は　し　が　き

改訂学習指導要領では，各教科等で育成すべき資質・能力について，いわゆる「三つの柱」の観点から整理された目標・内容が示された。この「育成すべき資質・能力」という観点から整理された数学科の新しい教育課程は，教科の目標と内容が，教科の本質につながる「数学的な見方・考え方」に基づいて整理されている。これは，新しい時代に必要な資質・能力の育成を，教科の本質にかかわる見方・考え方を軸に行うという考え方によるものである。

本研究は，新しい教育課程の動向を踏まえながら，中学校・高等学校の数学科指導において，新しい時代に対応できる資質・能力の育成をいかに図るべきかを明らかにすることを目的とした。そのために，「数学的に考える力」と「思考の習慣」に着目し，新しい教材の開発を行うとともに，その教材を用いた授業実践を通して，学習指導と評価のあり方を明らかにすることを目的として二年間の研究を進めた。

第１年次では，数学科において育成すべき資質・能力について，関連する概念に関わる先行研究や諸外国の研究動向を分析しながら理論的考察を進めるとともに，そのような資質・能力を育成するための具体的な教材開発を試みた。 また，第２年次には，教材の開発と蓄積をさらに進めるとともに，数学科において育成すべき資質・能力に焦点化した学習指導・評価モデルについての実践研究を行った。

教材の開発にあたっては，数学的に考える資質・能力の育成のために，数学の世界での考察と日常事象の考察のそれぞれについて検討し，その教材を用いた授業モデルを開発した。特に，日常生活の場面にみられる問題を数学の舞台に載せて課題を見出す過程，及び数学の世界の問題とその解決を振り返り新しい問題を見出す過程のそれぞれに焦点を当てた。学習指導においては，問題場面から課題を見出す過程，解決した問題を振り返って新しい課題を見出す活動を促す教授行動を重点化し，数学的活動において多面的な検討を可能にするグループワークを取り入れることの意義を生徒の学習活動の評価も基づいて明らかにした。

研究会は，二ヶ月に１回を基本として研究会を５回開催するとともに，東京学芸大学附属国際中学教育学校において公開研究会に合わせて授業研究会を実施していただき，教材や授業実践の検討を行った。また，研究会のうちの１回は東京近郊での合宿形式で会議をもち，議論を深めた。本研究には多くの課題が残されているが，研究成果を生かして，さらに研究を深めていきたいと考えている。

本研究を進めるにあたり，公益財団法人・日本教材文化研究財団より多大なるご支援を賜りました。また，特に，同財団の鍛治紀彦氏には研究会の運営をはじめ様々な面でお世話になりました。心より感謝申し上げます。

平成30年７月

研究者代表　清水　美憲

目　　次

1　研究の概要
これからの時代に求められる資質・能力を育成するための数学科学習指導の研究
―「数学的に考える力」と「思考の習慣」に焦点を当てて―

1．研究の目的

学習指導要領の改訂作業が進み，各教科等で育成すべき資質・能力について，いわゆる「三つの柱」の観点から整理された目標・内容案が示された。この「育成すべき資質・能力」という観点から整理される新しい数学科の教育課程は，教科の目標と内容が，教科の本質につながる「数学的な見方・考え方」に基づいて整理されている。これは，新しい時代に必要な資質・能力の育成を，教科の本質にかかわる見方・考え方を軸に行っていくという考え方によっている。

知識基盤社会に生きる市民に必要な数学的素養については，OECDによる国際学力調査（PISA）や国際成人力調査（PIAAC）の実施が，数学科で育成すべき資質・能力とは何か，という問いを投げかけており，これまでの「数学的に考える力」や「数学的リテラシー」の研究において，数学的なプロセスに焦点を当てた教材の開発と評価が進められてきた。

本研究は，このような社会の変革に対応する新しい教育課程改善の動向を踏まえながら，中学校・高等学校の数学科指導において，新しい時代に対応できる資質・能力の育成をいかに図るべきかを明らかにするために，新しい教材の開発を行い，そのような教材を用いた学習指導と評価のあり方を明らかにすることを目的とする。

2．研究の方法

本研究の第１年次では，数学科において育成すべき資質・能力について，関連する概念に関わる先行研究や諸外国の研究動向を分析しながら理論的考察を進めるとともに，そのような資質・能力を育成するための具体的な教材開発を試みた。

第２年次には，以下のような研究方法でプロジェクトを推進した。

（１）数学科における問題発見や問題解決のプロセスに焦点を当て，ＩＣＴの活用も視野に入れながら，教材の開発と蓄積をさらに行う。

（２）上記の教材を用いた学習指導と評価のあり方の検証のための授業研究を進め，学習者の実際の活動の分析及び彼らの認識の変容の分析によって，数学科において育成すべき資質・能力の指導と評価の研究を進める。

3．研究計画

＜１年次の研究成果＞

第１年次では，「数学的に考える力」や「数学的な思考の習慣」，アメリカのCommon Core States スタンダードで示された数学的プロセス等の関連概念の検討を行いながら数学科において育成すべき資質・能力概念を理論的に整理してきた。また，そのような資

質・能力を育成するための具体的な教材の開発を試みた。
＜２年次＞
　第２年次には，教材の開発と蓄積をさらに進め，数学科において育成すべき資質・能力に焦点化した学習指導・評価モデルについての実践研究を行った。そのために，研究会を５回実施し，そのうちの１回は東京近郊での合宿形式で会議をもち，議論を深めた。

４．研究年度

平成28年度～平成29年度の２年計画とした。

５．研究の組織

氏　名	所　　属	分　　担
清水 美憲	筑波大学人間系教授	研究の統括 代表
西村 圭一	東京学芸大学教育学部教授	「資質・能力」概念の理論的検討と教材開発
清野 辰彦	東京学芸大学教育学部准教授	「数学的に考える力」の理論的検討と教材開発（渉外）
大塚 慎太郎	敬愛大学国際学部専任講師	「数学的な思考の習慣」の理論的検討と教材開発（渉外）
榎本 哲士	白鴎大学教育学部専任講師	「オープンエンド問題」の教材開発
平林 真伊	山形大学地域教育文化学部専任講師	海外の研究動向の検討 （オーストラリアを中心に）
花園 隼人	筑波大学人間系特任研究員	海外の研究動向の検討 （米国を中心に）
高橋 広明	東京学芸大学附属国際中等教育学校教諭	教材開発とICT活用の検討
本田 千春	東京学芸大学附属国際中等教育学校教諭	教材開発及び国際バカロレアにおける評価基準の検討
須藤 雄生	筑波大学附属駒場中・高等学校教諭	教材開発と多面的な評価の検討
近藤 俊男	筑波大学附属中学校教諭	教材開発と多面的な評価の検討

（平成30年４月１日現在）

２　これからの時代に求められる数学的な資質・能力とは何か
―「数学的に考える力」と「思考の習慣」に焦点を当てて―

筑波大学人間系教授　清水　美憲

１．「数学的に考える力」の来歴

「特定の課題に関する調査」（国立教育政策研究所, 2006）は，平成19年度から実施されている全国学力・学習状況調査に先だって，日常事象の考察に算数・数学を生かすことや，算数の世界で事象を発展的・創造的に考察することなどに焦点を当て，児童の**数学的に考える力**を調べた調査であった。これは，従来の教育課程実施状況調査や研究指定校による調査の枠組みでは把握が難しい内容について調べることを目的としたもので，「数学的に考える力」の調査はその柱の一つであった。

この「**数学的に考える力**」は，「算数的活動や数学的活動を支え，遂行するために必要な資質や能力などの総称」（p.14）と規定され，具体的には，次のような３つの観点から調査問題が作成された。

