は，それぞれの家と津波避難ビルの位置を表しています。３人はそれぞれ，どの津波避難ビルへ避難すればよいでしょうか。

（2）　３人は地図上の家の人々が，どの津波避難ビルへ避難すればよいかを示したものを作成して配布することにしました。各避難ビルはどの範囲の家の人々が集まるか，その領域を図に示しましょう。

図３　３人の家と津波避難ビル（AからE）の位置

想定される活動

（1）３人の避難する場所を考える

図４　友香さんの避難場所の決定

理英さんは，津波避難ビルDへ，賢祐さんは津波避難ビルEへ避難する必要があることは，すぐに予想される。直ちに判断できないのは，友香さんの家の位置だろう。そこで，理英さんや賢祐さんの避難場所を決定していた要素は何であったかを見直す必要が出てくる。これにより，「家と各津波避難ビルの距離（２地点の距離）を考えたときに，最短となるビル」を前提としていたことが意識化される。この前提のもとで，友香さんの家と津波避難ビルBとEの距離を考える。どちらの距離が短いかを判断するためには，友香さんの

家を中心に，それぞれの地点までの距離を半径とする円を描けばよいことがわかる（**図４**）。

（２）各津波避難ビルに集まる家の領域を考える

まず，津波避難ビルDとEに焦点化して考察する。それぞれの地点を中心とする同一半径の円を描くと，それぞれの地点を中心とする領域は等しく区分される。次に，半径を大きくしていくと，地点DとEを結んだ距離の中心で２つの円が接することになる。さらに半径を大きくしていくと，２つの円の交わりが見えてくる。同一半径の円を描いているので，２つの円が交わった点は，それぞれの中心から等しい点となる。この連なりは，最終的に直線，すなわち地点DとEを結んだ線分の垂直二等分線となっていることが見えてくる。つまり，２つの地点の境界を考えるためには，「２つの地点から等しい距離にある点の集合」を考えれば良いのであって，操作としては２つの地点を結んだ線分の垂直二等分線を作図すればよいのである（**図５**）。

図５　地点DとEの境界線

では，地点Dと他の地点が形成する境界線に焦点化して考えてみよう。さきほど，２つの地点の境界を考えるためには，２地点を結ぶ線分の垂直二等分線を作図すればよいことが確認された。したがって，地点Dとそれぞれの地点を結ぶ線分の垂直二等分線を作図すると，４本の直線が得られる。この４本の直線で最小の領域が，地点Dに避難する家の領域となる（**図６**）。

図６　地点Dに避難する家の領域

この操作を，残りの他の津波避難ビルに対して行えば，地図上の家の人々が，どの津波避難ビルへ避難すればよいかを示すことが出来る（**図７**）。

図７　各津波避難ビルに避難する家の領域

なお，３つの直線が交わる点がこのとき現れるが，これは３つの地点から等しい距離にあるから，それらの地点を通る円の中心であることがわかる。下の図に示すように，３個の母点P_1，P_2，P_3の領域が点Qを共有しているとしよう。このとき，点Qから出る３本の辺は，三角形$P_1P_2P_3$の辺の垂直二等分線である。したがって，外心の定理より，これら３本の直線は１点で交わり，この点がQである。したがって，点Qは三角形P_1，P_2，P_3の外接円の中心である（**図８**）。

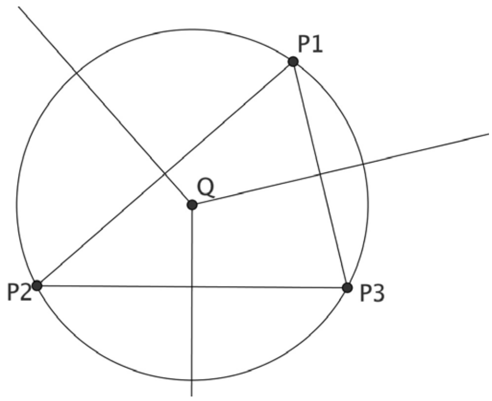


図８　３本の垂直二等分線が交わる地点について

問題２

問題１では，津波避難ビルの位置する「点と点」から領域を考えていましたが，身の回りの事象を考えたとき，領域の分割は必ずしも点によるものばかりではありません。例えば，動物がどの湖（閉曲線）に水を飲みに行くかを考えるときには，森全体がそれぞれの閉曲線の勢力圏に分割されます。また，緊急避難場所が緑地や公園といった多角形の場合もあります。

具体的に，福岡県粕屋町の区画整備に伴う境界線の決定に関する資料を見てみましょう。[5]境界線は，「河川・水路はその中央線」とすることが書かれています（**図９**）。

町民の話し合いで，川の中央線をどのように決定したらよいか問題となったとき，あなたならどのように決定することを提案しますか。

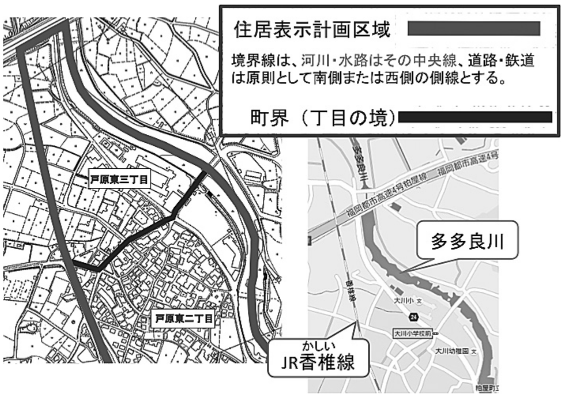


図 9　第 2 回粕屋町住居表示審議会での資料の抜粋

想定される活動

（1）河川の岸を線分で近似する

川岸が平行で直線であれば，中央線の決定は両岸からの中点で決定する（**図10**）。しかし，実際には川は蛇行しており，川幅も場所によって異なる。そこで，川岸を線分で近似することを考える（**図11**）。

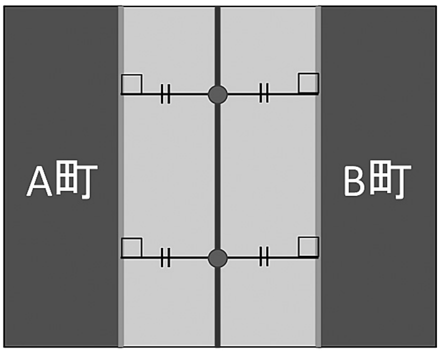


図10　川岸が平行の場合

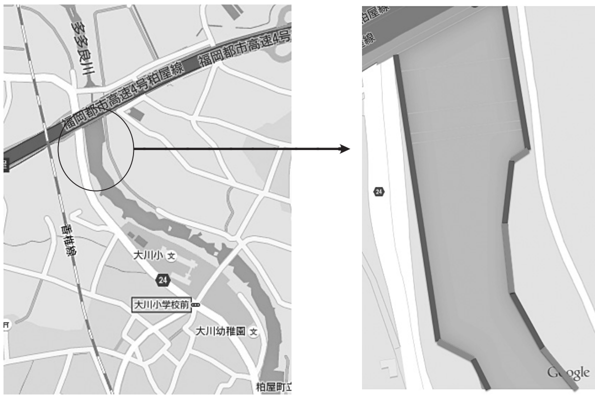


図11　川岸を線分で近似

（2） 2 つの線分に焦点化して考察する

川岸を線分で近似したら，次はそのうちの 2 つの線分に焦点化して考察をする（**図12**）。まず，ある領域について 2 つの線分から等しい点の集合（境界線）で分割する場合を考える。

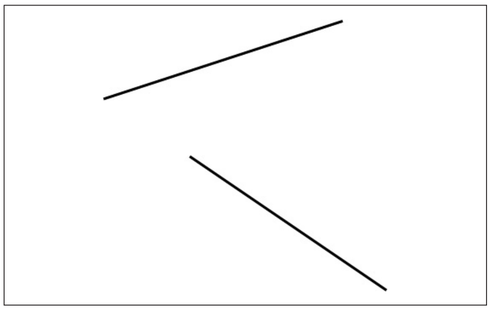


図12　２つの線分に焦点化

両端の点にのみ着目すると，問題１と同様に，２つの地点から等距離にある点の集合を考えればよいので，２点を結ぶ線分の垂直二等分線を考えればよいことが分かる（**図13**）。次に，間の部分に着目すると，２つの線分から等距離にある点の集合から，角の二等分線を考えればよいことが分かる（**図14**）。では，これらを合成した図（**図15**）で示された赤線のような境界線でよいのだろうか。

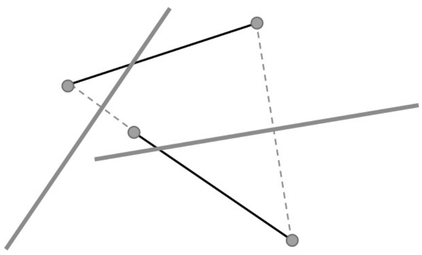


図13　両端に着目した場合

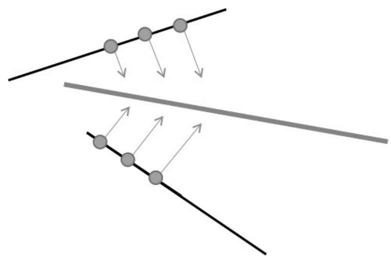


図14　間の部分に着目した場合

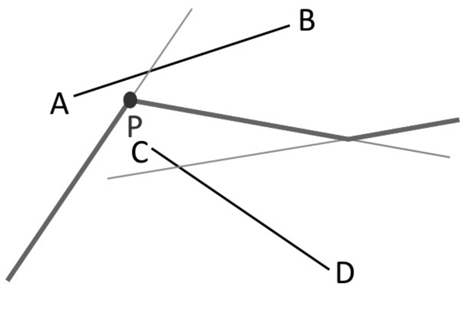


図15　垂直二等分線と角の二等分線合成した場合

点Pに着目してみると，明らかに線分ABに近いことがわかるだろう。そこで，作図で用いた垂直二等分線及び角の二等分線が保証する範囲について考える必要が出てくる。すると，角の二等分線で保証されるのは，線分から垂線を下ろした範囲であることに気付く。つまり，**図16**に示す範囲については垂直二等分線と角の二等分線がそれぞれ境界線となるが，その間の領域については，線分の端と線分がつくる領域について考える必要があることに気付く。

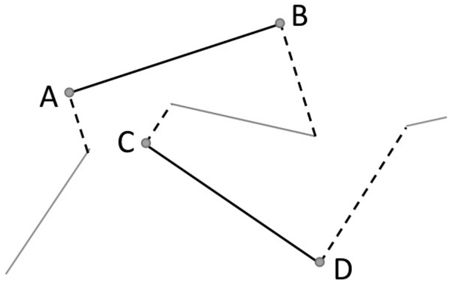


図16　垂直二等分線と角の二等分線が境界となる部分

例えば，点Cと線分ABからの距離が等しい点の集合はどのようになるか。点と直線から距離の等しい点の集合を考えるのだから，焦点と準線の関係から境界線は放物線となることに気付く。同様に，点Bと線分CDからの距離が等しい点の集合は，点Bを焦点とし線分CDを準線とする放物線となることがわかる。したがって，**図16**に示した境界線とあわせると，２つの線分から距離の等しい点の集合は，**図17**に示すような曲線となる。

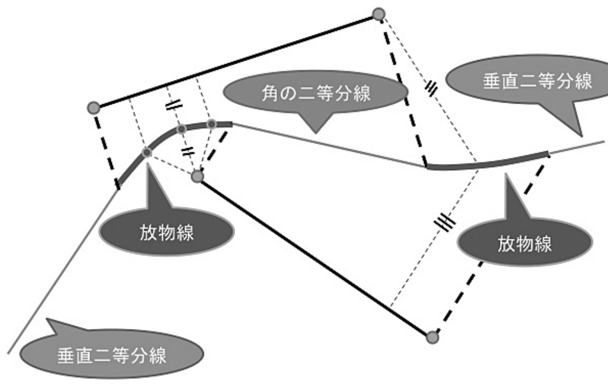


図17　２つの線分から距離の等しい点の集合

（３）線分が連なる場合の境界線がどのようになるか考える

（２)では，２本の線分に焦点化して考察したが，川岸は線分の連なりで近似されるので，線分が連なる場合の境界線について考察する必要がある。この線分の接続の仕方について，角EABのように線分の接続部分が平角を超える場合と，角ABFのように超えない場合の２通りが考えられる（**図18**)。平角を超える場合は，例えば点Aを焦点，線分GCを準線とする放物線を考える必要がある。一方で，平角を超えない場合は，角の二等分線の連なりから境界線が形成される。例えば，平角を超えない接続をしている角ABFの周辺にできる境界線に着目すると，線分ABと線分CDからなる角の二等分線，線分BFと線分CDからなる角の二等分線，そして線分BFと線分DHからなる角の二等分線からなることがわかる。以上より，線分で近似した場合の中央線の作図の方法が明らかとなった。

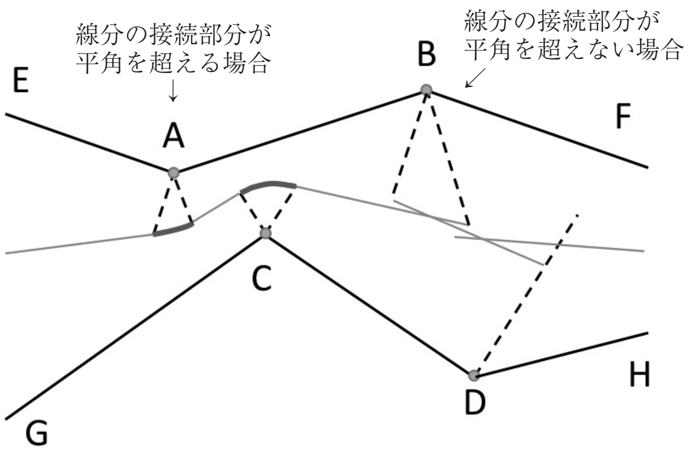


図18　　線分が連なったときの境界線

4．おわりに

本稿で示した教材では，複数の点からそれぞれの勢力圏を考える場面から，複数の線分の連なりからなる勢力圏を考える場面へと展開した。これをもとに，多角形からなる緑地・公園が緊急時の避難を受け持つ領域について評価する際には，線分の連なりというように多角形を見れば同様に考察することができることに気付いたり，閉曲線からなる領域についても線分で近似すれば同様に考察できることに気付いたりするなど，さらに発展して実生活の場面での事柄を読み解いていくことを期待する。

一方で，本稿で示した教材では，問題の解決までは至っても，それをもとに評価し改善案を提案するには至らない点で問題がある。安藤（2014）にみた浜松市の高校生たちが，津波被害を防ぐために自分たちの生活を支えるシステムを見直し評価・改善のための方向性を提案するというところまで踏み込んでいるように，問題解決に取り組む当事者にとって改善の必要性を感じる題材へと改良していくことが，今後の課題である。

引用・参考文献

1　安藤和敏（2014）「浜松市南部における津波避難ビル配置のボロノイ図を用いた分析」，日本オペレーションズ･リサーチ学会『オペレーションズ･リサーチ：経営の科学 59(6)』，pp. 330－335.

2　浜松市役所ホームページ「津波避難ビルの指定について」
http://www.city.hamamatsu.shizuoka.jp/kiki/disaster/bousai/building/　（2016.4.17確認）

3　杉原厚吉（2009）『なわばりの数理モデル－ボロノイ図からの数理工学入門－』，共立出版.

4　中央防災会議（2014）『南海トラフ地震防災対策推進基本計画』
http://www.bousai.go.jp/jishin/nankai/pdf/nankaitrough_keikaku.pdf（2016.4.17確認）

5　第２回粕屋町住居表示審議会 会議録
https://www.town.kasuya.fukuoka.jp/gyosei/johokokai/shingikai/kaisai_kekka/documents/dai2kaijuukyohyouji.pdf（2016.4.17確認）

6　「数学的なプロセス」と「記述式問題」に焦点を当てた教材開発

国立教育政策研究所教育課程研究センター　学力調査官　新井　仁

1　全国学力・学習状況調査の設計

全国学力・学習状況調査（以後「学力調査」）における「活用」の問題は，問題解決における「数学的なプロセス」と「記述式問題」について，次のように設計されている。

（1）「活用」の問題の枠組み

数学的な知識･技能などについて，「活用の文脈や状況」，「活用される数学科の内容（領域）」，「数学的なプロセス」の３つの視点から，**表１**のように整理している。

表１「活用」の問題作成の枠組み

<table>
<tr><th>活用する力</th><th>活用の文脈や状況</th><th>主たる評価の観点</th><th>活用される数学科の内容（領域）</th><th>数学的なプロセス</th></tr>
<tr><td>α：
知識・技能などを実生活の様々な場面で活用する力</td><td rowspan="3">実生活や身の回りの事象での考察

他教科などの学習

算数・数学の世界での考察</td><td rowspan="3">数学的な見方や考え方

数学的な技能

数量や図形などについての知識・理解</td><td rowspan="3">数と式

図形

関数

資料の活用</td><td>α1：日常的な事象等を数学化すること
α1（1）ものごとを数・量・図形等に着目して観察すること
α1（2）ものごとの特徴を的確に捉えること
α1（3）理想化，単純化すること
α2：情報を活用すること
α2（1）与えられた情報を分類整理すること
α2（2）必要な情報を適切に選択し判断すること
α3：数学的に解釈することや表現すること
α3（1）数学的な結果を事象に即して解釈すること
α3（2）解決の結果を数学的に表現すること</td></tr>
<tr><td>β：
様々な課題解決のための構想を立て実践し評価・改善する力</td><td>β1：問題解決のための構想を立て実践すること
β1（1）筋道を立てて考えること
β1（2）解決の方針を立てること
β1（3）方針に基づいて解決すること
β2：結果を評価し改善すること
β2（1）結果を振り返って考えること
β2（2）結果を改善すること
β2（3）発展的に考えること</td></tr>
<tr><td>γ：
上記α，βの両方に関わる力</td><td>γ1：他の事象との関係を捉えること
γ2：複数の事象を統合すること
γ3：事象を多面的に見ること</td></tr>
</table>

（２）問題形式

問題形式は，次の「選択式」,「短答式」,「記述式」の３種類である。

①見いだした事柄や事実を説明する問題＜事柄・事実の説明＞

数量や図形などの考察対象や問題場面について，成り立つと予想される事柄や事実を見いだす問題に対し，それを的確に捉え直し，前提とそれによって説明される結論の両方を数学的に表現する力をみる。

事柄や事実を数学的に表現することは，逆の意味を吟味したり，解の吟味の必要性に気付いたりするなど，論理的に考えを進めながら新たな知識を習得できるようにする上で大切である。「前提」と，それによって説明される「結論」の解答を求めている。

②事柄を調べる方法や手順を説明する問題＜方法・手順の説明＞

事象について，数学的に考察する場面でのアプローチの方法や手順を説明する問題に対し，構想を立てたり，それを評価・改善したりする力をみる。

他者と協働的に問題を解決したり，問題解決過程を自ら振り返ったりする上で，方法や手順を的確にすることが大切である。「用いるもの」と，その「用い方」の解答を求めている。

③事柄が成り立つ理由を説明する問題＜理由の説明＞

説明すべき事柄について，その根拠と成り立つ事柄を示して理由を説明する問題に対し，論理的な思考力や表現力をみる。

ある事柄が成り立つ理由を数学的に説明する際には，説明の対象となる成り立つ事柄を明確にした上で，その根拠を指摘することが大切である。「根拠」と,「成り立つ事柄」の解答を求めている。

なお，理由の説明では,「示された説明すべき事柄を記述する形式（c－１）」と，」説明すべき事柄を判断し，その根拠を記述する形式（c－２）」の２つのタイプがあり，両者が出題されている。

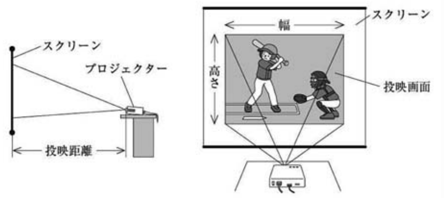
（３）問題の具体と結果の考察

平成27年度の学力調査Ｂ$\boxed{1}$では，プロジェクターを使う場面を想定した問題が出題されている。本問題は，映像をプロジェクターでスクリーンに映し出す場面を取り上げ，事象の数学的な表現と解釈について問うものである。日常的な事象を数学化することや，与えられた情報の中から必要な情報を適切に選択し判断することなどが含まれており，数学的なプロセスとしてはαに分類されるものと考えられる。

また，記述式問題としては，設問（３）において，与えられた式に基づいて結論を判断した上で，その根拠を数学的な表現を用いて説明することを求めている。つまり,「理由の説明」のうち，c－２のタイプである。

1 健治さんの学校では，新入生歓迎会のときに，体育館で部活動紹介の映像を流します。映像は，プロジェクターでスクリーンに映し出します。そこで，健治さんはプロジェクターの置き場所を決めるために，プロジェクターについてインターネットで調べました。

健治さんが調べたこと



投映距離 (m)	投映画面の大きさ		
	高さ(m)	幅(m)	面積(m^2)
1.0	0.6	0.8	0.48
1.5	0.9	1.2	1.08
2.0	1.2	1.6	1.92

○ 投映画面の大きさは，投映距離によって変わる。

○ 投映画面の形は，調整されて，いつも長方形になる。

○ 投映画面の高さや幅は，投映距離に比例する。

次の(1)から(3)までの各問いに答えなさい。

(1) 投映距離を x m，投映画面の高さを y m とするとき，y を x の式で表しなさい。

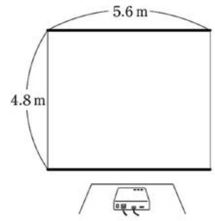
(2) スクリーンの高さは4.8 m，幅は5.6 m です。投映画面を，スクリーンからはみ出ないようにして，できるだけ大きく映し出すためには，投映距離を何mにすればよいですか。下のアからエまでの中から正しいものを1つ選びなさい。

ア　5 m

イ　6 m

ウ　7 m

エ　8 m



(3) 健治さんは，映像が暗くて見えにくいのではないかと気になりました。しかし，プロジェクターの光源の明るさを変えることはできません。そこで，映像の明るさについて調べると，映像の明るさと投映画面の面積の関係は，次の式で表されることがわかりました。

$$\left(\begin{array}{c}\text{映像の}\\\text{明るさ}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\text{プロジェクターの}\\\text{光源の明るさ}\end{array}\right)\div\left(\begin{array}{c}\text{投映画面の}\\\text{面積}\end{array}\right)$$

このとき，映像の明るさを2倍にするにはどうすればよいですか。下のア，イの中から正しいものを1つ選びなさい。また，それが正しいことの理由を，上の式で表される関係をもとに説明しなさい。

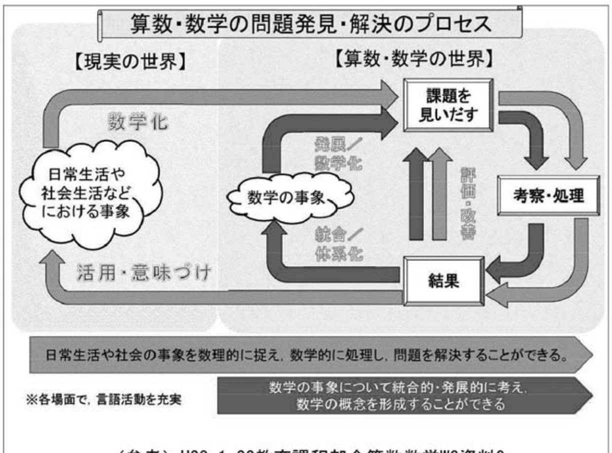
ア　投映画面の面積を2倍にする。

イ　投映画面の面積を$\frac{1}{2}$倍にする。

表1　B1各設問の正答率

設問（1）	設問（2）	設問（3）
30.6%	35.5%	12.3%

各設問の正答率は，**表1**の通りである。設問（2）では誤答選択肢「**エ**」の反応率が32.1%である。これは，投映画面の縦の長さは4.8mになりスクリーンに収まるが，横の長さは８mで，スクリーンからはみ出てしまう。つまり，求めた結果を現実事象に戻して振り返ることができていないものと考えられる。また，設問（３）では，正答選択肢「**イ**」を選択しておきながら，その根拠の記述において数学的な表現ができていない類型の反応率が47.4%と非常に高い。これらの結果から，現実事象を数学化して考え，導き出した結論を現実事象に戻して振り返ることに課題があると考えられる。



（参考）H28. 1. 22教育課程部会算数数学WG資料9

なお，本問題は「日常的な事象等を数学化すること」という意味でαに分類されるが，数学的に得られた結果を現実事象に戻して振り返ることも要求されるもので，「結果を評価し改善すること」という意味ではβの要素も含む。このように，次元が異なるプロセスが並列された枠組みになっている点については，今後整理していく必要もあろう。

2　教材例「スキージャンプのルール改正の妥当性」

日常事象を取り上げ，数学的な解釈を試みたり，結果を振り返って妥当性を考えたりすることは，数学的リテラシーの育成として重要な意味をもつ。ここに焦点を当て，一つの

教材を提案する。

提案する教材は，スキージャンプのルール改正を取り上げたものである。式やグラフに基づいて，公正・公平な判断力を養うことを目的とし，中学校２学年で授業実践を試みた。この授業の概要を，以下に述べる。

（1）スキージャンプのルール改正の教材化

1998年の長野オリンピックで行われたスキージャンプ競技では，日本は団体戦で優勝するなど好成績を収め，話題となった。その後，暫くの間低迷が続いたが，最近では葛西紀明選手や，女子スキージャンプの高梨沙羅選手の大活躍が明るい話題になっている。

長野オリンピック後に突然低迷したことの要因は色々と考えるが，1999年に国際スキー連盟が「スキー板の長さに関するルール改正」を行ったことも，何か影響した可能性もある。改正前後のルールは，次のようになっている。

改正前：（スキー板の長さ）＝（身長）＋80
改正後：（スキー板の長さ）＝（身長）×1.46
（単位：cm）

改正前後のルールについて，示された２つの式からどのように考え，解釈し，判断すればよいだろうか。このことを取り上げ，「ルール改正は，日本人選手にとってなぜ不利だったのか」と問題提起し，式から結論を導いた上で，日本スキー連盟がルール改正に対して抗議しなかった事実を伝え，「なぜ全日本スキー連盟はルール改正に抗議しなかったのだろうか」と問いかけた。

（2）授業の様子

ルール改正が日本人に与えた影響について，数学的に考察する授業である。その中で，日本人にとって不利になったとしても，競技としては公平なものになるということを，身長とスキー板の長さの関係を踏まえて生徒自ら考察し，判断できることを期待した。

①授業冒頭の様子

〔前〕$y=x+80$…①
〔後〕$y=1.46x$ …②

教師　身長を$x$cm，スキー板の長さを$y$cmとすると，改正前後のルールは，それぞれ①，②の式になりますね。
スキー板は短いより長い方が有利です。もし自分が選手だったとして，改正前後でスキー板の長さがどのように変わるか，計算してごらん。

Ｓ１　改正後の方が短く，不利です。

教師　ルール改正前後の世界選手権の結果は，次の通りです。

スキージャンプ世界選手権（1999年改正前）

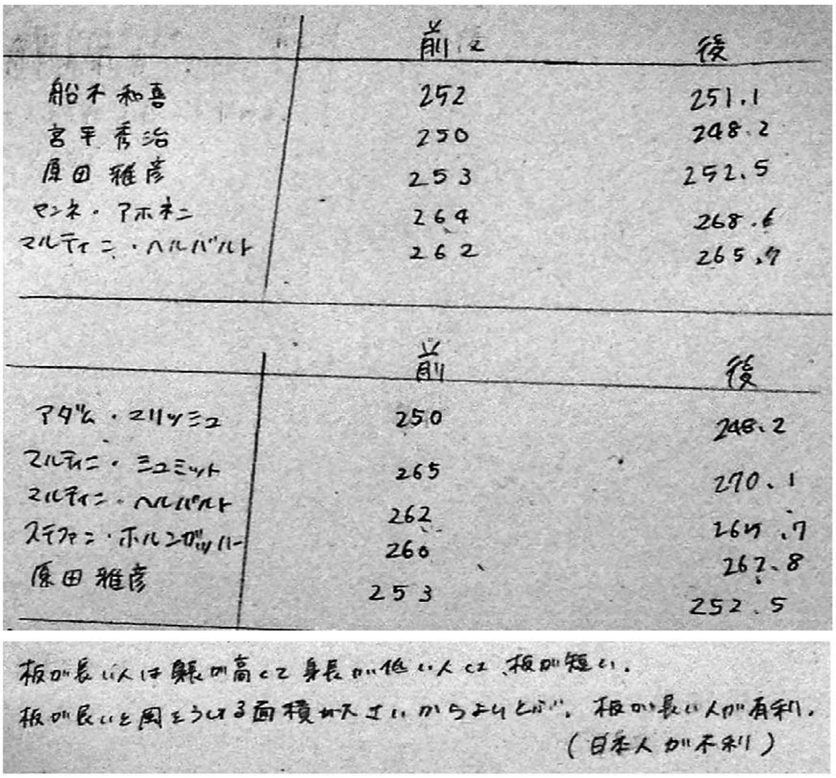
順位	国・地域	選手	身長
1金	日本	船木和喜	172
2銀	日本	宮平秀治	170
3銅	日本	原田雅彦	173
4	フィンランド	ヤンネ・アホネン	184
5	オーストリア	マルティン・ヘルバルト	182

スキージャンプ世界選手権（2001年改正後）

順位	国・地域	選手	身長
1金	ポーランド	アダム・マリシュ	170
2銀	ドイツ	マルティン・シュミット	185
3銅	オーストリア	マルティン・ヘルバルト	182
4	オーストリア	ステファン・ホルンガッハー	180
5	日本	原田雅彦	173

S 2　改正前は日本人がメダルを独占していたけど，改正後は… 。
S 3　やっぱり日本人にとっては不利になったということだと思います。
教師　日本人が不利になったことの理由を説明することはできますか。
S 4　２つの式をグラフにすれば，何かわかるかも知れません。
S 5　表を書いたり，連立方程式にしたりしてもいいと思います。<中略>

② 生徒の追究の具体



	前	後
船木和喜	252	251.1
宮平秀治	250	248.2
原田雅彦	253	252.5
ヤンネ・アホネン	264	268.6
マルティン・ヘルバルト	262	265.7

	前	後
アダム・マリッシュ	250	248.2
マルティン・シュミット	265	270.1
マルティン・ヘルバルト	262	264.7
ステファン・ホルンガッハー	260	267.8
原田雅彦	253	252.5

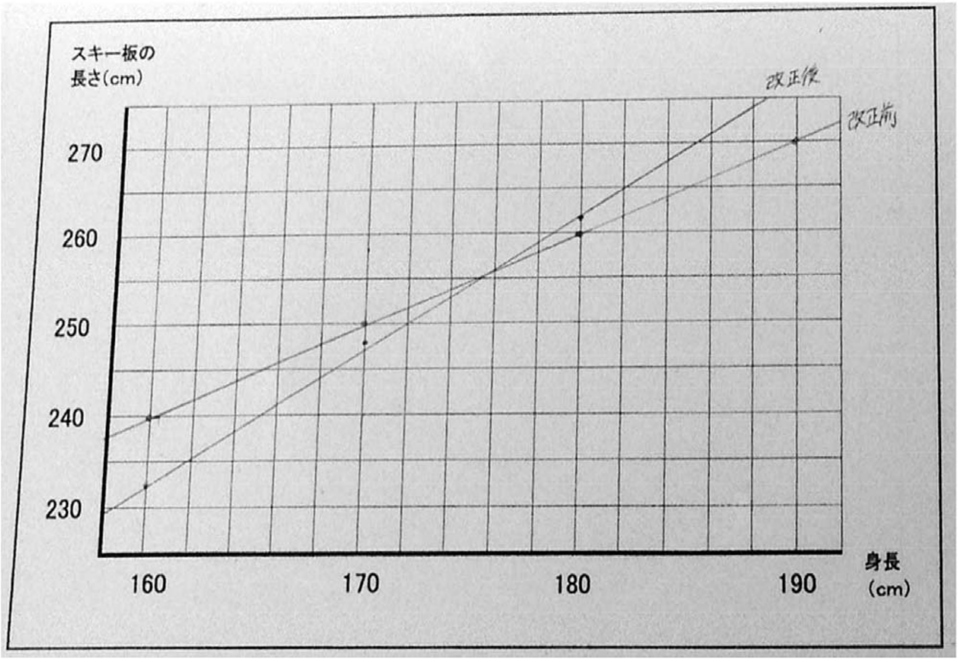
板が長い人は身長が高くて身長が低い人は、板が短い。
板が長いと風をうける面積が大きいからよりとぶ。板が長い人が有利。
（日本人が不利）

A生の記述

A生は，世界選手権の入賞者について，改正前のルールと改正後のルールの両方を適用してスキー板の長さを求めてまとめた。その結果，日本人選手は他国の選手に比べて比較

的身長が低いため，ルール改正によってスキー板が短くなった選手が多く，不利になったと記述した。

また，B生は①と②の式をグラフに表し，交点の座標を求め，これをモニターに映しながら，次のように説明した。



改正前後の２つのグラフが交わり，交点の座標は，だいたい（174，254）です。だから身長174cmの選手は改正前後でもスキー板の長さは変わらないけれど，これより身長が低い人は改正後にスキー板は短く，高い人は長くなります。つまり身長が高い人の方が有利になるルール改正で，日本人選手はみんな身長174cmより低いから，不利なルール改正だったと思います。