・日常事象の考察に算数・数学を生かすこと
・発展的・創造的に考察すること
・論理的に考えること

この調査の内容には，身につけた算数・数学の知識や技能を問題解決場面で活用したり，得られた成果を発展的に考察して一般化したりする過程におけるアイディアや方法に関する事項やその過程を説明することが含まれていた。また，過去の調査では各学年に位置づけられていた調査問題に止まらず，数学らしく考察の範囲を広げて発展的に考える過程や，複数の事象を統合的に考える過程などに焦点化した問題を，学年の枠を越えて出題したことが，現在の全国学力・学習状況調査の「活用」の問題作成の枠組みにも影響している。

さらに，現行の学習指導要領で，算数的活動・数学的活動が指導内容として位置づけられ，算数・数学を学ぶプロセスのあり方についても基準が示されたことを受け，従来のような分析の観点，評価の観点としての「数学的な考え方」の研究よりも広い立場から，数学的に考える力の育成を検討していくことが課題となっているのである。特に，自ら問題を見いだして，それを数学の問題としてとらえ直し，数学的にその解決を図っていく活動に焦点を当てて，数学的に考える力の働く活動を具体的に考えることが必要である。

２．子どもの実態にみる課題

上記の調査では，子どもの実態から，数学教育上の様々な課題が顕在化した。例えば，公園のブランコの動きを横からみた様子について説明する問題（「ブランコの問題」，小４）では，身の回りの事象の中に基本的な図形を見出し，図形の性質を活用して問題解決することに課題があることが浮き彫りになった。

また，貯金をめぐる多数の情報の中から貯金額を求めるために必要な情報を選択し，立式し，貯金額を答える問題（「貯金箱の問題」，小６）では，過剰な情報の中から必要な

情報を一つ選択して貯金額を求めることに比べ，情報を複数選択して貯金額を求めることに課題がみられた。

さらに，おはじきを使って正方形や正三角形をたくさん作っていく問題場面で，数量の関係を図や式に表し，規則性を見出し，規則性の考え方を生かしながら発展的に問題を解決する力を見る問題（「おはじきの問題，小４～小６」では，おはじきの個数が増えると見出した規則性を生かせなくなり，数値を一般化して考えることに課題がみられた。

このような実態は，学習した内容を日常事象と結びつけたりその考察に生かしたりすること，問題解決の方法や考え方を別の場面や問題で生かして活用し，発展的，創造的に考えられるようにすること，自分の考えなどを筋道立てて適切に表現できるようにすることなどに，課題があることを示している。そしてそれらは，近年の全国学力・学習状況調査の「活用」の問題の調査結果から指摘されているところでもある（国立教育政策研究所, 2012）。数学的に考える力の育成は，数学教育の今日的課題となっているのである。　数学は論理を構築していく学問ゆえ，根拠をつねに考え，その確かな根拠に基づいて新たな知識や概念が創出されるものである。授業においては，これは既習事項を積み上げて新たな概念や見方を創り出すことにつながる。したがって，論理に基づいて構築していく上では，根拠を追い求める姿勢が大切となる。それが数学を行う上での習慣であろう。根拠を問う姿勢とその根拠を求める姿勢が思考の習慣として身につく指導を実践したい。

３．算数科・数学科で育成すべき資質・能力として

「数学的に考える力」は，より広く今日的な教育課題の観点からも，これからの算数教育において育成すべき資質・能力として具体的に検討していくべきものである。

各学校では，改訂学習指導要領に基づいて知識・技能を活用して課題を解決するための思考力，判断力，表現力等の育成，言語活動の充実，学習習慣の確立等を基本的な考え方として授業の改善が図られている。特に，算数科・数学科では，算数的活動・数学的活動を充実させ，児童・生徒が学んで身に付けたことがらを実生活や学習に活用することを重視し学ぶ意欲を高め，学ぶことの意義や有用性を実感させる授業を具体化することが重要課題となっている。

このような新しい課題の背景には，現在の子ども達を取り巻く社会環境の変化，特に知識基盤社会の到来があり，さらにその子ども達が将来の社会で活動するために身につけて欲しい資質や能力を明らかにする必要が生じている。実際，OECDによる国際学力調査（PISA）の根底にある「キーコンピテンシー」という考え方や，国立教育政策研究所による「21世紀型能力」の概念等は，そのような資質や能力を展望したものである。

PISAが評価対象としたリテラシーの根底にあるのが「主要能力（キーコンピテンシー）」で，PISAのペーパーテストの焦点の一つは，日常生活や社会生活の様々な問題場面で，学校で学んだ知識や技能を機能的に使えるかどうかを評価することにあった。数学調査では，数学的リテラシー等の評価を意図しながらも，数学の専門的知識を必要としない汎用的な能力の評価が意図されている。

これからの時代に必要とされる子どもに育成すべき資質・能力を整理した国立教育政策研究所による「21世紀型能力」も，このような汎用的な能力に着目し，教科固有の特徴に基づく能力との区分を示している。また，今年３月に示されたこのような資質・能力につ

いての「論点整理」（文部科学省，2014）では，今後の教育課程の見直しのための検討が行われた。そこでは，まず子ども達に育成すべき資質・能力を明確化した上で，各教科等でどのような目標や内容を扱うか，という問いが設定され，教科の役割が問い直された形になっている。

そして，育成すべき資質・能力に対応し，現行の教科目標・内容を，次の三層で再検討することの必要性を指摘している。

ア）教科等を横断する汎用的スキル（コンピテンシー）等に関わるもの
イ）教科等の本質に関わるもの（教科等ならではの見方・考え方など）
ウ）教科等に固有の知識や個別スキルに関するもの

算数科・数学科において育成すべき資質・能力を考える場合，算数・数学の学習を通して身に付く数学的なプロセスに着目することが必須である。

例えば，全国学力・学習状況調査の「活用」に関する問題作成の枠組み（中学校数学）に示された数学的なプロセスでは，日常の事象を数学化すること，与えられた情報を分類整理すること，結果を振り返って考えること，多面的にものを見ること等が示され，その具体的な姿が評価問題の形でみられる。

このような数学的プロセスは，算数・数学の内容に関わる教科固有の価値に支えられて育成され，発揮される能力を示すものとみることができる。子ども達が数学らしく考えて創造的・発展的に学ぶ過程で発揮されるそのような資質や能力を，授業の場で，また学校外の様々な場面で，具体的に点検してみることが重要な検討課題である。

４．「数学的な考え方」の育成との関連

わが国の数学教育の主要な目標には，「数学的な考え方」の育成が掲げられてきた。「数学的に考える力」の上記の規定（「算数的活動や数学的活動を支え，遂行するために必要な資質や能力などの総称」）からもわかるように，「数学的な考え方」は，「数学的に考える力」よりも意味するところが狭く，「数学的に考える力」を分析する視点の一つとして位置づけることが可能である。

これまでにも「数学的な考え方」については，様々な整理や分類が試みられてきたが，「数学的な考え方」を分類・整理する目的は，数学らしい価値ある考え方を指導のねらいにどう盛り込むか，それを学習のプロセスにどう位置づけるかの検討にある。

数学的に考える力の育成とそのための授業について構想する際，子どもが数学的に考える過程を，「特定の課題に関する調査」の３つの柱のように，まずは次の大きな括りで考えて，整理してみることができる。

・日常事象の考察に算数・数学を生かすこと
・発展的・創造的に考察すること
・論理的に考えること

これらの三つの柱自体，さらに授業場面に引きつけて検討する必要があるとみられる。

第一は，日常事象を数学の舞台に載せて考察する過程で，「数学化」や「数学的モデル化」の過程に当たる。この過程では，事象の理想化や，単純化等の方法が鍵である。児童の身近にある事象の中から，これまでに学習してきた基本的な図形を見出したり，図形の性質を活用して問題解決したりすることなどが考えられる。また，複数の部屋の「混み具