B生がかいたグラフ（上）と説明（下）

③授業後半の様子

日本人選手にとって不利だという結論になりつつあるとき，教師の１つの発問から，生徒は改めて資料を見直した。

教師　日本人選手にとって不利なルール改正だったということですが，もしそうだとして，皆さんが選手だったらどうしますか？

Ｓ６　たぶん，抗議すると思います。

教師　でも，このルール改正を行ったとき，日本スキー連盟は抗議しなかったのです。なぜでしょうか。

Ｓ７　日本人は真摯だから…

S８　改正前は，日本人選手にとっては有利だったけれど，（身長が高い）外国人選手には不利だったということかな。

S９　ルール改正前後の入賞者を見ると，1999年（改正前）の上位３人はみんな身長が低いけれど，2001年（改正後）は身長が高い人も３位までに入っています。でも１位の選手は身長170cmで，身長が高くても低くても実力で勝負できるということだと思います。

教師　確かに2001年に優勝したアダム･マリシュ選手の身長は170cmで，入賞者の中で最も低いですね。

S10　ルール改正で日本が不利になったのではなく，改正前より公正になったので，日本スキー連盟は抗議しなかったのだと思います。

< 以下省略>

（３）授業の考察

スポーツのルールに数式が使われることもあり，数学的根拠に基づいて公正・公平に判断できることは，重要な力である。

B生がグラフの交点の座標を示した際，教師は「その求め方は，次の機会に…」として割愛したが，①と②の式を連立方程式とみて解くことを確認してもよかっただろう。とかく，数式処理の練習を先に行い，後でこれを使うという流れが多いものであるが，このような場面こそ連立方程式の何たるかを学び，その有用性に触れる機会にしたい。

前述のA生は，身長が比較的低い日本人選手にとって，ルール改正は不利になったと一度は結論付けながら，ルール改正後の2001年の世界選手権で優勝したアダム・マリシュ選手の身長が170cmであったことが，どうしても腑に落ちなかったようである。授業での全体追究を通して，A生は最終的に次のように記述し，授業を終えた。

ルール改正して日本人不利とかいいよったしけど
アダム・マリシュさんが身長低くても1位とっちゃうき
スキーの板の長さも関わやしけど技術も大事やと思います。

（４）問題解決のプロセス・記述式問題との対応

この教材を問題として設定した場合，「問題解決のプロセス」と「記述式問題」について，それぞれの対応を整理する。

①問題解決のプロセスとの対応

・数式で示された改正前後を，現実事象に照らし合わせて解釈すること

　α１（２）ものごとの特徴を的確に捉えること

・数式からルール改正の妥当性を解釈し， 解釈した結果を説明すること

　α３（１）数学的な結果を事象に即して解釈すること

　α３（２）解決の結果を数学的に表現すること

・導いた結論を事象に即して振り返り， 見直すこと

　β２（１）結果を振り返って考えること

　β２（２）結果を改善すること

②記述式問題との対応

・２つのグラフの交点を求める際，グラフを座標平面上にかくことで，交点の座標はおよそ（174，254）であることが読み取ることができる。＜方法の説明＞

　解答例：「２つのグラフをかき，その交点の座標を読み取る。」

・ルール改正は妥当だったかどうかについて，数式から導き出した結果に基づき，結論を判断し，その理由を述べる。＜理由の説明＞

　解答例：「２つのグラフから，身長が約174cmの選手はルール改正にかかわらず，スキーの長さは254cmであることがわかる。また，174cmより身長が高い選手は，改正前より改正後の方が板が長くなり，174cmより身長が低い選手は改正前より改正後の方が短くなる。改正後の大会で優勝した選手の身長は170cmで，入賞者の中で最も身長が低いことを考えると，改正前は比較的身長が高い外国人選手には不利だったと考えられる。したがって，ルール改正で比較的身長が低い日本人選手が不利になったのではなく，改正前より公正になったと言える。」

3　今後について

「数学的なプロセス」と「記述式問題」を想定し，題材と評価問題を整える必要がある。

7　数学的リテラシーの育成を図る教材の開発と授業実践
―凹四角形の外角の和―

筑波大学附属中学校　教諭　小石沢　勝之

１．はじめに

平成20年に改訂された学習指導要領も施行されてから数年が経過し，数学的活動が内容領域に位置付けられたことにより，多くの研究や実践が行われてきた。近年では，全国学力・学習状況調査のような国内における大規模調査に加えて，OECDによる生徒の学習到達度国際調査（PISA）やIEAによる国際数学･理科教育調査（TIMSS）などの国際的な大規模調査問題やその結果を受けて，日々の授業を再考する機会も多い。特にPISAでは，知識基盤社会に生きる市民に必要な数学的素養について，数学におけるリテラシーを捉えるための評価の枠組みとして，「数学的リテラシー」の概念が用いられている。TIMSSが学校で学んだ知識や技能の定着を評価しようとしているのに対し，PISAは学校で学んだ知識や技能を実生活の場面で生かせるかどうかを評価しようというものである。今日の社会では，グラフ，表，数値などを含んだ数多くの情報があふれていて，数理的に正しく解釈し判断することが必要であり，未知の問題や見慣れない課題に対して，数学を駆使して決まりきった手順では解決できない問題を結論に導いていくことが要求されている。学校で学ぶ知識や技能の定着のみを評価するのではなく，知識や技能を実世界の様々な場面で活用できるようになっているかどうかを評価することは大切な視点であり，その狙いを達成する授業も必要になっている。

そこで本稿では，数学的リテラシーの育成を図る教材の開発に際して，算数・数学の世界に焦点を当てて，開発した教材を基に授業を実践し検討する。

２．算数・数学の世界を題材にした数学的リテラシーの育成を図る教材の開発

数学的リテラシーとは，「様々な文脈の中で定式化し，数学を適用し，解釈する個人の能力であり，数学的に推論し，数学的な概念・手順・事実・ツールを使って，事象を記述し，説明し，予測する力を含む。これは個人が世界において数学が果たす役割を認識し，建設的で積極的，思慮深い市民に必要な確固たる基礎に基付く判断と決定を下す助けとなるものである」と定義付けられている（国立教育政策研究所，2013)。このような数学的リテラシーの定義に基付けば，数学への積極的な関与に焦点を当てていること，生徒を積極的な問題解決者と捉えていることが分かる。

数学的リテラシーの育成を図る教材を考える際に，現実場面の数学化が挙げられる。すなわち，ある状況の中での問題について，数学的な問題と捉えなおし，数学的な結論を得て，再びある状況の中で解釈しなおすことが必要になる。また，これらの一連の流れは，全国学力・学習状況調査の「活用」の問題の作成の枠組みに示されている「α１：日常的な事象等を数学化すること」，「α３：数学的に解釈することや表現すること」にも関わる。実際に2012年のPISAの調査問題における公開問題を概観すると，例えば「ヒットチャートの問題」ではグラフの読み取りや結果の解釈，「点滴の落下速度に関する問題」では与えら

れた職業的な状況の中における代数的な処理が問われている。数学的リテラシーを育成する教材を開発する上で，このような現実場面からの数学化を意識することは重要である。

また，PISAの数学的リテラシー論について欠かすことのできない論点として，清水（2007）は，「日常生活の場面や社会のさまざまな文脈で数学の知識･技能が使えるかどうかという意味を超えて，個人が数学的な知識・技能を活用して情報を的確に理解して判断を下し，自分のおかれた状況を批判的・反省的に捉える力を含むという特徴を共有している点が重要である」と述べている。加えて，数学的リテラシーの評価の枠組みにおいて，数学が用いられる状況に分類されるもののうち「科学的文脈」には，「数学の授業でよく直面するような数学そのものである『数学内的』文脈も含まれる」（国立教育政策研究所，2013）とある。数学的リテラシーは，現実場面の数学化のみに焦点化されるのではなく，数学世界の中での数学化も考慮されなければならない。これは，全国学力・学習状況調査の「活用」の問題の作成の枠組みにおいても，「β１：問題解決のための構想を立て実践すること」や「β２：結果を評価し改善すること」が実生活や身の回りの事象の考察だけでなく，算数･数学の世界での考察が含まれていることと同様であると考えられる。

したがって，このような観点を踏まえ，日常の場面に限らずに数学の世界も視野に入れて，数学的リテラシーの育成が図られるような教材を提案し，授業を実践する。

３．算数・数学の世界を題材にした数学的リテラシーの育成を図るための教材案とその授業実践

（１）多角形の外角における発展的な考え方

一般に中学校数学では，多角形は凸多角形を前提とし，内角の和や外角の和もその前提を基に考えている。そこで，凹四角形の外角の和を求めようとすると，凹四角形の場合も外角の和が360°になると主張する生徒と，360°ではないと主張する生徒に分かれることが想定される。すなわち，実際の授業場面では，「外角とは何か」という外角の定義が話題になる。既習事項として，「外角＝180°－内角」は学んでいる。凹四角形についても外角の和は360°であると主張する場合は，負の角を認めなければならない。一方で，負の角を認めない場合は，外角の和は360°にならない。加えて，負の角を認めない場合には，凹部分の外角について「外角＝360°－内角」と定義するかどうか，外角の定義そのものを変えるかどうかなどを考える必要性に迫られる。

凹四角形についても外角の和は360°であるという性質を保存するために「負の角」を考えた場合，「既習の数学を基にして，数や図形の性質を見いだし，発展させる活動」を行う展開が期待できる。負の角について疑問を感じる生徒が多いことが予想されるが，数については負の数を導入し概念を拡張させてきた。負の角を認めれば学んできた性質を保存でき，仮に認めないとするならば凹部分の外角を新たに定義し，凹多角形の性質を考察してゆくという考え方もある。これは，生徒が新しい対象に直面し，自ら定義を作ったり定義を拡張したりして，数学を発展させてゆくという考え方を養う機会であり，生徒自らがまさに数学の世界を創る過程でもある。

また小中高接続の観点を踏まえると，負の角を考えた場合には「図形の構成要素としての角（静的）」という見方だけでなく，「回転の大きさを表す量としての角（動的）」という見方をする機会にもなり得る。小学校では前者と後者の両方を学び，中学校では論証指

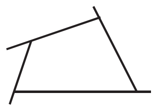
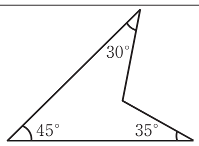
導のために前者を優先する。高校では一般角として正の角，負の角を扱い動的な見方が必要になってくる。仮に中学校数学で動的な見方を設定する場合，この場面がその一つになると考えた。

数学的リテラシーの観点から考えると，既存の知識に当てはまらない事象（外角の和が360°にならない場面）に直面したときに，既習事項である「外角＝180°－内角」や「多角形の外角の和は360°である」を基にして，負の角を導入したり，新たな外角の定義を考えようとしたりして，新たな数学の世界を考察する姿勢が生徒に要求される。これは自分の置かれた状況を批判的・反省的に捉える場面であると考えられる。数学を利用すると一言で述べた場合には，現実場面での利用を想定することが多いが，図形の論証を扱う場面においても，既習の数学の考え方を利用して考察の範囲を広げることによって，数学的な見方や考え方の必要性やよさを実感できるようにすることが大切である。

（2）単元の指導計画と評価計画

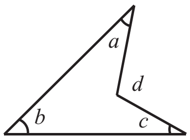
	主な学習活動	主な評価方法
第1時 ～ 第2時	**対頂角の性質，平行線と同位角・錯角の性質** ・対頂角の性質や平行線の性質などを見いだし，根拠を明らかにして自分の言葉で論理的に説明する。	技 観察，発表 知 観察，発表
第3時	**三角形の内角・外角，内角の和・外角の和** ・平行線を使って，三角形の内角の和を考察する。	技 観察，発表 知 観察，発表
第4時 ～ 第5時	**多角形の内角の和，外角の和** ・多角形を三角形に分割するなどの方法を使って，既習の内容に帰着させ，その説明をする。	技 観察，発表 見 観察，発表
第6時 ～ 第7時	**平行線と折れ線の角の性質，凹四角形の角の性質** ・既習事項を基に，多様な方法で角の大きさを求める。 ・図形を動的に捉え，求めた角の式が変化するかどうかを考察する。	技 観察，発表 見 観察，発表
第8時 （本時）	**凹四角形の外角の和** ・多角形の外角の和の認識を深め，数学の見方・考え方を広げる。	関 観察，発表 見 観察，発表
第9時 ～ 第10時	**星形多角形の角の性質** ・既習事項を基に，多様な方法で角の大きさを求める。	技 観察，発表 見 観察，発表

（3）学習指導案および評価規準

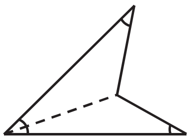
目標	・既習の知識をもとに，多角形の外角の和に関する理解を深める。 ・生徒自らによって，数学の世界を広げる見方や考え方を養えるようにする。	
過程	学習活動	指導上の留意点（■） 評価の観点（□）
導入	・既習事項の確認  ・課題提示 次の図形の内角の和と外角の和を求めなさい。 	T：四角形の内角の和，外角の和は何度ですか。
展開	・問題場面を把握し，内角の和，外角の和を計算する。	

展開

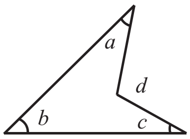
【内角の和】
S：∠d =110°　より，∠d の内側は250°
　よって，30° +45° +35° +250° =360°



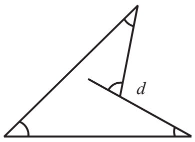
S：２つの三角形に分割できるので，
　360°



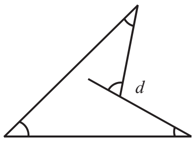
【外角の和】
S：540°
∠d の部分を外角として計算しました。
150° +135° +145° +110° =540°　です



S：500°
∠d の内側に外角を考えました。
150° +135° +145° +70° =500°　です



S：360°
∠d の内側に外角を考えました。
70° のままだと360° にならないので，
－70° で計算しました。
150° +135° +145° －70° =360°　です

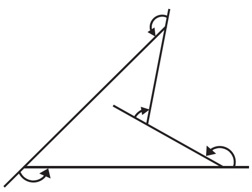


S：430°
凹んだ部分の外角は考えないことにしました。
150° +135° +145° =430°　です。

［∠d の内側を外角と考える場合］
S：360° にならないといけないから，－70° で計算するのが正しい。
S：内角＋外角＝180° であるから，今回は－70° でいいと思います。
S：外角は１つの辺とその隣の辺を延長してできる角なのだから，70° の場所が外角だと思います。

［∠d を外角と考える場合］
S：凹んでいる場合には，外角の和が360° にならないのかもしれない。
S：凹んでいる場合には，（360° －内角）を外角にすればいいのかな。

S：外角の和を考えたときに，それぞれの頂点で外角の分だけ回転するとちょうど一周したことを考えると，70° のところだけ逆向きになると思います。



S：∠x を外角として計算すると，次のようになります。
∠x = 180° －（180° －∠a +180° －∠b +180° －∠c）
　= ∠a +∠b +∠c －360°

■どこが内角でどこが外角か分かるように，図の中に印をつけるようにする。

T：どこを外角と考えましたか。

関　凹四角形の外角について自分なりの考えを基に問題を解決しようとしている。

技　自分の考えを基に，内角の和，外角の和を求めることができる。

■自分と異なる考え方もノートにまとめておくように指示する。

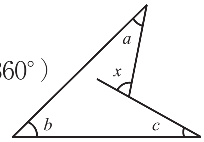
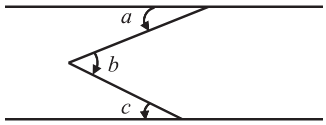
T：∠d や∠d の内側に外角を考えて普通に計算した場合は360° にならず，－70° で計算したら360° になったようですね。結局，どこが外角なのでしょうか。

見　自分の考えや既習を基にして，凹四角形の外角について考察する。

■生徒の反応が乏しい場合は，教科書の外角の定義や
内角＋外角＝180°　であることを確認する。また，各自の考えをノートに書かせる。

T：どのように考えると，マイナスの角でもいいのではないかということになりますか。

T：もし，マイナスの角を認めるとしたら，文字を使った計算ではどのようになりますか。凹四角形の外角の和は360° になるでしょうか。

展 開	よって， $\angle a+\angle b+\angle c+(-\angle x)$ $=\angle a+\angle b+\angle c-(\angle a+\angle b+\angle c-360^\circ)$ $=360^\circ$  S：正負の数？ $\angle a-\angle b+\angle c=0$　より $\angle b=\angle a+\angle c$  S：凹んだ多角形では，外角の定義を別に決める。例えば，凹部分の外角の定義を「360°－内角」とする。 S：凹んだ多角形について，外角の和の公式をつくる。	T：マイナスの角を考えると，うまくいきそうです。今までで，似たような経験はありますか。 T：以前に学んだ平行線と折れ線の角の性質を角の回転で考えてみましょう。 T：マイナスの角を認めないとするならば，どのようにすればよいでしょうか。
まとめ	・負の角を導入すると外角の和は360°であるという関係を保つことができること，負の角を認めないとするならば，新たに外角を定義しなおす必要があることを確認する。	