合」を比較するために，単位量当たりの大きさで問題をとらえて表現する場面なども日常事象が数学の舞台で考察されている。

第二は，数学の世界の事象を考察し，要素間の関係を整理したり，発展的・統合的に考察して体系を作ったりする過程である。この過程では，帰納，演繹，類推（類比）といった推論や，試行錯誤や試行接近などの方法が用いられる。また，考察結果を振り返って見直すことも大切である。具体的には，数量の関係を図や式に表し，その考え方を生かして発展的に問題を解決して一般化すること，条件を変えた場面で問題の構造をとらえて解決することなどが含まれる。

第三は，根拠をもって論理的に考え，解釈したり表現したりする過程で，いわば上の二つ過程を支える過程である。根拠となることがらを明らかにしたり，仮定されていることを基に筋道立てて考えたりすること，具体的な事例から共通のきまりを見出すことなどが含まれる。さらに，そのようなことがらを数学らしい表現を用いて表現し，伝えることも大切である。

さらに，評価の観点の一つとしての「数学的な考え方」に対し，数学的に考える力の育成のためには，子どもが算数の知識や技能を駆使し，数学的な考え方を発揮して，算数・数学にふさわしい態度で考える活動全体に目を向けることが大切である。

そのような数学にふさわしい態度について，例えば，ゴールデンバーグら（註）は，子ども達に身につけてほしい数学的な思考の習慣として，次の５点を挙げている。

・言葉の意味をよく考える
・主張を正当化し推測を確かめる
・合意したことと論理的帰結を区別する
・答え，問題，解決方法を分析する
・問題解決の方略を探して使う

ここには，数学における言葉の意味（定義）の重要性や，根拠をあげて論理的に説明することの大切さ，仮定していることと結論として導かれる事を区別することの意味等，数学の特質を踏まえた思考の習慣が示されている。

例えば，小学校第３学年の「三角形」の学習では，いろいろな大きさの三角形を辺の長さに着目して分類整理し，三角形の類別を行う。この学習で，三角形の仲間分けをする子どもの視点は柔軟で，「平べったい」「同じ長さがある」など，様々な分類の観点が出される。ある授業では，「背が高い三角形」や「横にのびた三角形」という分類をした児童がみられた。実は，この児童は，辺の長さと角の大きさの両者に注目して，鋭角三角形と鈍角三角形を区別できることに触れたのであり，彼が集めた三角形はそのことを示していた。

上のような場面では，図形の特徴を日常の用語で複数の観点から把握した上で，さらに辺の長さや角の大きさに絞って数学的に把握していく過程がみられる。そのような過程では，要素を分類・整理して集合全体を類別するプロセスがみられるし，やがて集合の関係（包含関係）を考えることになる。実際，円の半径がどこでも等しいことを利用してコンパスと定規を用いて二等辺三角形をかく方法について再考し，正三角形のかきかたを導く過程などは，数学的なプロセスの例である。

数学的に考える力についての上述の三つの柱を想定しつつ，授業における様々な学習場

面について，このような具体的な活動を検討していくことが大切である。

５．おわりに

数学的に考える力の育成を図るためには，算数的活動・数学的活動を支え，遂行するために必要な資質や能力を具体的に検討することが必要である。子どもが自ら問題を見いだして，それを数学の問題としてとらえ直し，数学的にその解決を図っていく活動全体に焦点を当てて，そこでの数学的なプロセスを具体的に明らかにすることが必要である。

現在の教室で学んでいる子ども達が，やがて社会で活動する時代には，どんな能力が必要になるのか。今日，そしてこれからの知識基盤社会で活動する社会人が身につけておくべき素養は何か。また，それに先立って学校教育段階で準備されるべき資質や能力とは何か。算数科・数学科でこそ育成できる資質・能力を明らかにすることは，実は目標を再定義することにもなっている。授業を通した実践的研究を積み重ね，そのような資質・能力を具体的に明らかにしていくことが求められている。

引用・参考文献

１）国立教育政策研究所教育課程研究センター（2006），『特定の課題に関する調査（算数・数学）調査結果』国立教育政策研究所
２）国立教育政策研究所教育課程研究センター（2012），『全国学力・学習状況調査の４年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ～児童生徒への学習指導の改善・充実に向けて～　小学校編』教育出版
３）国立教育政策研究所教育課程研究センター（2013.3），『社会の変化に対応する資質や能力を育成する教育課程編成の基本原理』
４）文部科学省（2014.3），『育成すべき資質・能力を踏まえた教育目標・内容と評価の在り方に関する検討会―論点整理―』
５）P. Goldenberg et al. (2003) Mathematical Habits of Mind for Young Children. In F.K. Lester (ed.) *Teaching Mathematics Through Problem Solving: Grades PreK-6*, National Council of Teachers of Mathematics

３　「数学的に考える力」の育成を目指した教材とその分析
ー施設配置問題を例にしてー

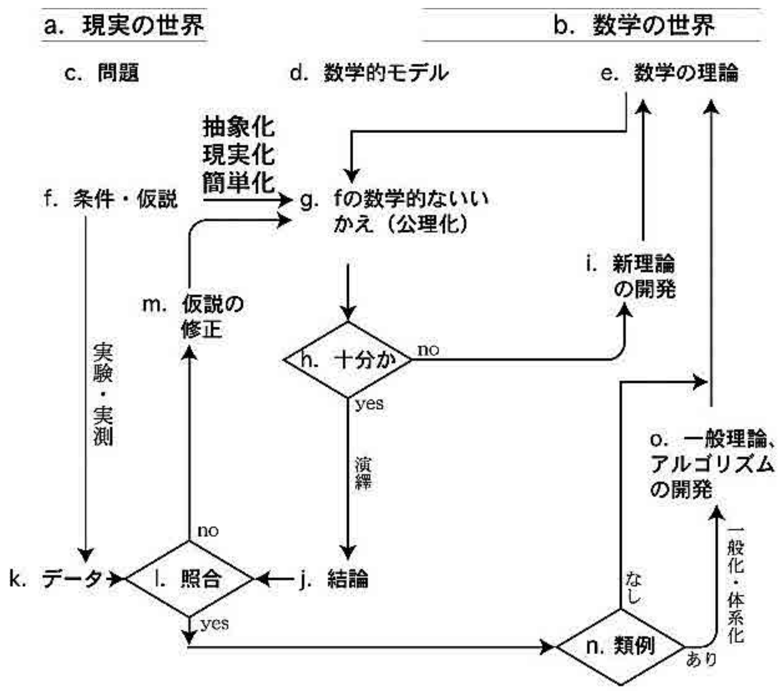
東京学芸大学准教授　清野　辰彦

１．はじめに

数学は，現実の事象の問題解決を契機として生み出されてきた。エジプト人達が，ナイル川の氾濫によって，毎年，畑の区画を正確に再現する必要に迫られ，測量術を生み出し発達させたのは，その典型である。以降，数学は，論理性・形式性・抽象性という特性を持ち発展してきた。こうした数学の発展過程では，対象の数学化が繰り返し行われてきた。つまり，現実の事象の数学化と数学の事象の数学化である。フロイデンタールは，この２つの活動こそが，人間が学習するべき内容であると主張した（Freudenthal，1968）。

上記の２つの数学化は，我が国の数学教育においても着目されてきた。例えば，島田茂ら（1977）は，２つの数学化の数学教育的価値に着目し，その具体的な活動を数学的活動として詳述した（**図１**）。また，近年では，中央教育審議会初等中等教育分科会の教育課程部会算数・数学ワーキンググループが，２つの数学化を明示化した図２の過程を提起した（文部科学省，2016）。