観点 評価	関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
単元の評価規準	・平行線と角および多角形の角の性質や関係を見いだし，問題の解決のために活用して考えたり判断したりしようとしている。	・平行線と角および多角形の角の性質についての知識・技能を活用して，事象について数学的推論を用いて表現したり考察したりする。	・平行線と角及び多角形の角の性質について，数学の用語や記号を用いて簡潔に表現する。	・平行線と角および多角形の角の性質について理解している。
本時の学習活動に即した評価規準	・課題場面の角の関係に関心を持ち，既習の知識と関連付けて，外角の和を考察しようとしている。	・課題場面の角の関係を予想し，それが正しいかどうかを既習の知識と関連付けたり，数学的推論を用いて説明したりする。	・課題場面の角の関係を考察する過程で，数学の記号や用語を用いて正しく簡潔に表現する。	・既習の角の性質，多角形の内角と外角，および外角の和について理解している。

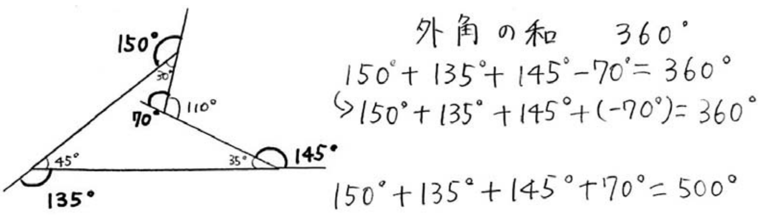
（4）授業の概要

実際の授業では，指導案と同様に凸四角形の内角の和と外角の和を確認した後に，凹四角形の内角の和と外角の和を求める課題を扱った。凹四角形の内角の和については，凹四角形を二つの三角形に分割する方法，凹四角形の角の性質を利用する方法によって，360° であることを確認した。

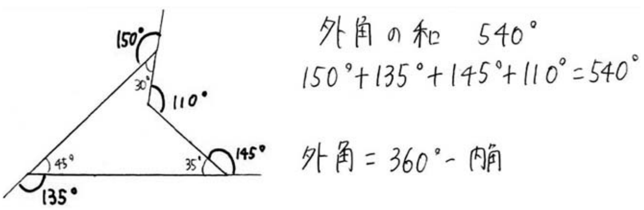
凹四角形の外角の和については，次のような方法で求めていた。

・外角の和を360° としたもの
「（凹部分の外角）＝180° －内角」と捉え，負の角を認めて計算している。

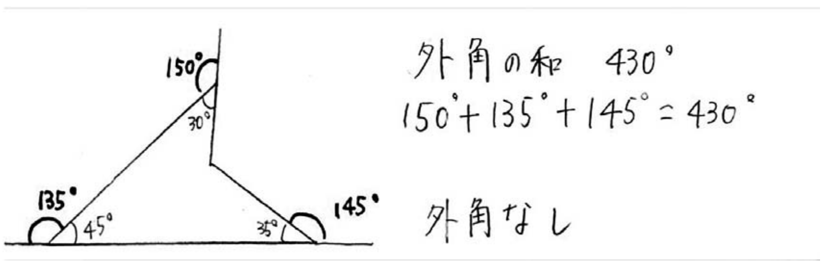
・外角の和を500° としたもの
「（凹部分の外角）＝180° －内角」と捉え，負の角を認めずに計算している。



・外角の和を540° としたもの
「（凹部分の外角）＝360° －内角」ととらえ，計算している。



・外角の和を430° としたもの
「凹部分の外角は考えない」ととらえ，他の凸部分の外角の和を計算している。



多くの生徒が外角の和が360° になるように計算しており，負の角を認めているようであった。－70° にしてよい理由としては，「（凹部分の外角）＝180° －内角」としてとらえたときに，180° －250° ＝ －70° として考えればよいこと，また，凸多角形の外角の和を考えた時と同様に，角の回転を考えれば，凹部分の外角の場所のみ反対回りになることが挙げられた。－70° になる理由をうまく説明できない生徒もいたが，凸多角形の外角の和が360° であることは既習であったので，その360° を保存したいというのが生徒の素直な

思いだったようである。

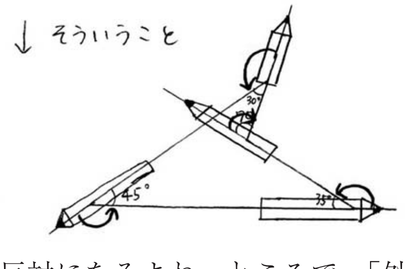
なお，授業の最後は，次の２つのどちらでもよいのではないかということを教師側から提示して終了した。

・外角の定義としては360°が保たれるように「（凹部分の外角）＝180°－内角」と捉えて負の角を認める
・「（凹部分の外角）＝360°－外角」と捉えて外角の和について新しい定理をつくっていく

４．考察

先述のように，凹部分の外角については，代表生徒によって４通りの考え方が出されたが，実際は凹四角形の外角の和を360°として計算している生徒が多かった。これは，凸多角形の外角の和が360°であることが既習であるために，その性質を保存したいという思いがあったためであると思われる。一方で，凹四角形の外角の和を360°と計算するためには，負の角を認める必要があるが，最初のうちはとにかく－70°でなければならないという思いのみであったが，角の向きを考えることによって負の角を認めるようになった。

S 12：外角は「180°－内角」ということでいいじゃないですか。それはもう分かっているわけで。内角のときに出したように凹んだところは250°。180°－250°をすると－70°になるのでそのまま－70°で計算するわけです。
T：70°なので－70°にするの？
S 12：そことしては70°ですけど，計算上は－70°で計算するんです。
T：ほかに。S 8。
S 8：鉛筆とかを使ってくるくる回すと，戻るんですよ。135°のところから反時計に回すと，70°のところで戻ることになるから。（手で回すしぐさをする。）
T：そういうことね。回すのは反時計回り。70°でまわるときは時計回りになって70°戻るから引くと。



T：∠bだけ，回すと反対になるよね。ところで，「外角＝360°－内角」なんだけど，これでも別に私は良いと思うんだけど。
S 12：線が引いてあるので，外角のことを考えているからよい。しかし，四角形の外角の和は360°であるという黄金比を崩してしまうことになる。

S12の発言にあるように，「外角＝180°－内角」に当てはめて計算すれば，－70°という値は出る。加えて，外角の和は360°であるという世界を保存したいと考えると，－70°とすれば計算結果が360°となり都合がよい。その意味でも－70°としてよいのではないかと

いう考えであった。しかしながら，実際に図として存在している角は70°であり，70°なのか−70°なのか区別はつかない。70°であるけれども−70°としてよいという説明が，生徒にとっては困難であった。

一方で，角の回転を考えることによって負の角を認めることは生徒にとっては，自然に受け入れられたように判断できる。外角の和が360° になる操作的な例として，鉛筆を回して考えればよいということは生徒にとって既習事項であった。したがって，同様に考えたとき，S８の発言のように鉛筆を回せば，凹部分の外角が凸部分の外角と反対方向に回ると考えて，すなわち「向き」を考慮して，70°ではなく−70°とすればよいと考えたわけである。

このように，既習の知識を基に外角の和は360°になるだろうと予想し，課題に取り組み，自分なりの考えを基に計算すると360°にならないという結果になった。その際，既習事項である「多角形の外角の和は360°である」を振り返り，外角に対して「負の角」を考えれば，今までの形式を普遍に保つことができるという理解が得られたのではないかと考えられる。また，「負の角」を認める方法として，既習である操作的な例を基に説明され，生徒にとっては納得のいくものであった。角について「図形の構成要素としての角（静的）」という見方だけでなく，「回転の大きさを表す量としての角（動的）」という見方をする契機となったのではないかと思われる。

引用・参考文献

国立教育政策研究所（編）（2013）．生きるための知識と技能５：OECD生徒の学習到達度調査（PISA）2012年調査国際結果報告書．明石書店.

清水美憲（2007）．数学的リテラシー論が提起する数学教育の新しい展望：国際的視野から見た新時代の数学教育．小寺隆幸・清水美憲（編）．世界をひらく数学的リテラシー（pp. 244−263）．明石書店.

文部科学省・国立教育政策研究所（2015）．平成27年度全国学力・学習状況調査報告書中学校数学.

太田伸也（1995）．生徒に幾何の世界を構成させる図形指導：ディベート「凹四角形の外角の和は360°である」を取り入れて．日本数学教育学会誌,77（5）,pp. 11−19.

8　つかみ取りゲームを題材とした授業実践
ー身近な事象を統計的に考察する活動を通してー

練馬区立三原台中学校　主幹教諭　石綿　健一郎

1．はじめに

平成24年度より施行された中学校学習指導要領では，新たな領域としてD領域「資料の活用」が設けられた。「ビッグデータ時代」と言われるように，多様な情報にあふれるこれからの社会を担う子どもたちを育成する上で，統計的な内容の学習はますます重視されるべきものとなっている。情報を正しく理解し，批判的に評価する能力を培うためには，与えられたデータを整理して表やグラフに表す手法を学ぶだけでなく，身近な事象に関する課題を解決するために，自らデータを収集分析し，その結果に基づいて意思決定や判断をするという数学的活動を行うことが重要である。

学習指導要領において数学的活動は，基本的に問題解決の形で行われるとされている。疑問の発生，定式化した問題設定，問題の理解，解決の計画，実行，検討及び新たな疑問や問い，推測の発生と続き，それら一連の活動を実体験することにより，数学の必要性や有用性を実感する機会がもたらされると説明されている（文部科学省，2008）。それらを踏まえ，統計的な考え方や確率の考え方を活かすことができる数学的活動を取り入れた教材を開発した。

2．本実践の意図

日常生活の中で，不確定な事象に出会ったとき，漠然とした印象や個人の経験で判断をしてしまうことが多い。より客観的な判断をするためには，データを集めたり，傾向を調べたりする必要がある。また，他者に自分の判断を説明する場合においては，データを示すことでより説得力を持つようになる。

本研究では，「データを根拠に判断する力」，「日常事象を統計的に考察する力」，「情報を正しく伝える力」の３つを視点に統計的リテラシーの育成を図る教材を開発した。生徒にデータを収集する必要性に気付かせ，データを根拠にして判断する力を育成するためには，不確実性を持った課題に意図的に取り組ませることが有効である。また，現実場面の課題を解決する教材に取り組ませることで，日常事象を統計的に判断する力が育成される。活動ではグループ活動を行う。話し合う活動を取り入れ，統計的な内容を互いに伝え合うことで，情報を正しく伝える力が高まると考えた。データを技能的に処理することにとどまらず，結果をもとに判断をすることを重視した教材を開発した。

3．課題について

（1）日常場面から

お祭りやイベントなどで，「お菓子のつかみ取り」や「10円玉のつかみ取り」など「つかみ取りゲーム」が行われることがある。あるイベントではキャンディーのつかみ取りを行っていた。１回100円である。何個つかめれば，元が取れるのだろう。誰もが少なからず

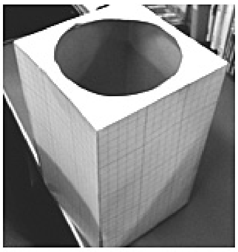
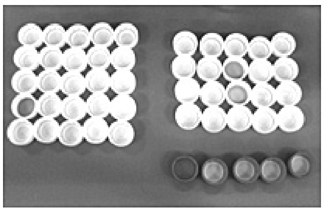
疑問を抱いたことがあるのではないだろうか。また，あるイベント用品販売店では，キャンディーつかみ取りセット（キャンディー約1500個）を約10000円で販売していた。１回いくらでつかみ取りを行うのが適切だろうか。自分が客側（つかみ取りをする側）であれば，いかに多く取るかだけを考えていれば良いが，店側（つかみ取りをさせる側）の立場で考えると話はそう単純ではない。損をしないためには，一人の客の結果だけでなく，多くの客の結果をあらかじめ予測しておく必要がある。客側から店側へと視点を変えることで，傾向を調べる必要性に気付かせることができると考えた。

結果を予測するためには，実際に試してみたりデータを収集して傾向を調べたりする必要が生じてくる。「つかみ取りゲーム」は生徒にとっても身近な事象であり，不確実性を持った題材である。本実践では「つかみ取りゲーム」を主催する立場（店側の立場）で賞金設定を行うことを課題として扱う授業を開発した。

（２）教材化

授業ではペットボトルキャップを教材として用い，つかみ取りゲームを設定した。キャンディの代わりに箱の中に入ったペットボトルキャップを出来るだけ多くつかむことにした。生徒配布用に箱の中にあらかじめ50個（そのうち45個は無地（白），５個は色付き）のキャップを入れたものを準備した。

色つきのキャップを混ぜておくことで，これを「当たり」（あるいは，「はずれ」）とみたてる生徒もあるのではないかと考えた。色つきのキャップを混ぜることで，確率的に判断をする考え方が引き出される事を期待している。


（３）課題の内容

課題の内容は，「ペットボトルキャップつかみ取りゲーム」を企画する事である。つかみ取りゲームは，つかんだ数に応じて賞金を出すことにし，グループごとに賞金をどのように出すかを話し合うことにする。話し合い活動を取り入れることで，他者に自分の考えを説明をする場面を設定した。他者に説明をする必要性に迫られることで，漠然とした印象で答えるだけでなく，より説得力のある説明，判断の拠り所としてのデータの重要性に気付くのではないかと考えた。また，設定をした賞金やゲームルールをプレゼンテーションの形で発表をさせることにした。

４．単元について

（１）単元の内容

①単元名

中学校第３学年　数学科　「課題学習」

②単元の目標

日常の事象における課題を生徒が主体的に解決していくことを通して，数学的な見方や考え方や統計的なリテラシーを育み，日常生活に数学を活用しようという態度を養うこと。

③単元（題材）の評価規準

ア　関心・意欲・態度	イ　思考・判断・表現	ウ　技能	エ　知識・理解
○事象について傾向を進んで調べようとしている。 ◎既習の内容である資料の活用や確率の知識を活かそうとしている。	○事象の傾向について考えたことを表現している。 ◎事象の傾向について，収集した資料を根拠に表現している。	①資料を収集することができる。 ②資料を収集し，分析することができる。	①資料を収集する必要性を理解している。 ②確率や平均値などを理解している。

（２）年間指導計画における位置付け

本単元（題材）の学習を行うに当たっては，統計的なデータ処理や統計的確率の知識があると，より考えを深めることができる。よって，学習指導要領における領域「D資料の活用」の１年次内容「資料の活用」と２年次内容「確率」が既習である３学年で指導を行うことが望ましい。また，３学年の学習内容である「標本調査」を学習した後に設定し，より多面的に考察を行うことも考えられる。今回は，標本調査が未習である段階での指導を計画した。

（３）指導に当たって

本授業では，意見を発表しやすいように５～６人でのグループ活動を取り入れた。また，誰もが簡単に実験を行えるものを題材とすることで，既習事項の習熟度にかかわらず，積極的に授業に参加出来るようにしている。また，意見を発表する際には，根拠を明確に述べるように指導した。

５．実践の概要

（１）授業の目標

・課題を解決するために，事象を数学的に考察しようとすること
・データや確率など，根拠を持って説明をすること

（２）展開

時間	○学習内容　・学習活動	指導上の留意点	評価規準
導入 10分	○本時の内容を知る ・代表生徒がつかみ取りの実演をする	・本時の課題を提示する	
	班ごとに「ペットボトルキャップつかみ取りゲーム」の企画をしよう		
	○ルールを確認する ・ゲーム代・回数・目的などの共通ルールを知る	·ゲーム代100円，回数30回，収支±０になるようにする	
	○グループ活動をする ・いくつ入っているかを調べる	・５～６人のグループに分ける	事象について傾向を調べようとしているか

展開 （前 半） 20分	・実際に取り出してみる 〇賞金設定や競技ルールを話し合う ・取った個数で賞金を決める ・色別に賞金を決める ・中を見てよいかどうか決める 〇プレゼンテーションの発表者を決める ・グループで話し合い発表者を決める	・机間指導・助言 生徒の発想を大事にする ルール設定の根拠を確認させる	【関心・意欲・態度】 資料を収集することができたか【技能】 既習の知識を活用しているか【知識・理解】
展開 （後 半） 15分	〇発表をする ・グループごとに代表者が発表をする ・賞金設定とルールを発表する ・発表を聞く	・発表時間は１分程度とする ・他のグループの良い点を互いに学び合えるように助言する	資料や確率の考え方を根拠に説明しようとしているか【思考･判断･表現】
まと め ５分	〇相互評価を行う ・グループ活動を振り返り，相互評価を行う ・本時の活動を振り返る	・本時で活用した数学の内容を振り返る	

（３）授業の様子

①生徒の活動

ペットボトルキャップ入りの箱を渡された生徒たちが行った活動は大きく二つあった。一つは中に入っているものの確認である。中に入ったペットボトルキャップをすべて取り出し，個数を調べた。これは，２学年で学習した確率を求める際の場合の数を調べることに相当する。

もう一つは，実際につかみ取りを行ってどれくらい取り出せるかを調べることである。これについては，１学年で学習した資料の活用の傾向を調べることに相当する。この二つの活動は，どちらを先に行うかの違いはあったが，すべてのグループが行っていた。このことから，生徒は不確実性を持った課題に取り組むにあたって，事象を統計的に考察して解決しようと考えることが分かった。

②箱の中身を調べる

箱の中を調べた生徒は白キャップが45個，色つきキャップが５個入っていることに気が付いた。「色の違いによって賞金を変えてもよいか」と質問があり，自由に設定してよいことを伝えると，色つきキャップを取り出す確率を考える様子があった。

色つきキャップの賞金設定では，プラスの賞金を設定するグループもあれば，マイナス

の賞金を設定するグループもあった。いずれにおいても，起こりにくい事柄を特別のこととして扱う様子が見られた。また，色つきキャップの賞金設定を利用して収支を±０にするための調整をしようとする様子があった。

③実際に取り出してみる

多くのグループが時間をかけて取り組んだのが，実際に取り出してみることである。グループのメンバーそれぞれが複数回ずつ取り出し，傾向を調べる様子があった。平均を算出し，賞金設定に活用しようというグループが多数を占めたが，最頻値を利用したり，最大値を考えたりするグループもいくつかあった。このように，取り出した量について多いか少ないかなど印象だけで判断することなく，数値で評価していくことは，情報を正しく伝える力を育むことにつながっていると考えられる。また，実際に取り出して傾向を調べた結果，男女で取り出す数に違いが認められることから，男女別に賞金を設定することを考えるグループも見られた。一方で，実際に取り出し，その中に色キャップが含まれる割合を調べるグループもあった。これらのことから，不確実性を持った日常場面の課題を解決するために，生徒はデータを根拠に考察し，判断しようとすることが分かった。

④各グループの活動の様子と賞金設定

グループ	活動の様子	賞金設定
Aグループ	平均を調べる。24回抽出平均11。	15個で300円，20個で＋500円。
Bグループ	白と青が出る割合を調べ，比や連立方程式を使って解く。	時間が足りず賞金設定は出来なかった。
Dグループ	平均を調べる。平均13。	６個で50円。11個で75円。17個で125円。
Eグループ	平均を調べる。平均10。青が出る確率を求める。	白1個10円　青　男子 −30円　女子−10円
Fグループ	最頻値を調べる。最頻値11。	１個８円

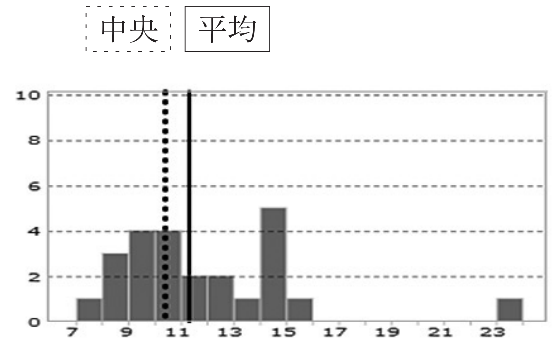
（4）実際のデータから

生徒が実際に取ったデータ（24回）　　（　）内は取ったキャップの内，色キャップの数

男子A	9（1）	7（3）	14（0）	14（1）
男子B	23（3）	12（1）	12（3）	14（3）
男子C	14（1）	8（1）	15（3）	10（1）
女子A	10（0）	14（1）	8（3）	11（1）
女子B	13（2）	10（3）	9（1）	9（2）
女子C	11（1）	8（0）	9（2）	10（2）

平均値　11.4　中央値　10.5　最頻値　14　最大値　23　最小値　7

色キャップ　平均値1.6　　色キャップの割合　0.14　（数学的確率では0.1）



6．考察

活動の様子から，生徒は不確定な事象を判断するためには，データを収集して傾向を調べたり，確率を考えたりすることが有効であることを理解していることが分かった。日常事象に関わる不確実性をもった課題に意図的に取り組ませることで，生徒の統計的リテラシーを効果的にひきだし，高めることができることも示された。また，既習事項ではないが，男女に分けて賞金を設定するなど，層別に考える必要性を発想することも一部ではできていた。

一方で，理解度が進んでいない点も明らかになった。例えば，色つきのキャップが出る確率については，数学的確率として求めることができるが，これを統計的に求めようとするグループが多くあった。数学的確率として求めることと，統計的に求めることの違いを生徒が十分に認識できていないと考えられる。また，傾向を調べるうえで，どの程度のデータ収集が必要となるかについても認識が不足している。あるグループでは，１人あたり１回ずつの試行で傾向を判断しようとする様子があった。調べたい事柄に対してどの程度のサンプルサイズが必要となるかという視点も持たなければならない。

今回の実践では，ほとんどのグループが平均値を代表値として選んだ。ゲームの内容からしても平均値を代表値として選ぶことは適切と考えて良い。しかし，初めから平均値のみを考えるグループがほとんどで，最頻値や中央値など他の統計量と比較するグループは少なかった。傾向を的確に読み取ることだけでなく。様々な方法からより適切なものは何

かを考えさせるようにすることも重要である。

また，1つの課題の中で複数の考え方ができるよう自由度を高く設定をしたが，かえってそのことで生徒の考え方の方向性が定まらなかったことが，反省点の一つである。例えば，前述の生徒が実際に取ったデータからは下記の例に挙げたような賞金設定を行うこともできるが，最後の賞金設定の段階では，多くのグループや生徒が感覚的に決定してしまう様子があった。

【賞金設定の例】

平均値から・・・100÷11．4＝8．77・・・　　1個当たり10円とし，色は－10円とする。

上の結果を賞金に換算

収入　2400円　（24回）

男子A	80	40	140	130
男子B	200	110	80	110
男子C	130	70	120	90
女子A	100	130	50	100
女子B	110	70	80	70
女子C	100	80	70	80

支出　2350円
＋50円

これらのことから生徒は，不確定な事象を考察するために，データを収集することや傾向を分析することの重要性には気付いているが，集めたデータを活用するという点で課題があることが分かった。

7．改訂授業案

上記の考察と反省点を踏まえて改訂授業案を作成した。改訂指導案は，実践内容の前段階の授業として計画している。自由度を高くしたことにより，方向性が定まらなかった点を改善し，より基本的な内容に取り組ませることによって基礎的な考え方を習得し，本実践を応用段階として位置付け，より高い段階での統計的リテラシーの育成を目指したい。

（変更点）

・１色のみでおこなう。

・100個のキャップを準備し，非復元抽出で行う。

・キャップ１個あたりの原価を５円とする。

・１回のゲーム代として適切な金額を検討する。

上記のように変更をすることで，自由度は下がるが，方向性を定めやすくなると考えた。また，「キャンディーのつかみ取りゲーム」などにみられるように，実際の「つかみ取りゲーム」の多くは，非復元抽出である。非復元抽出で行うことによって，より日常事象に近付けることができる。同時に，自動的にゲーム回数に制限がかかるため，方針を立てやすくなる。また，キャップの原価を設定し，賞金ではなくゲーム代を設定することを課題にした。キャップの原価を設定することで，ゲーム代を設定するうえでの手がかりが明確になると考えた。

指導案

時間	○学習内容　・学習活動	指導上の留意点	評価規準
導入 10分	○本時の内容を知る	・本時の課題を提示する	
	1個5円のペットボトルキャップのつかみ取りを行います。全部で100個あるとき，1回のゲーム代として適切な金額を考えよう		
	・何を調べればよいかを考える 1回でどれくらいとれるか調べる 実際にやって試してみる	・個人で考えさせ発表させる	傾向を調べる必要性に気付いたか【思考・判断・表現】
展開（前半） 20分	平均を調べる 何回くらいできるか調べる ○グループ活動をする ・実際に取り出してみる ・平均を調べる ○ゲーム代を話し合う ・平均から考える ・ゲーム回数から考える ・最後に1，2個余った場合はどうするか ○プレゼンテーションの発表者を決める ・グループで話し合い発表者を決める	・5～6人のグループに分ける ・机間指導・助言 ・ゲーム代設定の根拠を明確にさせる	事象について傾向を調べようとしているか【関心・意欲・態度】 資料を収集することができたか【技能】 既習の知識を活用しているか【知識・理解】
展開（後半） 15分	○発表をする ・グループごとに代表者が発表をする ・ゲーム代を発表する ・発表を聞く	・発表時間は1分程度とする ・設定の根拠を必ず説明させるようにする ・他のグループの良い点を互いに学び合えるように助言する	資料や確率の考え方を根拠に説明しようとしているか【思考･判断･表現】
まとめ 5分	○相互評価を行う ・グループ活動を振り返り，相互評価を行う ・本時の活動を振り返る	・本時で活用した数学の内容を振り返る	

8．おわりに

本実践では，「データを根拠にして判断する力」，「日常事象を統計的に考察する力」，「情報を正しく伝える力」の3つの視点に立って教材を開発した。実践を通して，日常場面を題材とした，不確実性を持った課題に取り組ませることによって，生徒は自発的に，データを収集する必要性に気付いたり，収集したデータを根拠に判断したりするようになることが分かった。また，実際に取り出してみたり，確かめたりする活動を行うことで，生徒の統計的リテラシーを効果的にひきだし，高めることができることも示された。今後は，改訂指導案を再検討するとともに，新しい教材開発にも努め，生徒の統計的リテラシーを育成する方法を考えていきたい。

引用・参考文献

文部科学省（2008）．中学校学習指導要領解説数学編，教育出版．
清水美憲（2006）．国際機関によって提示された「数学的リテラシー」の概念規定
清水美憲（2007）．OECD/PISAにおける数学的リテラシー評価問題の特徴

9　高等学校数学科における数学的リテラシーの育成に関する教材開発
―統計的分析に基づく判断を求める教材の実践的検討―

東京学芸大学附属高等学校教諭　花園　隼人

1　はじめに

高等学校数学科では，数学的リテラシーに代表されるような数学の知識・技能を活用して課題を解決するための思考力，判断力，表現力等の育成が期待されている。現行の学習指導要領では思考力・判断力・表現力の育成の観点から「事象を数学的に考察し表現する能力」（文部科学省，2009）を高めることが目標に定められている。また，「育成すべき資質・能力を踏まえた教育目標・内容と評価の在り方に関する検討会」では育成すべき資質・能力として知識・技能を「活用する思考力・判断力・表現力の育成が不可欠との前提に立ち」（文部科学省，2014）と述べられ，今後もこの方向性について一層の充実が求められることが示された。後期中等学校（高校など）への進学率が98%を超えた現在の日本において，「高等学校で数学を学ぶことにより，義務教育段階で学習する知識や技能を日常生活や社会生活で一層活用できるようになることは言うまでもない。」（文部科学省，2009, pp. 4 － 5）と述べられているように，高等学校における教育には一層の期待がかけられている。

数学的リテラシーという観点から高等学校数学科の教科内容を見直す際，単元「データの分析」が注目される。この単元は中学校数学科における「資料の活用」領域から直接的に接続される単元であるが，「資料の活用」領域では「整理した結果を用いて考えたり判断したりすることの指導を重視する」（文部科学省，2008，p. 49）ことが求められており，この領域の発展としての単元「データの分析」においても同様な指導が重視されている。実際，単元名に含まれる「データ」という用語については，「中学校では『資料』として表していたが，高等学校では生活の中で活用することや統計学とのつながりを一層重視し，一般的に用いられる『データ』という用語を用いることにした。」（文部科学省，2009, p. 25）と説明されており，中学校以上に「生活の中で活用すること」などが重視されていることがうかがえる。このような統計領域に関する教科内容の位置付けは，清水（2007）による「今日社会における成人に必要な数学的リテラシーについての焦点の１つは，統計領域に関連するものである。」（p. 246）という提案とも整合するものであり，中学校及び高等学校の双方における着目を鑑みると，中等教育段階を一貫する軸となる領域であるともいえる。

中等教育段階における統計領域に関連する数学的リテラシーの育成に関する教材や指導事例については，中学校段階では新井（2011）や西村（2010）の提案に代表されるように積み上げがなされてきたが，高等学校段階においてはまだ十分になされていない。

本稿では，高等学校数学科の『データの分析』において数学的リテラシーの育成を図る教材を開発し，実践的検討によって有効性を検討する。

2　高等学校数学科における数学的リテラシーの育成を図る教材の開発

（1）教材開発の視点と素材

①　教材開発の視点：OECD/PISAにおける数学的リテラシーの枠組み

本稿では数学的リテラシーを捉える枠組みとして，OECDによる「生徒の学習到達度国際調査」（以下，OECD/PISAと略記）で用いられた枠組みを援用する。OECD/PISAは，数学的リテラシーという概念が関心を集めるに当たって，与えてきた影響力の大きさが指摘されている（清水，2007，p. 244）。OECD/PISAでは数学的リテラシーの枠組みを特徴付ける3つの側面として「数学的プロセス」，「数学的な内容」，「数学が用いられる状況」を挙げている。第一の「数学的プロセス」は「生徒が数学的な内容に取り組むのに必要な技能のまとまり」（国立教育政策研究所，2013，p. 86）と定義され，「定式化」，「適用」，「解釈」の3つのプロセスとして説明されている。第二の「数学的な内容」は「実生活で見られるような数学的概念のまとまり」（国立教育政策研究所，2013，p. 87）と定義され，「変化と関係」，「空間と形」，「量」，「不確実性とデータ」の4領域が定められている。第三の「数学が用いられる状況」は「実生活で生徒が遭遇するような状況」（国立教育政策研究所，2013，p. 88）と定義され，「私的」，「職業的」，「社会的」，「科学的」の4つに分類されている。以下ではこれらを枠組みとして，素材を分析して教材開発を行う。

②　教材開発の素材：「登下校マナーの改善」

東京都内のある国立大学附属高等学校では，最寄駅から通学する際に住宅街を通ることが不可避であるため，近隣の地域の方々に迷惑をかけない登下校マナーの涵養が毎年の教育課題となっている。同校では全校集会，学年集会，ホームルーム活動など様々な場面で登下校マナーについて触れ，マナーの涵養を目指している。また，ホームルーム委員会ではこの件に関する係が常設され，年度当初や学校行事の際にはホームルーム委員による下校整理も行われている。これらの取り組みによる成果は見られるものの，十分な成果が得られているとは言いがたい状況がある。

このような状況に対する問題意識は，個人差はあるものの在校生の間でも共有できていると考えられる。そこで，本稿ではこの素材を元に教材を開発する。

（2）教材開発

①　数学が用いられる状況：私的または社会的

上記の「素材」は，「生徒の日々の活動に直接関係する文脈」（国立教育政策研究所，2013，p. 88）として「私的」であり，かつ「生徒が生活する地域社会における文脈」（国立教育政策研究所，2013，p. 88）として「社会的」であるとも言える。

②　数学的な内容

この側面は，どのようにこの問題場面を定式化するかによって異なる。例えば，問題の所在を通学路の空間的構造に位置付けた場合，「空間と形」の領域と考えることができる。本稿では統計領域に関連する「不確実性とデータ」の領域の問題として教材開発を目指すため，生徒に与える課題とその文脈を工夫する。具体的には，統計を用いた問題解決の事例としてジョン・スノウ（1813－1858）によるコレラの伝染に関する調査研究を紹介する。ジョン・スノウによる研究は大流行したコレラの拡大を防ぐためのもので，「思い込み」による対策が功をなさない中，データに基づいて問題を把握して対策を提案したものである。このように問題の把握をデータに基づいて行うことを課題とすることによって，数学的リ

テラシーの「数学的な内容」の側面が「不確実性とデータ」の領域になるようにする。すなわち，生徒に与えた課題は，「実際のデータに基づいて登下校マナーの問題点を把握し，その結果に基づいて対策を提案すること」である。なお，授業時数の関係上，提案した対策を実施して統計的に評価する考察は行わなかった。

③　数学的プロセス

上記②で述べたように，生徒に与えた課題は「実際のデータに基づいて登下校マナーの問題点を把握し，その結果に基づいて対策を提案すること」であるが，データを収集するにあたっては，その変数を自ら定める必要がある。すなわち，「与えられた状況を理解し，それを数学的に処理しやすい形に変えること」（国立教育政策研究所，2013，p. 86）である「定式化」がプロセスとして含まれている。例えば，「マナーの悪さ」を「横方向へ広がる人数」と定式化することなどが考えられる。また，課題では把握した問題に対して対策を提案することまで求められていることから，変数の代表値を計算したり変数間の関係を調べたりといった「適用」のプロセスを経て数学的な結果を獲得し，「問題の文脈の中でそれらを解釈すること」（国立教育政策研究所，2013，p. 86）である「解釈」のプロセスが必要になる。すなわち，本課題はOECD/PISAにおける数学的プロセスの全段階を含むものである。

（3）期待される生徒の反応

この課題に対して期待される生徒の反応は，データの分析を視野に入れて問題の定式化を行うことである。初回授業時には中学校までの統計領域に関する知識しかないと考えられるが，単元の後半では数学Ⅰで初めて扱う四分位範囲や標準偏差，相関や交絡，外れ値と考えられる値の扱いについても学習済みになる。これらの指標を生かした分析を行うこと，その分析に向けた定式化を行うことが期待される。また，後述のように授業ではPPDACサイクルについての説明を行う為，自身の問題解決プロセスをメタ認知して反省できることも期待される。