図２の左側の過程は，「日常生活や社会の事象」から数学的な問題を見出し，それを数学化して「数学的に表現した問題」をつくり，数学的処理を施して結果を得，得られた結果を解釈したり，類似の事象にも活用したりして適用範囲を広げるという過程である。一



数学的活動の模式図(島田 茂，1977)

図１　数学的活動の模式図（島田ら，1977）

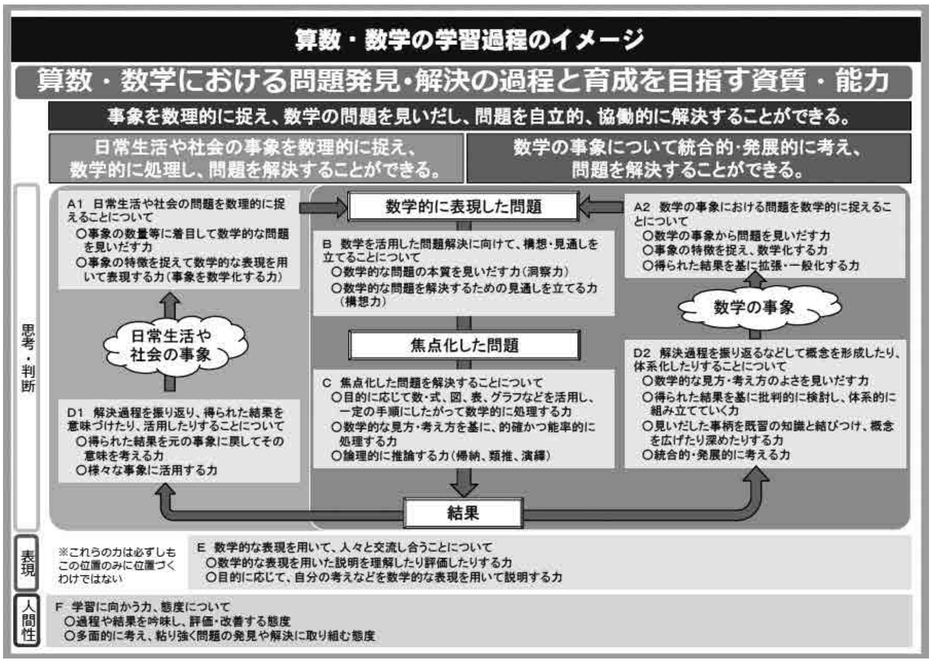


図２　算数・数学における問題発見・解決の過程

方，右側の過程は，「数学の事象」から問題を見出し，それを数学化して「数学的に表現した問題」をつくり，数学的処理を施して結果を得，解決の過程や結果を振り返って統合的・発展的に考察する過程である。双方の過程は，独立したものではなく，相互に関わり合って進行することが期待されている。「数学的に考える力」は，この双方の過程を経験しながら，育成されていくと考える。

本稿では，「数学的に考える力」の育成を目指した教材を示すとともに，生徒の立場から，それらの問題の解決過程を記述し，その過程の分析を通して，教材の教育的価値について考察することを目的とする。

２．問題の設定：施設配置問題

本稿では，教材として，施設配置問題に焦点をあてる。施設配置問題とは，「空間内において最適な点を選択する問題の総称」（久保幹雄編集，2002，p.1148）を意味するが，その中でも本稿では，1median問題に焦点をあてる。median問題とは，以下の問題とされる。

「median問題　顧客から最も近い施設への距離の「合計」を最小にするようにグラフ内の点または枝上，または空間内の任意の点から施設を選択する問題」（久保幹雄編集，2002，p.1149）

Median問題のうち，選択する施設数が１である場合を１median問題という。１median問題は，施設配置問題の古典とされる「フェルマーの問題」が位置付けられる。１median問題は，解決する強い動機づけを与えてくれるとともに，その解決過程の中に，数学教育的価値が多く潜在すると考えたのが，この問題に焦点をあてた理由である。

以下に，考察する問題を記述する。

問題１　タケダ商事は，**図３**の３地区に洋服の店舗（A，B，C）を所有している。タケダ商事では，洋服を一括して管理する大規模な倉庫の建設を計画している。建設した倉庫から，各店舗に洋服を配送する予定である。倉庫の建設にあたって，建設した倉庫と各店舗との往復にかかる配送費をできる限り少なくし，配送にかかる費用を最小にしたいと考えている。どこの位置に倉庫を建設するのがよいであろうか。あなたの考えを述べなさい。

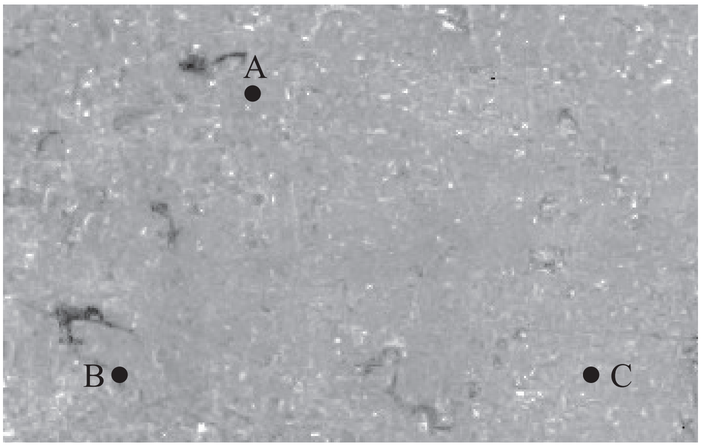


図３　洋服店の位置

３．想定される解決過程（１）

建設する倉庫の位置を点Pとする。配送費を最小にする位置は，点Pから３点までの距離が等しい位置であると予想し，外心を求めようとすることが考えられる。その際，作図により外心を求める方法とICTを用いて外心を求める方法が想定されるが，本稿では，geogebraを用いて外心を求める方法を記述する。以降も，geogebraを用いた考察を前提に，想定される解決過程を記述する。

図４は，geogebraの距離測定機能を用いて，点E（外心）から各点への距離を表示したものである。３点への総距離は，$5.18 \times 3 = 15.54$となる。

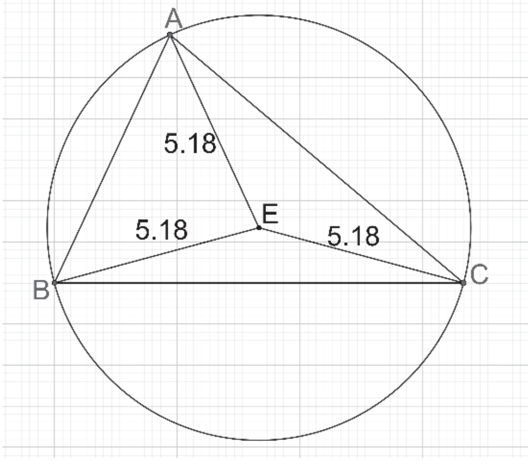


図４　外心における総距離の値

EA+EB+ECでの総距離が最小になっているのかを判断するために，点Pを動かし，PA+PB+PCの値を求める。実際，点Pを動かしてみると，PA+PB+PCの値が上記の15.54よりも小さい値になるときがあることに気づく。例えば，図５の場合，その値は14.87である。

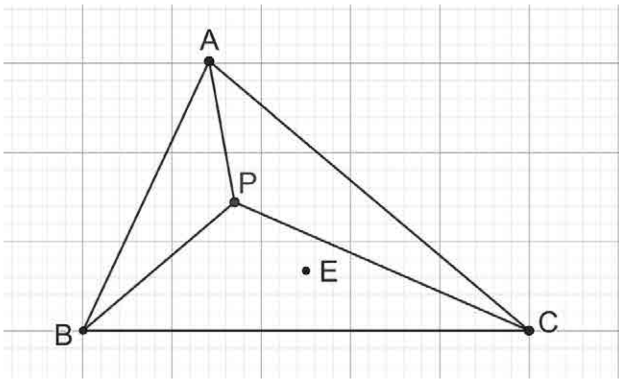


図５　点Pを移動させたときの総距離の値

そこで，**図５**の点Pの位置が，ある特殊な位置になっているのではないかと考え，外心以外の他の３心（傍心の場合は点Pが三角形の外側に位置づくので，明らかに最小値にはならない）の場合について調べてみる。その結果，垂心（点H）・内心（点I）・重心（点G）の場合，各３点への総距離はそれぞれ14.99，14.90，15.08であり，これらは最短距離ではなかった。

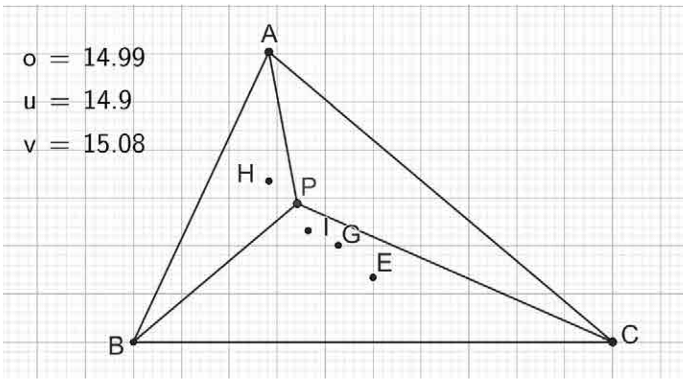


図６　垂心・内心・重心における総距離の値

では，点Pがどの位置にあるとき，PA+PB+PCまでの総距離が最小になるのか。**図６**をもう一度観察してみる。３点までの総距離が小さかった場合の点Pは，∠APB＝∠BPC＝∠CPAのように見える。そこで，各点までの距離が等しい点を考えた次は，各点とのなす角が等しい点について考える。

まず，角度測定機能を用いて，∠APB＝∠BPC＝∠CPA＝120°となる点Pを設定し，各点と点Pとの総距離を調べる。その値は，14.86であり，先ほど試行錯誤によって見出した値とほぼ同様であった。では，∠APB＝∠BPC＝∠CPA＝120°のとき，点Pから各点までの総距離は最小になるのか。

これまで考えてきていることは，PA+PB+PCの長さである。今のところ，点Pがハブの位置にあり，PAとPBとPCは異なる方向を向いている。PAとPBとPCをなるべく１つの線分で表すことによって，線分の長さについて考察を深めることができると考えられ

る。そこで，PBを一辺とする正三角形を作り，PBの長さと等しい長さのPDを作る。また，PAの長さと等しい長さの線分を点Dから作り，DFとする。この際，△ABP≡△FBDとなるように，点Fを決める。

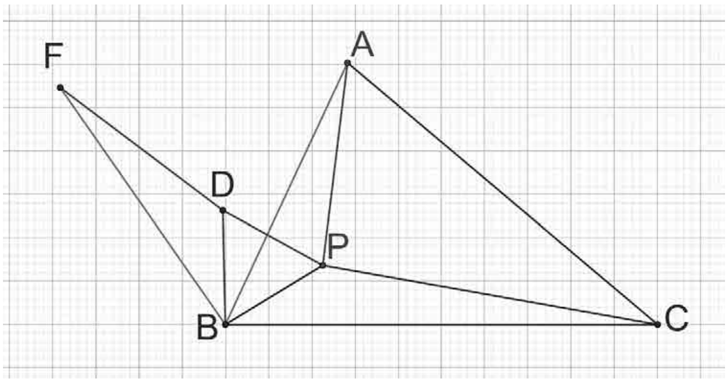


図７　△ABP≡△FBDの作図

図７は，△ABPを60°回転させ，△FBDを作図した図である。この場合，三角形ABFは正三角形になっている。PA+PB+PC＝FD+DP+PCであり，この線分の長さが最小となるのは，FDとDPとPCが直線になるときである（**図８**）。

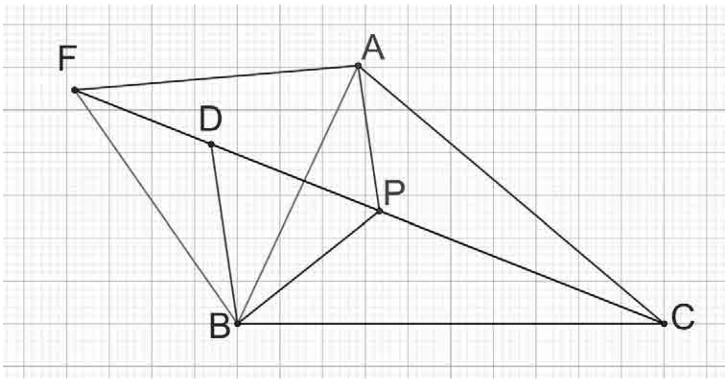


図８　FDとDPとPCが一直線の位置にある場合

FCは直線であり，∠DPB＝60°であるから，∠BPC＝120°となる。同様に，線分PAと線分PCの長さを移して考えると，∠APJ＝60°より，∠APD＝60°となり，∠APB＝120°となる。それゆえ，∠BPC＝120°，∠CPA＝120°，∠APB＝120°となる（**図９**）。

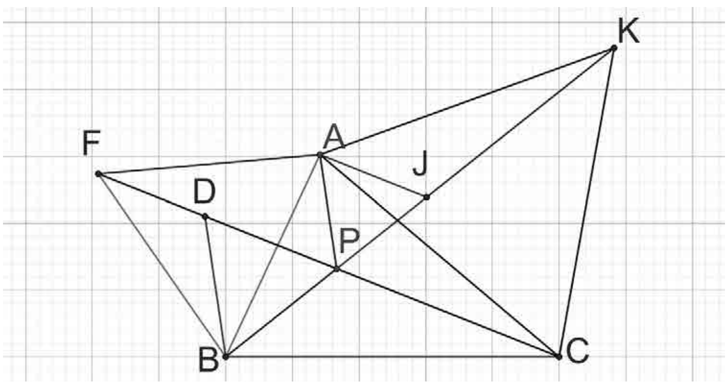


図９　KJとJPとPBが一直線の位置にある場合

上記のことから，円周角の定理の逆を用いると，点A，F，B，Pは同一円周上にあるとともに，点A，P，C，Kも同一円周上にあることがわかる（**図10**）。それゆえ，辺ABを一辺とする正三角形と辺ACを一辺とする正三角形をかき，それらの外接円を描いた時の交点（Fermat点）が，PA+PB+PCの値を最小とする点Pの位置となる（Steiner点）。つまり，∠APB＝∠BPC＝∠CPA＝120°のとき，点Pから各点までの総距離は最小になる。

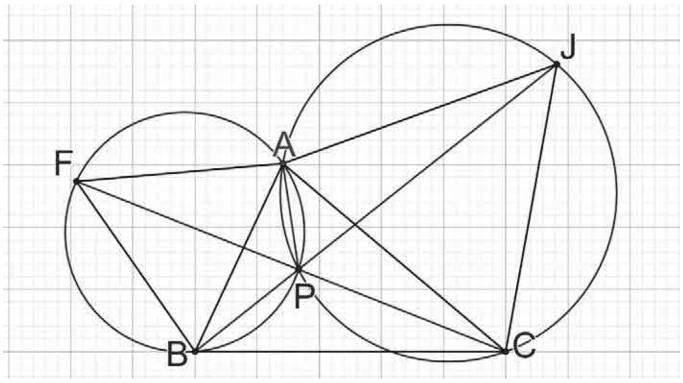


図10　２つの外接円の交点

これで，**問題１**に対する１つの考えを示すことができた。すなわち，「どこの位置に倉庫を建設するのがよいであろうか」に対しては，それぞれの店舗を点A，B，Cとしたとき，三角形ABCの内部に点Pをとり，∠ADB=∠BDC=∠CDA=120°となるような点Pが建設場所となることがわかった。