3　授業実践の概略

授業は前出の東京都内の国立大学附属高等学校において，10月末から12月初頭までの約１か月間で実施した。初回の授業では登下校マナーについての問題の提起を行い，ジョン・スノウの調査研究の概要を説明した上で，課題を提示した。以降の期間は二分して，授業実践を行った。

前半の期間は単元における数学的概念や手法を，主に教科書（高橋ほか，2011）を用いて指導した。また，統計的問題解決プロセスの例としてPPDACサイクルについて説明した。単元全体を網羅することを考えると，この前半の授業時間数は決して多くはないが，代表値のように中学校における学習内容と重複が見られる箇所があることや，授業で用いた教科書に記載された具体的な事例を用いて直観的な理解を助けることによって，時間的余裕を捻出した。この前半の学習過程ではグラフ電卓やPCといったICTを用いることも学習内容に位置付けたが，同教科書にはこれらの利用方法も記載されていたことが有益であった。

後半の期間は生徒による調査研究の時間に割り当てた。調査に当たっては実施計画を作成・提出することを求め，この調査はグループによる実施を認めた。ただし，考察につい

ては個人で行う事を求めた。グループによる調査を認めた理由は，定式化された変数によっては個人調査では人手不足が想定できた事や，アンケート調査などを行う場合にはアンケートの種類が膨大になる事を防げると考えたためである。また，考察を個人で行う事を求めた理由は，個人の思考を評価するためである。考察の結果はレポートにまとめ，期末考査までに提出する事を求めた。レポートの作成にあたっては，前半の授業で説明したPPDACサイクルを意識させ，レポートに明記させることにした。

4　実践結果の概要

生徒１クラス44名分のレポート内容を，データが集められた変数及び把握した問題と対策を観点としてまとめると次の**表１**のようになる。生徒の考察のうち前述の「期待される反応」に示した新たな学習内容を生かした定式化をしているものについては，表の一番右の列に〇印を付記している。また，自身の問題解決プロセスをメタ認知しているものについてはMを付記した。

表１　結果概要

No.	変数	把握した問題／対策	
1	下校マナーについての意識，横並びの人数，	きちんと歩けているという意識の割に，広がって歩く人が多い。／自分たちを客観視することが必要。	M
2	２地点の通過人数と白線を出ていた人数	通過人数が多いことと白線を出る人数が多いことは必ずしも関係がない。／白線を出て歩きがちな場所があるので，その位置での呼びかけが必要。	〇 M
3	２地点の通過人数と白線を出ていた人数	通過人数が多い時間に白線を出る人数が多い。／最終下校時刻を部活動などの団体ごとに分ける。	〇 M
4	同時に歩く人数，横並びの人数，白線を出ていた人数	多人数での下校や横に広がった下校の際に白線をはみ出るが，２列でもはみ出ている。／少人数で２列下校が大切だが，白線を出ない意識が同時に大切。	M
5	一緒に帰る人数，下校の所要時間，自己中心度	自己中心的な生徒ほど白線をはみ出る。／帰り道はダラダラ話をせずにさっさと帰る。	〇 M
6	２地点の通過人数と白線を出ていた人数	通過人数が多いことと白線を出る人数が多いことは必ずしも関係がない。／下校状況をチェックして罰則を与える。	〇 M
7	歩きにくいと感じる場所，道幅，下校時に行っていること，下校時の隊形	実際の道幅だけでなく道が狭いという圧迫感が広がって下校することにつながっている。／感覚の真相をつかむ。	M
8	鞄の大きさと持ち方	肩掛け鞄は幅が広がりかつ子どもにぶつかり得る。／鞄をリュック型にする。	M
9	登下校についての当事者意識	当事者意識や学校への帰属感が希薄であること。／意識を改める。	〇 M
10	同時に歩く人数，横並びの人数，白線を出ていた人数	下校時の人数が増えると白線外を歩く人数も増えやすい。少人数の奇数人で歩くと白線外の人数が増えやすい。／偶数人で下校し２列になりやすくする。道の左右どちらを歩くか決める。	〇
11	下校マナーが悪い場所や道幅が狭いと感じる場所についての意識	道幅に関係なく白線をはみ出して歩いている。／２列歩行の徹底。	〇 M
12	同時に歩く人数，横並びの人数，白線を出ていた人数	下校時刻の集中が大人数での下校をまねき，横に広がっての歩行や白線の外での歩行につながっている。／下校時刻をずらす，HR委員による下校整理で白線の内側を歩かせるといった方策を併用する。	〇

13	２地点の通過人数と白線を出ていた人数	一定時間に通る人数の多さよりも，一度に集まって帰る方が白線の外を歩き易い。狭い道では横に広がりやすい。／少人数ごとに下校させる。狭い道で重点的に下校整理をする。	○
14	一緒に帰る人数，下校の所要時間，自己中心度	自己中心的な人が駅まで長い時間をかけて歩き，白線を意識していない。／生徒の意識改革が必要。	○
15	同時に歩く人数，最大の横並びの人数，白線を出ていた人数	１人２人が白線を越えても問題なく，歩く場所には関係ない。大声で話しているのが問題。／（対策なし）	○
16	登下校方法，一緒に帰る人数，マナーに対する意識，マナーの悪さに対する意識，校門前を通る人数	マナーが悪い基準がバラバラ。意識していても行動に移せない。／マナーの定義と共通認識が必要。	M
17	「買い食い値」と部活動の活動時間	（問題の定式化及び対策はなし）	○ M
18	（データなし）	（経験からの提案のみ）	
19	一緒に帰る人数とその構成，駅までの所要時間	最終下校時刻に下校集団が集中する。／強制的に分散させる。下校時刻に幅をもたせる。	M
20	登下校についての当事者意識	「自分は」迷惑をかけていないと思っている生徒が多くおり，迷惑をかけていながら自覚していない人たちがいる。／下校整理の際に自分たちの状況を認識させる。	○ M
21	２地点の通過人数と白線を出ていた人数	通る人数が多いほど白線の外を歩く人数が多い。その原因は，歩行スピードの差とグループの人数の多さ。／信号，ガードレールの設置。貼り紙。意識改革。	○ M
22	一緒に帰る人数，下校の所要時間，自己中心度	自己中心度が高いほど白線への意識が低い。／（対策なし）	○ M
23	①　バスの空席数と立っている本校生の人数 ②　二人以上のグループにおける立っている人数の割合，１人で乗車している人数と１人で立っている人数の割合	空席があっても，一緒に登校している人がいて話しているわけではなくても，立っている人がいる。／座席につかせるように誘導する（その後，想像による考察でこの案は棄却される）。	
24	部活動の活動状況，通学方法と所要時間，改善すべきだと思うこと，マナーが悪いと思う場所	下校にはラッシュがある。住宅街や商店街で広がって大声で話していることに対する問題意識がある。／集団の人数を制限する必要はなく，下校ラッシュ時に重点的に下校整理をする必要がある。住宅街や商店街で広がって大声で話すことを注意する。	○ M
25	普段，登校時，下校時のそれぞれにおける交通ルールへの意識，ルールを守らない理由	普段よりも登校時の方がマナーが良くなり，下校時の方が悪くなる傾向がある。／集団による下校時のマナーを向上させる。	M
26	白線の外を歩く人数，声の大きさ	駅に近づくにつれて広がらないで歩く意識が薄れる。多人数で歩く方が騒音が大きい／個人個人がずっと広がらないで歩く意識を持つ。少人数で下校や友達同士で注意することで騒音を抑えられる。	○ M
27	普段，登校時，下校時のそれぞれにおける交通ルールへの意識，ルールを守らない理由	普段交通ルールを意識している人ほど登下校時の交通ルールを意識している。／普段から１人１人が交通ルールを守るように注意する。	○
28	白線の外を歩く人数，声の大きさ	白線を越えている人と騒音は必ずしも関係しておらず，通過人数と騒音が関係している。／苦情内容を詳しく知らせて意識させる。下校整理で見られている意識を持たせる。	○ M

29	部活動の活動状況，通学方法と所要時間，改善すべきだと思うこと，マナーが悪いと思う場所	生徒のマナーについての意識と近隣住民からの苦情内容には類似点と相違点がある。／住民の声を文面に示し意識の差を認識させる。特定の場所で下校整理をする。	
30	白線の外を歩く人数，声の大きさ	特定の場所で白線の外側を歩いている。道幅や意識に問題がある。／大人数で下校してもいいが列を作って歩く呼びかけが必要。意識改革のためのこのレポート内容を公表する。	○
31	曜日ごとの下校時間帯，下校態度が悪いと思う曜日，部活がある曜日，通学手段，通学路，下校整理による意識の変化	下校整理の成果は大きい／曜日や時間帯ごとに人数を増やすなどの工夫をして下校整理を続ける。	
32	白線の外を歩く人数，声の大きさ	大人数ほど広がる。大人数の集団はうるさい。２列歩行も白線越えにつながる。／下校時間をずらす。白線を一人一人に意識させる。	○ M
33	①　大通りの交差点の歩行状況 ②　商店街でたまる状況	本校生の下校時刻が集中しすぎている。信号待ちで生徒がたまってしまう。全体の65％の生徒がどこかに寄り道している。／下校時刻をずらす。通学路を増やして生徒を分散させる。お店に長居させず，食べ歩きもさせないために見回りをする。	
34	白線の外を歩く人数。声の大きさ	学校を出てすぐのところで「うるさい」に当たるほど声がうるさい。男子より女子の方が少人数でも広がる。／静かにする。１列二人までを徹底する。	
35	①　大通りの交差点の歩行状況 ②　商店街でたまる状況	最終下校時刻ぎりぎりに下校する人が多い。用事が済んだのにたまっている人が多い。／最終下校時刻前に余裕をもって下校する。用事が済んだらすぐに帰る。狭い場所で大人数になるのを防ぐ。	
36	通学マナーに関する理解度と意識，マナー違反を見たことがある場所	マナーを理解しているが意識していない。学校から徒歩５～10分のエリアで通学マナーを守れていない。／スマートフォンのアラーム機能で意識を持続させる。	M
37	下校時刻，下校時の人数，利用駅，通学路，所属する部活，マナーへの意識	マナー違反には下校時の人数の多さが関わっている。／（対策なし）	M
38	性別・所属部活・下校時刻・利用駅とルート・下校人数平均とメンバー・待機状況・買い食いの有無・マナーが悪い場所・注意の有無と内容	下校時刻が最終下校時刻付近に集中しており，下校人数も最終下校時刻付近に集中している。下校時刻と下校人数は昇降口などの待機によって共応答している。その他にも１年生ルートの利用者が占める割合が大きいなどの要因によって交絡している。／最終下校時刻を過ぎてから昇降口などで待機をさせず，最終下校時刻は「校門を出る」時刻ではなく「下校を開始する」時刻と位置付け周知徹底する。	○ M
39	性別・所属部活・下校時刻・利用駅とルート・下校人数平均とメンバー・待機状況・買い食いの有無・マナーが悪い場所・注意の有無と内容	最終下校時刻過ぎまで正門の前で友達を待つことで人がたまり，下校する集団の人数が増え，迷惑につながる。正門前に集まる人に迷惑をかけている意識が低い。特に男子について，商店街で買ったものをゆっくり歩きながら食べることが多い。部活帰りの特に男子生徒が，大人数で道に広がり騒ぎながら住宅地を通り商店街で買い食いをしてたまったりたむろしている。／部活帰りの生徒，特に男子が少人数で帰るように下校時刻をずらす。買い食いは店内に入るか持ち帰るかなどの工夫をする。	○
40	下校状況と迷惑行為に対する意識，実際の苦情内容	（問題についての明記なし）／横１列または２列で歩く。通学路の変更or追加。下校時刻をずらす。電子機器の使用を避ける。	M
41	白線の外を歩く人数，声の大きさ	集団の人数に比例して声が大きくなっている。奇数人数だと横に広がって歩いている。／集団を少なくする。２人または４人で下校する。	○ M

42	白線の外を歩く人数，声の大きさ	人数と声の大きさについての相関はあまり大きくない。人数が多いことが，白線を超えることや大きな声で騒ぐことにつながるとは言えない。おしゃべりに夢中になる人が広がって歩く。／大勢で帰るときは２列を心がける。おしゃべりをしながらも他の人を気にかける。商店街の中で下校整理をする。	○ M
43	バスに乗っている本校生と一般客の位置，空席数，立っている人と座っている人の人数と割合	座席が空いているのに立っていると邪魔になる。一般客が多いとマナーの意識が高まる。／座席が空いていたら進んで座る。	M
44	バスの乗客数，乗客生徒数，立っている生徒数，空席数（一般席，優先席），二人がけの座席のうち一席だけ空いている空席数	空席があっても座らない生徒もしばしばいる。登校時と下校時は状況が大きく違う。／優先席でも誰かの隣でも空席には座る。	○

5　開発した教材の評価と課題：データに基づいた判断の質と反省性

（１）「期待される生徒の反応」の実際

表１に示したように，21名の生徒が高等学校で新たに学習した内容を用いて分析を行った。このうち２名の生徒は箱ひげ図を用いており，残りの19名の生徒は相関を用いていた。残りの23名の生徒については，ヒストグラムや円グラフを解釈することや，アンケートの質問項目をそのまま用いたりしていた。課題を提示する際には新たに学んだ概念や手法を用いることを求めなかったために過半数の生徒が慣れ親しんだ手法を用いたのだと考えられるが，生徒40が感想で「せっかく相関を習ったので，使えたらよかったと思う。」と述べているように，新たに学んだ内容を使おうという意思がある生徒は23名の中に含まれていたと考えられる。相関を含む新たな概念の学習の際には，そのような意思のある生徒が実際の用い方を学習できるように，授業を改善する必要がある。また，相関をとった生徒たちについても「一緒に下校する人数と白線の外を歩く生徒の人数」のように，相関が認められそうな変数の調査に集中した傾向がある。意外な変数同士の相関は多くの生徒の興味をひくと考えられるので，多様性を持たせる手立ての必要性が示唆された。

自身の問題解決プロセスをメタ認知して反省できた生徒は28名いたが，これらはデータの収集方法や調査方法についてであった。この点については後述する。

（２）データに基づいた判断の質

本稿で提示した教材では，問題状況を数学を用いて表現するだけではなく，その結果に基づいて提案することまで含めたため，**表１**に見られるようにほとんどの生徒が何らかの提案を行った。しかし，生徒23のように最終的にデータに基づく判断を棄却するなど，必ずしも「データに基づいた提案」にはなっていない。また，同じデータを用いながら異なる判断を行った生徒もいた。生徒2と生徒3は共同調査者であり，共に２地点の通過人数と白線の外を歩く人数の相関を分析した。その結果，生徒２は相関係数 0.047という値を「相関が小さい」と読み，通過人数と白線の外を歩く人数には関係が見られないと判断した。一方，生徒３は「相関は小さい」と断りながらも，対策として少人数ごとに下校させることを提案した。この相関係数は確かに小さい値であり，ここでの判断は生徒２の方が適切であると考えられるが，相関係数から相関の強さを判断するのは単純ではなく，学習経験の重要性が示唆された。

（3）データの収集方法についての反省

多くの生徒が，自分たちのデータの収集方法について反省的考察を行っている。例えば生徒5,14,22のグループはインターネット上にある「自己中心度」を測定するアンケートを用いたが，生徒5は「心理テストなど信憑性が低い」と述べている。その根拠は不明ではあるものの，既存のアンケートなどの手法に対する批判的検討の契機となったことがうかがえる。また生徒22は自分たちで作成したアンケートについても「まじめにアンケートに取り組んでいない，または記憶が確かでないために正確な回答をするのが困難」という理由でデータの信憑性を問題視している。アンケートの作成方法や実施方法などについては本実践内で指導する機会がなかったが，それらの点についての検討が不十分であったこと及びその必要があることについての生徒の認識につながったと考えられる。

この他にも，自分たちが設定した変数に対して反省している生徒もいた。生徒30は「共同調査者と，データの収集方法はよく考えたつもりだったが，実際計測を始めると不備に気がついたり予想と違う様子であったりと様々な問題があった。考察をするときも，このデータも併せて取ればよかった，と思うことがあった。」と述べ，実践することで反省が行われた。このことは単元「データの分析」の指導のあり方に対しても示唆的で，指標や手法を教科書等で学ぶだけでなく，自身の探究に用いることで細部の理解につながると推察される。

（4）教材の課題

本実践は時間の都合上，レポートの提出で授業を終えている。しかし，「横に広がった歩行」と「人数」のように同じ変数から異なる考察を行っているものや，複数の変数への着目が見られ，これらを授業において改めて共有することで問題に対する理解の深まりが期待できる。また，新たな提案の創出や，数学的手法についての理解の進化も期待できる。一方で，定式化を各人に任せたため，レポート内容が多様になり，評価には多大な労力が必要とされた。本実践は連続した一つの単元内で行ったが，生徒自身の学習の定着度の確認や教員の評価ための時間といった実践的課題を鑑みると，もっと長い期間にまたがったスパイラル型の学習に適した教材であることも示唆され，カリキュラム全体を視野に入れて検討する必要がある。

引用・参考文献

新井仁（2011）『中学校数学科　新領域「資料の活用」の授業プラン』．明昌堂.

国立教育政策研究所（2013）『生きるための知識と技能５－OECD生徒の学習到達度調査（PISA）2012年調査国際結果報告書』．明石書店.

清水美憲（2007）「数学的リテラシー論が提起する数学教育の新しい展望」．小寺隆幸，清水美憲（編著）『未来への学力と日本の教育⑦世界を開く数学的リテラシー』明石書店. pp. 244－263.

清水美憲（2012）「第２章　数学の言語性への着目と数学的リテラシーの育成」．大高泉，清水美憲（編著）『新教職教育講座　第６巻　教科教育の理論と授業Ⅱ　理数編』．協同出版．pp. 23－38.

高橋陽一郎ほか（2011）『詳説数学Ⅰ』新興出版社啓林館.
デイヴィッド・ムーア，ジョージ・マッケイブ（2008/2005）『実データで学ぶ，使うための統計入門－データの取り方と見かた』. 日本評論社.
西村圭一（2010）『中学校新数学科　活用型学習の実践事例集　豊かに生きる力を育む数学授業』. 明治図書出版.
文部科学省（2008）『中学校学校学習指導要領解説　数学編』. 教育出版.
文部科学省（2009）『高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編』. 実教出版.
文部科学省（2014）「育成すべき資質・能力を踏まえた教育目標・内容と評価の在り方に関する検討会―論点整理―」.
（http://www.mext.go.jp/component/b_menu/shingi/toushin/_icsFiles/afieldfile/2014/07/22/1346335_02.pdf）
文部科学省「高等学校教育の現状」.
（http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/siryo/attach/1325908.htm）

10　数学科における数学的リテラシーを育成するための教材

筑波大学大学院人間総合科学研究科　平林　真伊

１．教材案

本稿では，関数領域に焦点をあて，数学科授業において数学的リテラシーを育成するための教材を提案することを目的とする。

１．１　足跡から犯人を捜そう

この問題は，Lesh and Doerr（2003）によって提案された問題を改題したものである。

ある日の晩に，何者かが職員室に侵入しました。その侵入者は職員室を物色し，いくつかの金品とテスト用紙を盗んでいきました。警察官は犯人を捕まえるために捜査を始めましたが，現場には証拠となるものが何も残されていませんでした。唯一，職員室の窓の外に残された，犯人のものと思われる足跡だけが手がかりです。警察官は，残された足跡から犯人の身長を推定しようと考えましたが，どうすれば犯人の身長を推定できるのかが分からず，困ってしまいました。

足跡から犯人の身長を推定できるような方法を開発して，警察官を助けましょう。

１．２　最新話が読めるのはいつ？

この問題は，中学校第２学年の「一次関数」の単元で扱われる，いわゆる「追いつき算」の問題を改題したものである。

まいさんは，「週刊ステップ」という雑誌に掲載されている「テンピース」という漫画にはまっています。この漫画はおよそ20年間連載が続いている人気作で，日本中で読まれています。

最近，テンピースのスマートフォン用のアプリが配信されました。そのアプリは，これまでに掲載されてきたテンピースの漫画を毎日１話ずつ無料で読めるというものです。

まいさんも早速，このアプリをダウンロードしましたが，アプリでの配信が雑誌での最新話に追いつくのはいつになるのか疑問に思いました。そこでまいさんは，過去４年分の雑誌の掲載日と掲載話を調べて，追いつく日にちを予想することにしました。

次の＜分かっていること＞と，まいさんが調べたデータをもとにして，アプリでの配信が最新話に追いつくのはいつになるのかを予想しよう。（データは資料を参照）

＜分かっていること＞

・アプリでは毎日１話を無料で配信している
・最新話は，週刊ステップに掲載されている
・週刊ステップは，基本的に毎週月曜日に発売されるが，月曜日が祝日の場合は土曜日に発売される
・週刊ステップは年に４回，合併号として発売され，合併号が発売された翌週には雑誌は発売されない

・テンピースは毎週，週刊ステップに１話ずつ掲載されるが，作者の都合により休載することもある
・週刊ステップでの最新話は，2016年１月25日現在，813話である
・アプリでの配信は，2016年１月25日現在，225話である

２．教材のねらい

第一，第二の問題ともに，中学校第２学年の「一次関数」の単元で扱われることを想定している。第一の問題を解決するためには，足跡の大きさから身長を推測する方法を開発するために，実際に足の大きさと身長を計測することが必要である。そして，収集したデータから，身長は足の大きさの一次関数であることをみなし，身長と足の大きさの関係を式に表す。データを収集する際には，年齢や性差によって身長と足跡の関係性が異なるため，どのようなデータを収集すればよいかを検討することも必要である。したがって，生徒たちには適切なデータを収集すること，そして，身長は足の大きさの一次関数であるとみなしてそれらの関係を式に表すことを期待する。

第二の問題を解決するためには，与えられたデータから，雑誌に掲載されるペースを読み取り，変化の割合が一定であると仮定し，日にちと話数の関係を一次関数の式に表すことが必要である。上記で提示した＜分かっていること＞や資料として提示したデータは，実際の条件やデータに基づいて作成されたものであり，条件過多の状態である。そのため，問題を解決するために必要な条件を選択したり，データを整理して，数学的に処理しやすい形式に整えることが必要である。生徒たちには与えられたデータの中から必要なものを選択し，それらから傾向を読み取ること，そして，話数は日にちの一次関数であるとみなし，それらの関係を式に表すことを期待する。

３．教材の意義

第一の問題に関して，収集した身長と足の大きさのデータを見ると，男子と女子とでは傾向に違いがあることに気付く。それゆえ，男女を混合した状態では，よりよい式を導くことができない。そのため，導出した数学的モデルを改良するために，新たにデータを収集したり，仮定を設定しなおしたりすることが必要である。このように，第一の問題に取り組む際に，現実事象を数学的に定式化し，定式化された数学的モデルから数学的結論を導き，その結論をもとの事象に照らして解釈・評価するといった数学的モデル化（三輪，1983）の一連の過程を何度も繰り返し経験することが可能である。生徒はその際に，数学的モデルを導出したり，数学的モデルや結論を批判的に検討したりするといった数学的リテラシーを身に付け得ると考える。

そして，第二の問題に関して，教科書等で挙げられている「追いつき算」の問題とは異なり，与えられたデータから傾向を読み取り，自分自身で仮定を設定することが必要である。このように，仮定を設定するとともに，根拠を持ってその妥当性を説明するといった数学的リテラシーを身に付けることが期待される。

参考・引用文献

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh, & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving,* learning and teaching. (pp. 3－33). Mahwah, NJ：Erlbaum.

三輪辰郎(1983). 「数学教育におけるモデル化についての一考察」. 『筑波数学教育研究』, 第2巻, pp. 117－125.

○資料

話	号	発売日
648	2012年1号	11. 12. 5
649	2	11. 12. 12
650	3・4	11. 12. 19
651	5・6	12. 1. 4
652	7	12. 1. 16
653	8	12. 1. 23
654	9	12. 1. 30
655	10	12. 2. 6
656	11	12. 2. 13
657	12	12. 2. 20
658	14	12. 3. 5
659	15	12. 3. 12
660	16	12. 3. 19
661	17	12. 3. 26
662	18	12. 4. 2
663	20	12. 4. 16
664	21・22	12. 4. 23
665	23	12. 5. 7
666	24	12. 5. 14
667	25	12. 5. 21
668	26	12. 5. 28
669	27	12. 6. 4
670	28	12. 6. 11
671	29	12. 6. 18
672	31	12. 7. 2
673	32	12. 7. 9
674	33	12. 7. 14
675	35	12. 7. 30
676	36・37	12. 8. 6
677	38	12. 8. 20
678	39	12. 8. 27
679	40	12. 9. 3
680	41	12. 9. 10
681	42	12. 9. 15
682	43	12. 9. 24
683	45	12. 10. 6
684	46	12. 10. 15
685	47	12. 10. 22
686	48	12. 10. 29
687	49	12. 11. 5
688	50	12. 11. 12
689	52	12. 11. 26

話	号	発売日
690	2013年1号	12. 12. 3
691	2	12. 12. 10
692	3	12. 12. 17
693	4・5	12. 12. 22
694	6・7	13. 1. 4
695	8	13. 1. 21
696	9	13. 1. 28
697	10	13. 2. 4
698	11	13. 2. 9
699	13	13. 2. 25
700	14	13. 3. 4
701	15	13. 3. 11
702	17	13. 3. 25
703	18	13. 4. 1
704	19	13. 4. 8
705	20	13. 4. 15
706	21	13. 4. 22
707	22・23	13. 4. 27
708	24	13. 5. 13
709	25	13. 5. 20
710	28	13. 6. 10
711	29	13. 6. 17
712	31	13. 7. 1
713	32	13. 7. 8
714	33	13. 7. 13
715	34	13. 7. 22
716	36	13. 8. 5
717	37・38	13. 8. 12
718	39	13. 8. 26
719	40	13. 9. 2
720	41	13. 9. 9
721	42	13. 9. 14
722	44	13. 9. 30
723	45	13. 10. 7
724	46	13. 10. 12
725	47	13. 10. 21
726	49	13. 11. 2
727	50	13. 11. 11
728	51	13. 11. 18
729	52	13. 11. 25
730	2014年2号	13. 12. 9
731	3	13. 12. 16

話	号	発売日
732	4・5	13. 12. 21
733	6・7	14. 1. 4
734	8	14. 1. 20
735	9	14. 1. 27
736	10	14. 2. 3
737	11	14. 2. 10
738	13	14. 2. 24
739	14	14. 3. 3
740	15	14. 3. 10
741	16	14. 3. 17
742	18	14. 3. 31
743	19	14. 4. 7
744	20	14. 4. 14
745	22・23	14. 4. 28
746	24	14. 5. 12
747	25	14. 5. 19
748	26	14. 5. 26
749	27	14. 6. 2
750	30	14. 6. 23
751	31	14. 6. 30
752	32	14. 7. 7
753	34	14. 7. 19
754	35	14. 7. 28
755	36	14. 8. 4
756	37・38	14. 8. 11
757	39	14. 8. 25
758	40	14. 9. 1
759	41	14. 9. 8
760	42	14. 9. 13
761	43	14. 9. 22
762	45	14. 10. 6
763	46	14. 10. 11
764	47	14. 10. 20
765	48	14. 10. 27
766	50	14. 11. 10
767	51	14. 11. 17
768	52	14. 11. 22
769	2015年1号	14. 12. 1
770	3	14. 12. 15
771	4・5	14. 12. 22
772	6・7	15. 1. 5

話	号	発売日
773	8	15. 1. 19
774	9	15. 1. 26
775	10	15. 2. 2
776	12	15. 2. 16
777	13	15. 2. 23
778	14	15. 3. 2
779	15	15. 3. 9
780	17	15. 3. 23
781	18	15. 3. 30
782	19	15. 4. 6
783	20	15. 4. 13
784	22・23	15. 4. 27
785	24	15. 5. 11
786	25	15. 5. 18
787	26	15. 5. 25
788	27	15. 6. 1
789	28	15. 6. 8
790	30	15. 6. 22
791	31	15. 6. 29
792	32	15. 7. 6
793	33	15. 7. 13
794	34	15. 7. 18
795	36	15. 8. 3
796	37・38	15. 8. 10
797	39	15. 8. 24
798	40	15. 8. 31
799	41	15. 9. 7
800	43	15. 9. 19
801	44	15. 9. 28
802	45	15. 10. 5
803	46	15. 10. 10
804	48	15. 10. 26
805	49	15. 11. 2
806	50	15. 11. 9
807	52	15. 11. 16
808	53	15. 11. 30
809	1	15. 12. 7
810	3・4	15. 12. 21
811	5・6	16. 1. 4
812	7	16. 1. 18
813	8	16. 1. 25

公益財団法人 日本教材文化研究財団定款

第１章　総　則

（名　称）
第１条　この法人は，公益財団法人　日本教材文化研究財団と称する。

（事務所）
第２条　この法人は，主たる事務所を，東京都新宿区に置く。
２　この法人は，理事会の決議を経て，必要な地に従たる事務所を設置することができる。これを変更または廃止する場合も同様とする。

第２章　目的及び事業

（目　的）
第３条　この法人は，学校教育，社会教育及び家庭教育における教育方法に関する調査研究を行うとともに，学習指導の改善に資する教材・サービス等の開発利用をはかり，もってわが国の教育の振興に寄与することを目的とする。

（事　業）
第４条　この法人は，前条の目的を達成するために，次の各号の事業を行う。
（１）学校教育，社会教育及び家庭教育における学力形成に役立つ指導方法の調査研究と教材開発
（２）家庭の教育力の向上がはかれる教材やサービスの調査研究と普及公開
（３）前二号に掲げる研究成果の発表及びその普及啓蒙
（４）教育方法に関する国内外の研究成果の収集及び一般の利用に供すること
（５）他団体の検定試験問題及びその試験に関係する教材の監修
（６）その他，目的を達成するために必要な事業
２　前項の事業は，日本全国において行うものとする。

第３章　資産及び会計

（基本財産）
第５条　この法人の目的である事業を行うために不可欠な別表の財産は，この法人の基本財産とする。
２　基本財産は，この法人の目的を達成するために理事長が管理しなければならず，基本財産の一部を処分しようとするとき及び基本財産から除外しようとするときは，あらかじめ理事会及び評議員会の承認を要する。

（事業年度）
第６条　この法人の事業年度は，毎年４月１日に始まり翌年３月31日に終わる。

（事業計画及び収支予算）
第７条　この法人の事業計画書，収支予算書並びに資金調達及び設備投資の見込みを記載した書類については，毎事業年度開始の日の前日までに，理事長が作成し，理事会の承認を受けなければならない。これを変更する場合も同様とする。
２　前項の書類については，主たる事務所に，当該事業年度が終了するまでの間備え置き，一般の閲覧に供するものとする。

（事業報告及び決算）
第８条　この法人の事業報告及び決算については，毎事業年度終了後３箇月以内に，理事長が次の各号の書類を作成し，監事の監査を受けた上で，理事会の承認を受けなければならない。承認を受けた書類のうち，第１号，第３号，第４号及び第６号の書類については，定時評議員会に提出し，第１号の書類についてはその内容を報告し，その他の書類については，承認を受けなければならない。
（１）事業報告
（２）事業報告の附属明細書
（３）貸借対照表
（４）正味財産増減計算書
（５）貸借対照表及び正味財産増減計算書の附属明細書
（６）財産目録
２　第１項の規定により報告または承認された書類のほか，次の各号の書類を主たる事務所に５年間備え置き，個人の住所に関する記載を除き一般の閲覧に供するとともに，定款を主たる事務所に備え置き，一般の閲覧に供するものとする。
（１）監査報告
（２）理事及び監事並びに評議員の名簿
（３）理事及び監事並びに評議員の報酬等の支給の基準を記載した書類
（４）運営組織及び事業活動の状況の概要及びこれらに関する数値のうち重要なものを記載した書類

（公益目的取得財産残額の算定）
第９条　理事長は，公益社団法人及び公益財団法人の認定等に関する法律施行規則第48条の規定に基づき，毎事業年度，当該事業年度の末日における公益目的取得財産残額を算定し，前条第２項第４号の書類に記載するものとする。

第４章　評議員

（評議員）
第10条　この法人に，評議員16名以上21名以内を置く。

（評議員の選任及び解任）
第11条　評議員の選任及び解任は，評議員選定委員会において行う。
２　評議員選定委員会は，評議員１名，監事１名，事務局員１名，次項の定めに基づいて選任された外部委員２名の合計５名で構成する。
３　評議員選定委員会の外部委員は，次のいずれにも該当しない者を理事会において選任する。
（１）この法人または関連団体（主要な取引先及び重要な利害関係を有する団体を含む。以下同じ。）の業務を執行する者または使用人
（２）過去に前号に規定する者となったことがある者
（３）第１号または第２号に該当する者の配偶者，三親等内の親族， 使用人（過去に使用人となった者も含む。）
４　評議員選定委員会に提出する評議員候補者は，理事会または評議員会がそれぞれ推薦することができる。評議員選定委員会の運営についての詳細は理事会において定める。
５　評議員選定委員会に評議員候補者を推薦する場合には，次に掲げる事項のほか，当該候補者を評議員として適任と判断した理由を委員に説明しなければならない。
（１）当該候補者の経歴
（２）当該候補者を候補者とした理由
（３）当該候補者とこの法人及び役員等（理事，監事及び評議員）との関係
（４）当該候補者の兼職状況
６　評議員選定委員会の決議は，委員の過半数が出席し，