　では，３つの店舗がどのような位置にあっても，いつでも同様な結果になるのであろうか。次のような場合を考えてみる。

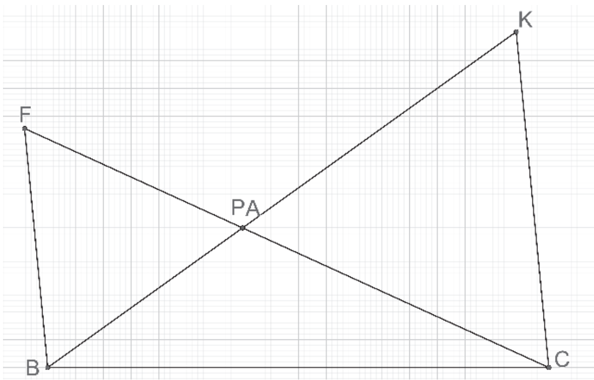


図11　∠BAC＝120°の場合（１）

∠BAC＝120°の場合，点Aと点Pは一致することになる。つまり，点AとFermat点，Steiner点が一致する。それゆえ，総距離が最小となるのは，倉庫を点Aに設置したときであり，その長さは，AB＋ACとなる。

　また，次のように考えることもできる。辺ABの垂線を点Bに引き，辺ACの垂線を点Cに引き，その交点を点Nとする。∠BAC＝120°より，∠BNC＝60°となる。点Aを通る直線を引き，先の垂線との交点を点L，点Mとし，△LMNが正三角形となるようにする。△LMNが正三角形の場合，三角形の内部の点Pから，各辺に垂線を下したときの線分PQ，PS，PRの和は，各辺に対する高さとなり一定となる。また，三角形の斜辺の長さとそれ以外の辺の長さとの関係より，PA＋PB＋PC＞PR＋PQ＋PS＝AB＋AC。それゆえ，総距

離が最小となるのは，倉庫を点Aに設置したときであり，その長さは，AB＋ACとなる。

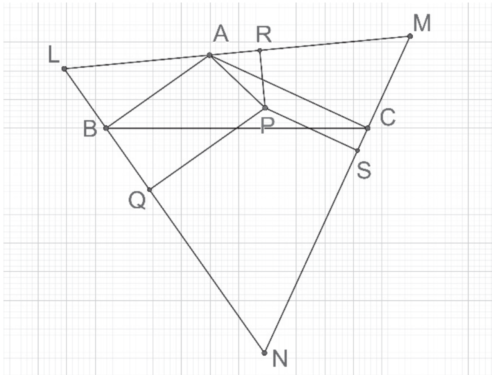


図12　∠BAC＝120°の場合（２）

∠BAC＞120°の場合も，総距離が最小となるのは，倉庫を点Aに設置したときであり，その長さは，AB＋ACとなる.

４．問題の再設定

　次に考える状況は，各店の来客数が異なる場合，どこに倉庫を建設すればよいかというという状況である。

問題２　タケダ商事は，**図３**の３地区に洋服の店舗（A，B，C）を所有している。タケダ商事では，洋服を一括して管理する大規模な倉庫の建設を計画している。建設した倉庫から，各店舗に洋服を配送する予定である。倉庫の建設にあたって，建設した倉庫と各店舗との往復にかかる配送費をできる限り少なくし，配送にかかる費用を最小にしたいと考えている。

　一方，各店舗は以下のように，年間来客数に大きな違いがあるため，その来客数に合わせて，洋服の配送ができるようにしたいと考えている。

店名	年間来客数
A店	５万人
B店	７万人
C店	９万人

どこの位置に倉庫を建設するのがよいであろうか。あなたの考えを述べなさい。

５．想定される解決過程（２）

問題２では，来客数に応じた重み付けを行い，倉庫を建設する必要がある。C店の来客数が多いので，**問題１**よりも，点Cに近い位置に倉庫をつくればよいと予想できる。そこで，倉庫の位置である点Pを点Cに近づけながら，5PA+7PB+9PCの値が最小となる位置を探ってみる。試行錯誤によって見出される5PA+7PB+9PCの値が最小となる点Pの位置を**図13**に示す。

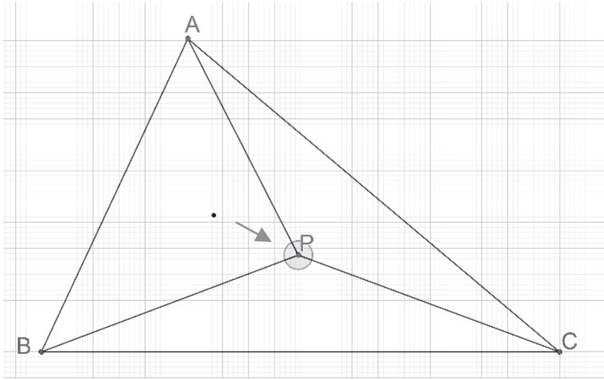


図13　試行錯誤により見出した点Pの位置

問題１においては，PA+PB+PCの値が最小となる点Pの位置は，∠APB＝∠BPC＝∠CPA＝120°となる点であったが，**問題２**では，その角度の関係は崩れている。では，どのような角度になっているのか。角度を計測した図が，**図14**である。

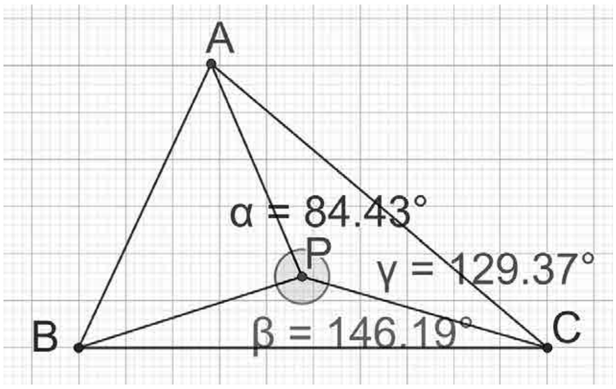


図14　∠APBと∠BPCと∠CPAの角度

角度は全く異なるが，各点における重みの大小と角度の大小を関連付けてみることはできる。点A，点B，点Cの重みをそれぞれ５，７，９とすると，値が小さいほど，その点に対応する辺がつくる角が大きくなっているとみることができる。例えば，点Aは一番角度が大きいβに対応し，点Bは二番目に角度が大きいγに対応し，そして，点Cは三番目に角度が大きいαに対応している。

では，試行錯誤による方法以外に，5PA+7PB+9PCの値が最小となる点Pの位置を見出す方法はないのであろうか。

この問を追究するために，まず**問題１**において考察してきた考えが，**問題２**において用いることができないかを考える。**図10**では，点A，Bともう一つの点（点F）を通る外接円を描くとともに，点A，Cともう一つの点（点J）を通る外接円を描き，２つの外接円の交点が，PA+PB+PCの値を最小にする点Pであることを見出した。**問題２**においても，5PA+7PB+9PCの値が最小となる点Pの位置は，２つの外接円の交点になると考えてみる。**図14**で描いた点Pを用いて，外接円を描いてみると**図15**のように表せる。

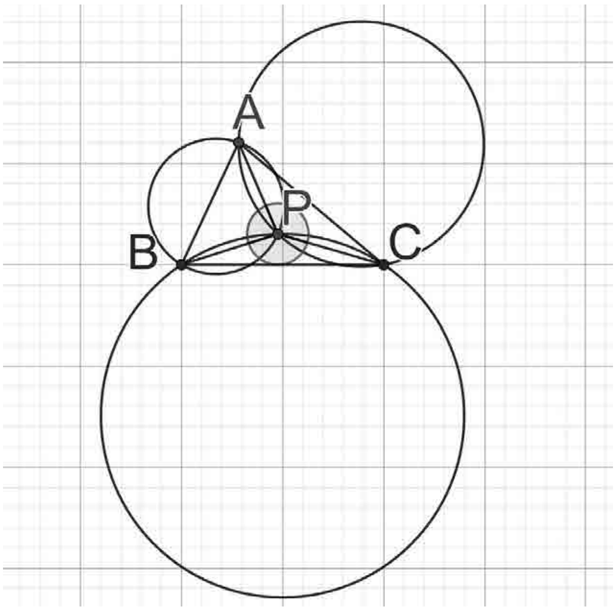


図15　図14で見出した点Pをもとに描いた外接円

点Fが点A，B，Pを通る円上の点であり，点Pの対角であるとすれば（**図16**），円に内接する四角形の条件より，∠AFB＋∠APB＝180°になる。よって，∠APB＝84.43°であるから，∠AFB＝95.57°になる。

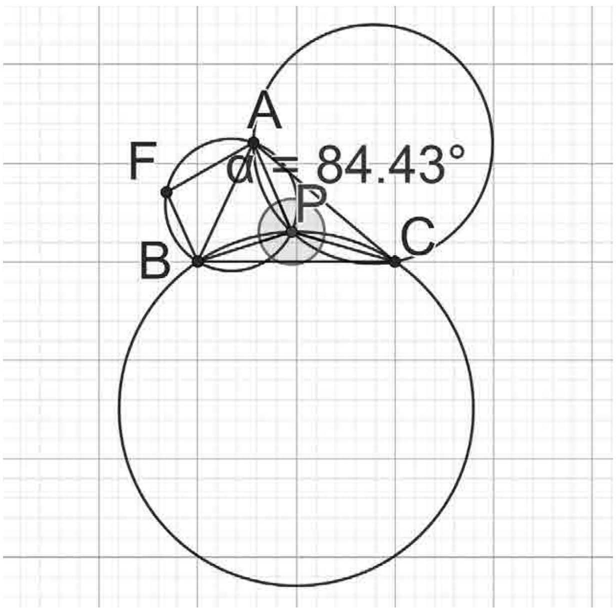


図16　円に内接する四角形AFBP

これまでは，試行錯誤によって見出した点Pから，３点が通る外接円を特定してきた。しかし，本来，点Pは見出そうとしている点であるから，実際には，点A，B，Fから外接円を特定しなければならない。つまり，**図16**でいう点Fをどのようにすれば探すことができるかが問題である。

ここで，重み付けについて考えてみる。これまでの考察では，重み付けは，図形の世界で考えられていない。重み付けを図形の世界で考えることはできないか。そこで，重み付けを長さに置き換えて考えてみることにする。すなわち，年間来場者数が９万人，７万人，

５万人を９cm，７cm，５cmの三角形に置き換える（重み付け三角形と呼ぶ）。そして，それぞれの角度を測定する。

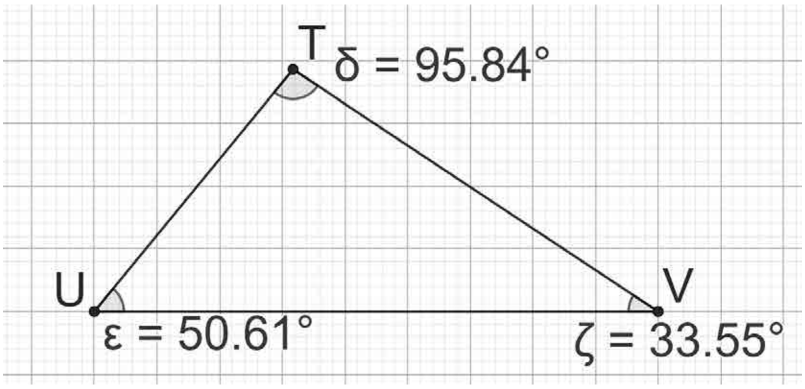


図17　重み付け三角形の内角

ここで，**図14**を再掲し，それらの図を比較する。

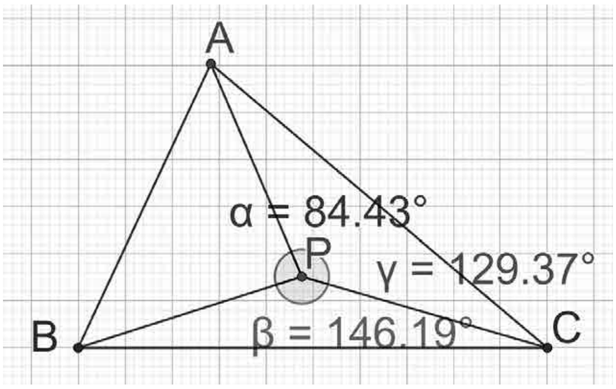


図18　∠APBと∠BPCと∠CPAの角度（再掲）

それぞれの角度に規則性がないかを見出すために，**表１**に整理する（規則性を見出すことを目的としているため，角度は小数点以下を切り捨てている）。

表１　角度を整理した表

	対応する角:（１）	対応する角:（２）	(１)+(２)
重み５（点A）	146°	33°	179
重み７（点B）	129°	50°	179
重み９（点C）	84°	95°	179

表１を見ると，（１）＋（２）の和がおよそ180°になることがわかる。これは，重みを長さに変換した図を**図17**のように描き，それぞれの内角の大きさを調べ，その角の外角の大きさを求めると，その大きさが**図17**における対応する角になることを意味していると考えられる。

これがわかれば，点Pの位置は次のように考えることができる。例えば，**図17**において，重み９に対応する角は95°であるから，その外角の大きさは85°となる。そこで，∠APB＝85°となるように，点Pの位置を考える。また，重み７に対応する角は，50°であるから，その外角の大きさは130°となる。そこで，∠APC＝130°となるように，点Pの位置を考える。上記のことをふまえれば，点Pの位置を一点に決定することができる。

しかし，作業手順が多く，点Pの取り方が面倒である。そこで，より簡潔な方法で点Pの位置を決定することができないかについて考えてみる。**図16**の考察を基にすると，∠AFBの大きさと**図17**の∠UTVの大きさが等しくなるように，点Fを決めればよいことがわかる。つまり，**図17**の三角形と相似な三角形を辺AB上に作ればよい。また，同様に，**図17**の三角形と相似な三角形を辺AC上にも作り，点A，F，Bを通る外接円と，点A，J，Cを通る外接円を描き，点Pを決定すればよいと考えられる。

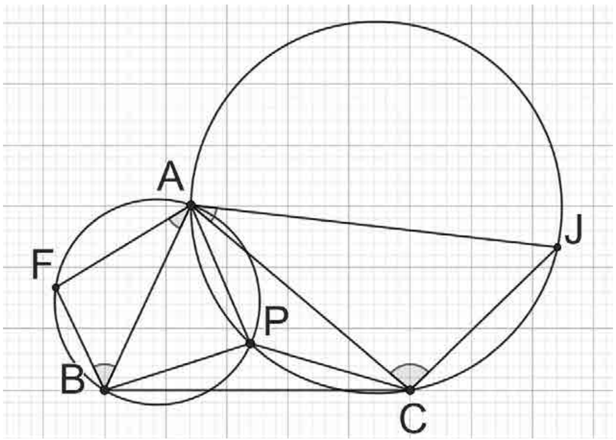


図19　重み付け三角形と相似な三角形を用いて描いた外接円

この方法は，**問題 1** の方法を使用していると解釈できる。**問題 1** では，三角形ABCの各辺に，正三角形を描いて考えた。なぜ正三角形であるか。それは，各頂点における重み付けが全て等しいためであると解釈できる。また，各辺に相似な三角形を描いていたとみることができる。ここまでで，5PA+7PB+9PCの値が最小となる点Pの位置の決定の仕方を見出すことができた。