その過半数をもって行う。ただし，外部委員の１名以上が出席し，かつ，外部委員の１名以上が賛成することを要する。

7　評議員選定委員会は，第10条で定める評議員の定数を欠くこととなるときに備えて，補欠の評議員を選任することができる。

8　前項の場合には，評議員選定委員会は，次の各号の事項も併せて決定しなければならない。

（1）当該候補者が補欠の評議員である旨
（2）当該候補者を１人または２人以上の特定の評議員の補欠の評議員として選任するときは，その旨及び当該特定の評議員の氏名
（3）同一の評議員（２人以上の評議員の補欠として選任した場合にあっては，当該２人以上の評議員）につき２人以上の補欠の評議員を選任するときは，当該補欠の評議員相互間の優先順位

9　第７項の補欠の評議員の選任に係る決議は，当該決議後４年以内に終了する事業年度のうち最終のものに関する定時評議員会の終結の時まで，その効力を有する。

（評議員の任期）
第12条　評議員の任期は，選任後４年以内に終了する事業年度のうち最終のものに関する定時評議員会の終結のときまでとする。また，再任を妨げない。

2　前項の規定にかかわらず，任期の満了前に退任した評議員の補欠として選任された評議員の任期は，退任した評議員の任期の満了するときまでとする。

3　評議員は，第10条に定める定数に足りなくなるときは，任期の満了または辞任により退任した後も，新たに選任された評議員が就任するまで，なお評議員としての権利義務を有する。

（評議員に対する報酬等）
第13条　評議員に対して，各年度の総額が500万円を超えない範囲で，評議員会において定める報酬等を支給することができる。

2　前項の規定にかかわらず，評議員には費用を弁償することができる。

第５章　評議員会

（構　成）
第14条　評議員会は，すべての評議員をもって構成する。

（権　限）
第15条　評議員会は，次の各号の事項について決議する。

（1）理事及び監事の選任及び解任
（2）理事及び監事の報酬等の額
（3）評議員に対する報酬等の支給の基準
（4）貸借対照表及び正味財産増減計算書の承認
（5）定款の変更
（6）残余財産の処分
（7）基本財産の処分または除外の承認
（8）その他評議員会で決議するものとして法令またはこの定款で定められた事項

（開　催）
第16条　評議員会は，定時評議員会として毎事業年度終了後３箇月以内に１回開催するほか，臨時評議員会として必要がある場合に開催する。

（招　集）
第17条　評議員会は，法令に別段の定めがある場合を除き，理事会の決議に基づき理事長が招集する。

2　評議員は，理事長に対して，評議員会の目的である事項及び招集の理由を示して，評議員会の招集を請求することができる。

（議　長）
第18条　評議員会の議長は理事長とする。

2　理事長が欠けたときまたは理事長に事故があるときは，評議員の互選によって定める。

（決　議）
第19条　評議員会の決議は，決議について特別の利害関係を有する評議員を除く評議員の過半数が出席し，その過半数をもって行う。

2　前項の規定にかかわらず，次の各号の決議は，決議について特別の利害関係を有する評議員を除く評議員の３分の２以上に当たる多数をもって行わなければならない。

（1）監事の解任
（2）評議員に対する報酬等の支給の基準
（3）定款の変更
（4）基本財産の処分または除外の承認
（5）その他法令で定められた事項

3　理事または監事を選任する議案を決議するに際しては，各候補者ごとに第１項の決議を行わなければならない。理事または監事の候補者の合計数が第21条に定める定数を上回る場合には，過半数の賛成を得た候補者の中から得票数の多い順に定数の枠に達するまでの者を選任することとする。

（議事録）
第20条　評議員会の議事については，法令で定めるところにより，議事録を作成する。

2　議長は，前項の議事録に記名押印する。

第６章　役　員

（役員の設置）
第21条　この法人に，次の役員を置く。

（1）理事　７名以上12名以内
（2）監事　２名または３名

2　理事のうち１名を理事長とする。

3　理事長以外の理事のうち，1名を専務理事及び２名を常務理事とする。

4　第２項の理事長をもって一般社団法人及び一般財団法人に関する法律（平成18年法律第48号）に規定する代表理事とし，第３項の専務理事及び常務理事をもって同法第197条で準用する同法第91条第1項に規定する業務執行理事（理事会の決議により法人の業務を執行する理事として選定された理事をいう。以下同じ。）とする。

（役員の選任）
第22条　理事及び監事は，評議員会の決議によって選任する。

2　理事長及び専務理事並びに常務理事は，理事会の決議によって理事の中から選定する。

（理事の職務及び権限）
第23条　理事は，理事会を構成し，法令及びこの定款で定めるところにより，職務を執行する。

2　理事長は，法令及びこの定款で定めるところにより，この法人の業務を代表し，その業務を執行する。

3　専務理事は，理事長を補佐する。

4　常務理事は，理事長及び専務理事を補佐し，理事会の議決に基づき，日常の事務に従事する。

5　理事長及び専務理事並びに常務理事は，毎事業年度に４箇月を超える間隔で２回以上，自己の職務の執行の状

況を理事会に報告しなければならない。

（監事の職務及び権限）
第24条　監事は，理事の職務の執行を監査し，法令で定めるところにより，監査報告を作成する。
2　監事は，いつでも，理事及び事務局員に対して事業の報告を求め，この法人の業務及び財産の状況の調査をすることができる。

（役員の任期）
第25条　理事の任期は，選任後２年以内に終了する事業年度のうち最終のものに関する定時評議員会の終結のときまでとする。
2　監事の任期は，選任後２年以内に終了する事業年度のうち最終のものに関する定時評議員会の終結のときまでとする。
3　前項の規定にかかわらず，任期の満了前に退任した理事または監事の補欠として選任された理事または監事の任期は，前任者の任期の満了するときまでとする。
4　理事または監事については，再任を妨げない。
5　理事または監事が第21条に定める定数に足りなくなるときまたは欠けたときは，任期の満了または辞任により退任した後も，それぞれ新たに選任された理事または監事が就任するまで，なお理事または監事としての権利義務を有する。

（役員の解任）
第26条　理事または監事が，次の各号のいずれかに該当するときは，評議員会の決議によって解任することができる。
（１）職務上の義務に違反し，または職務を怠ったとき
（２）心身の故障のため，職務の執行に支障がありまたはこれに堪えないとき

（役員に対する報酬等）
第27条　理事及び監事に対して，各年度の総額が300万円を超えない範囲で，評議員会において定める報酬等を支給することができる。
2　前項の規定にかかわらず，理事及び監事には費用を弁償することができる。

第７章　理事会

（構　成）
第28条　理事会は，すべての理事をもって構成する。

（権　限）
第29条　理事会は，次の各号の職務を行う。
（１）この法人の業務執行の決定
（２）理事の職務の執行の監督
（３）理事長及び専務理事並びに常務理事の選定及び解職

（招　集）
第30条　理事会は，理事長が招集するものとする。
2　理事長が欠けたときまたは理事長に事故があるときは，各理事が理事会を招集する。

（議　長）
第31条　理事会の議長は，理事長とする。
2　理事長が欠けたときまたは理事長に事故があるときは，専務理事が理事会の議長となる。

（決　議）
第32条　理事会の決議は，決議について特別の利害関係を有する理事を除く理事の過半数が出席し，その過半数をもって行う。
2　前項の規定にかかわらず，一般社団法人及び一般財団法人に関する法律第197条において準用する同法第96条の要件を満たしたときは，理事会の決議があったものとみなす。

（議事録）
第33条　理事会の議事については，法令で定めるところにより，議事録を作成する。
2　出席した理事長及び監事は，前項の議事録に記名押印する。ただし，理事長の選定を行う理事会については，他の出席した理事も記名押印する。

第８章　定款の変更及び解散

（定款の変更）
第34条　この定款は，評議員会の決議によって変更することができる。
2　前項の規定は，この定款の第３条及び第４条並びに第11条についても適用する。

（解　散）
第35条　この法人は，基本財産の滅失によるこの法人の目的である事業の成功の不能，その他法令で定められた事由によって解散する。

（公益認定の取消し等に伴う贈与）
第36条　この法人が公益認定の取消しの処分を受けた場合または合併により法人が消滅する場合（その権利義務を承継する法人が公益法人であるときを除く。）には，評議員会の決議を経て，公益目的取得財産残額に相当する額の財産を，当該公益認定の取消しの日または当該合併の日から１箇月以内に，公益社団法人及び公益財団法人の認定等に関する法律第５条第17号に掲げる法人または国若しくは地方公共団体に贈与するものとする。

（残余財産の帰属）
第37条　この法人が清算をする場合において有する残余財産は，評議員会の決議を経て，公益社団法人及び公益財団法人の認定等に関する法律第５条第17号に掲げる法人または国若しくは地方公共団体に贈与するものとする。

第９章　公告の方法

（公告の方法）
第38条　この法人の公告は，電子公告による方法により行う。
2　事故その他やむを得ない事由によって前項の電子公告を行うことができない場合は，官報に掲載する方法により行う。

第10章　事務局その他

（事務局）
第39条　この法人に事務局を設置する。
2　事務局には，事務局長及び所要の職員を置く。
3　事務局長及び重要な職員は，理事長が理事会の承認を得て任免する。
4　前項以外の職員は，理事長が任免する。
5　事務局の組織，内部管理に必要な規則その他については，理事会が定める。

（委　任）
第40条　この定款に定めるもののほか，この定款の施行について必要な事項は，理事会の決議を経て，理事長が定める。

附　則

1　この定款は，一般社団法人及び一般財団法人に関する法律及び公益社団法人及び公益財団法人の認定等に関する法律の施行に伴う関係法律の整備等に関する法律第106条第１項に定める公益法人の設立の登記の日から施行する。

2　一般社団法人及び一般財団法人に関する法律及び公益社団法人及び公益財団法人の認定等に関する法律の施行に伴う関係法律の整備等に関する法律第106条第１項に定める特例民法法人の解散の登記と，公益法人の設立の登記を行ったときは，第６条の規定にかかわらず，解散の登記の日の前日を事業年度の末日とし，設立の登記の日を事業年度の開始日とする。

3　第22条の規定にかかわらず，この法人の最初の理事長は杉山吉茂，専務理事は新免利也，常務理事は星村平和及び中井武文とする。

4　第11条の規定にかかわらず，この法人の最初の評議員は，旧主務官庁の認可を受けて，評議員選定委員会において行うところにより，次に掲げるものとする。

有田　和正	尾田　幸雄
梶田　叡一	角屋　重樹
亀井　浩明	北島　義斉
木村　治美	佐島　群巳
佐野　金吾	清水　厚実
田中　博之	玉井美知子
中川　栄次	中里　至正
中洌　正堯	波多野義郎
原田　智仁	宮本　茂雄
山極　　隆	大倉　公喜

5　昭和45年の法人設立時の理事及び監事は，次のとおりとする。

理事	（理事長）	平澤　興
理事	（専務理事）	堀場正夫
理事	（常務理事）	鰺坂二夫
理事	（常務理事）	渡辺　茂
理事	（常務理事）	近藤達夫
理事		平塚益徳
理事		保田　與重郎
理事		奥西　保
理事		北島織衛
理事		田中克己
監事		高橋武夫
監事		辰野千壽
監事		工藤　清

賛助会員規約

第１条　公益財団法人日本教材文化研究財団の事業目的に賛同し，事業その他運営を支援するものを賛助会員(以下｢会員」という）とする。

第２条　会員は，法人，団体または個人とし，次の各号に定める賛助会費（以下「会員」という）を納めるものとする。

（１）法人および団体会員	一口30万円以上
（２）個人会員	一口６万円以上
（３）個人準会員	一口６万円未満

第３条　会員になろうとするものは，会費を添えて入会届を提出し，理事会の承認を受けなければならない。

第４条　会員は，この法人の事業を行う上に必要なことがらについて研究協議し，その遂行に協力するものとする。

第５条　会員は次の各号の事由によってその資格を失う。
（１）脱退
（２）禁治産および準禁治産並びに破産の宣告
（３）死亡，失踪宣告またはこの法人の解散
（４）除名

第６条　会員で脱退しようとするものは，書面で申し出なければならない。

第７条　会員が次の各号（１）に該当するときは，理事現在数の４分の３以上出席した理事会の議決をもってこれを除名することができる。
（１）会費を滞納したとき
（２）この法人の会員としての義務に違反したとき
（３）この法人の名誉を傷つけまたはこの法人の目的に反する行為があったとき

第８条　既納の会費は，いかなる事由があってもこれを返還しない。

第９条　各年度において納入された会費は，事業の充実およびその継続的かつ確実な実施のため，その半分を管理費に使用する。

内閣府所管

公益財団法人　日本教材文化研究財団

理事・監事・評議員

(1) 理事・監事名簿（敬称略）13名

（平成28年８月31日現在）

役　名	氏　名	就任年月日	就重	職務･専門分野	備　　考
理事長	村上　和雄	平成26年６月６日 （理事長就任 H.26.3.7）	重	法人の代表 業務の総理	筑波大学名誉教授　全日本家庭教育研究会総裁
専務理事	新免　利也	平成26年６月６日	重	事務総括 事業運営	(株)新学社執行役員
常務理事	中井　武文	平成26年６月６日	重	財務	(株)新学社代表取締役会長
常務理事	星村　平和	平成26年６月６日	重	社会科教育	元兵庫教育大学教授　国立教育政策研究所名誉所員
理　事	角屋　重樹	平成26年６月６日	重	理科教育	広島大学名誉教授　日本体育大学教授
理　事	北島　義俊	平成26年６月６日	重	財務	大日本印刷(株)代表取締役社長
理　事	杉山　吉茂	平成26年６月６日	重	数学教育	元早稲田大学教授　東京学芸大学名誉教授
理　事	中川　栄次	平成26年６月６日	重	財務	(株)新学社代表取締役社長
理　事	中洌　正堯	平成28年６月３日	就	国語教育学	元兵庫教育大学学長　兵庫教育大学名誉教授
理　事	原田　智仁	平成26年６月６日	重	社会科教育	兵庫教育大学大学院教授
理　事	菱村　幸彦	平成26年６月６日	重	教育行政 教育法規	元文部省初中局長　国立教育政策研究所名誉所員
監　事	中合　英幸	平成26年６月６日	重	財務	(株)新学社執行役員
監　事	古谷　滋海	平成26年６月６日	就	財務	大日本印刷(株)常務執行役員

（50音順）

(2) 評議員名簿（敬称略）18名

役　名	氏　名	就任年月日	就重	担当職務	備　　考
評議員	秋田喜代美	平成25年12月11日	就	教育心理学・発達心理学 学校教育学	東京大学大学院教授
評議員	浅井　和行	平成26年７月25日	重	教育工学 メディア教育	京都教育大学大学院教授
評議員	安彦　忠彦	平成26年７月25日	重	教育課程論 教育評価・教育方法	名古屋大学名誉教授　神奈川大学特別招聘教授
評議員	亀井　浩明	平成26年７月25日	重	初等中等教育 キャリア教育	元東京都教委指導部長　帝京大学名誉教授
評議員	北島　義斉	平成26年７月25日	重	財務	大日本印刷(株)代表取締役副社長
評議員	木村　治美	平成26年７月25日	重	英文学	共立女子大学名誉教授　エッセイスト
評議員	櫻井　茂男	平成26年７月25日	重	認知心理学・発達心理学 キャリア教育	筑波大学人間系教授
評議員	佐野　金吾	平成26年７月25日	重	社会科教育 教育課程・学校経営	元東京家政学院中・高等学校長　全国図書教材協議会会長
評議員	清水　厚実	平成26年７月25日	重	教育学	日本教材学会副会長　学校法人福山大学理事長
評議員	清水　美憲	平成26年７月25日	重	数学教育学 評価論	筑波大学人間系教授
評議員	下田　好行	平成26年７月25日	重	国語教育 教育方法学	元国立教育政策研究所総括研究官　東洋大学教授
評議員	鈴木　克明	平成25年12月11日	就	教育工学・情報教育 教育メディア学	熊本大学大学院教授
評議員	髙木　展郎	平成26年７月25日	重	国語科教育学 教育方法学	横浜国立大学名誉教授
評議員	田中　博之	平成26年７月25日	重	教育工学 教育学	早稲田大学教職大学院教授
評議員	前田　英樹	平成26年７月25日	重	フランス思想 言語論	立教大学教授
評議員	松浦　伸和	平成26年７月25日	重	英語教育学	広島大学大学院教授
評議員	峯　　明秀	平成26年７月25日	重	社会科教育学	大阪教育大学教授
評議員	吉田　武男	平成26年７月25日	重	道徳教育論 家庭教育論	筑波大学人間系教授

（50音順）

調査研究シリーズ 65

数学的リテラシーの育成を図る
教材の開発

平成28年 9 月30日発行
編　集／公益財団法人　日本教材文化研究財団
発行人／新免　利也（専務理事）
発行所／公益財団法人　日本教材文化研究財団
〒162-0841　東京都新宿区払方町14番地 1
電話 03-5225-0255　FAX 03-5225-0256
http://www.jfecr.or.jp

表紙デザイン（株)エスファクトリー 竹内則晶／印刷（株)天理時報社