では，そもそもなぜ**図17**のように，重み付け三角形の外角から，総距離が最小となる点Pの位置を求めることができるのか。そこで，点Pの特徴を考え直してみる。点Pは，重みをもった点A，B，Cから引かれていながらも，「つり合い」がとれた点であると考えられる。「つり合い」がとれていることを表現するのに便利な数学的概念がベクトルである。つまり，「つり合い」がとれているとは，$\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}=-\overrightarrow{PA'}$になっていることを意味している（**図20**）。

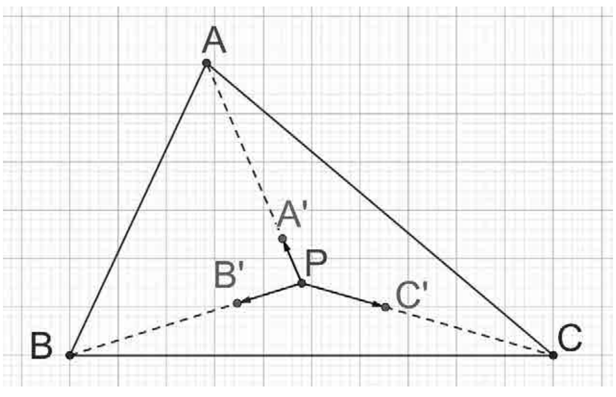


図20　「つり合い」がとれている状態

この点Pを始点としたベクトルを平行移動させ，つないでいくと，きれいに閉じた三角形ができることがわかる（**図21**）。この三角形PA"C’が，重み付け三角形と相似になる

のである。∠A"PC' はA' PC' の外角であり，∠A"C' PはB' PC' の外角であり，そして∠PA"C' はB' PA' の外角となっているので，重み付け三角形の外角から，点Pに関わる角度を求めることができるのである。

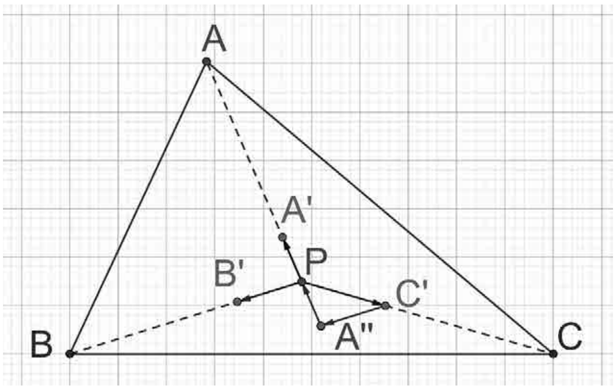


図21　重み付け三角形の出現

６．考察

本節では，これまで記述してきた解決過程を分析し，教材の教育的価値について考察する。

問題１は，建設する倉庫と各店舗との往復にかかる配送費を最小にする倉庫の位置を決定する問題であった。この問題を考えるにあたっては，様々な仮定を置く必要がある。例えば，洋服を配送するトラックは，倉庫から出発し，店舗に洋服を配送した後，倉庫に戻り，また洋服を積んだ後，異なる店舗へと移動するという仮定である。つまり，倉庫を経由せずに，A店から，B店へと移動することはないという仮定である。また，配送費は，倉庫と各店舗との距離の総距離のみで決定するという仮定である。つまり，配送するトラックの燃料代の変動は考慮に入れないという仮定である。そして，総距離は，倉庫から各店舗までの直線距離で考えるという仮定である。こうした仮定を置くことによって，数学の問題へと変換することができる。「数学的に考える力」には，「現実の問題」を「数学の問題」へと変換する力も含まれており，本教材では，この力を育成することが可能である。

問題１の解決では，倉庫から各店舗までの距離が等しい点である外心が倉庫の位置になるのではないかという予想（**図４**）から始まり，既習の５心について調べる活動（**図６**）が想定された。また，線分を移動させるために，三角形を60° 回転移動させる考え（**図７**）が想定されたり，２つの外接円の交点として，倉庫の位置を決定する考え（**図10**）も想定されたりした。こうした活動は，既習の幾何に関する知識を活用して，問題解決する姿が具現化した姿であり，数学的に考えている姿であると言える。したがって，現実の問題を幾何の知識を活用して解決する本教材は，「数学的に考える力」の育成が期待できる。また，**問題１**では，**図11**のように，「各店舗の位置が，問題文の位置になかった場合，倉庫の位置はどこになるのだろうか」という新たな問題が自然と生成されうる。このように，「現実の世界」と「数学の世界」を往還しながら，解決が進行するのが本教材の特徴である。

問題２は，来客数に応じた重み付けを行い，倉庫の位置を決定する問題である。**問題２**

は，**問題１**よりも一層，試行錯誤が行われている。だが，単に試行錯誤を行い，倉庫の位置を見出すだけでなく，その位置をより簡潔に，より明瞭に見出すことができないかを考えている。この思考が「数学的に考えること」であり，本教材では，この力を育成することが期待できる。

また，**問題２**を解決するために，**問題１**で考察してきた方法を活用している点が特徴的である。例えば，**問題１**で外接円を描いたので，「外接円を描くように考えることはできないか」を問い，考察している（**図16**）。さらに，**問題１**で考察してきた方法と**問題２**で考察してきた方法を同じ視点で統合できないかを考えている。具体的には，まず，**問題１**では，三角形ABCの各辺に，正三角形を描いて考えてきたが，なぜ正三角形であるかについて考え，「各頂点における重み付けが全て等しいため」であると解釈している。そして，**問題１**と**問題２**はともに，各辺に相似な三角形を描いていたとみることができると統合している。統合は，数学的に考えることであり，その活動が期待できる点が本教材の教育的価値の一つである。

７．研究のまとめと今後の課題

本稿では，「数学的に考える力」の育成を目指した教材を示すとともに，生徒の立場から，それらの問題の解決過程を記述した。そして，解決過程の分析を通して，教材の教育的価値について考察した。

「数学的に考える力」を育成するためには，「数学的に考える」活動をより多く経験させることが不可欠である。しかし，一方で，その質が重要である。「数学的に考える」活動としては重要であるが，あまり経験させることができていない活動はないかという視点で，教材を整理していくことも必要であろう。また，小学校，中学校，高等学校全体を視野に入れ，「数学的に考える力」をどのように育成していくべきかを検討，整理することも課題である。

引用・参考文献

アルフレート・ヴェーバー著，日本産業構造研究所訳（1966），工業立地論，大明堂

Freudenthal,H.（1968）.Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1（1）, 3-8.

H.ステインハウス（遠山啓訳）（1976），数学スナップ・ショット，紀伊國屋書店

小林みどり（1996），応用数学入門，牧野書店

久保幹雄，田村明久，松井知己編集（2002），応用数理計画ハンドブック（普及版），朝倉書店

栗田治（1996），施設配置モデル－社会のための数学の例－，オペレーションズリサーチ，41(３)，174-177

文部科学省（2016），算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめについて，http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo３/073/sonota/1376993.htm（2018.８.１ 最終確認）

岡部篤行，鈴木敦夫（1992），最適配置の数理，朝倉書店

R.Blackford，P.Tayor（1980），Industrial Location，In The Spode Group (Eds.), *Solving*

Real Problems with Mathematics Volume 1 (35-45), Cranfield Press
R.クーラント，H.ロビンズ（森口繁一監訳）（1966），数学とは何か，岩波書店
島田茂編著（1977），算数・数学科のオープンエンドアプローチ，みずうみ書房
吉村直道，河村泰之（2007），最短連結問題に関する数学授業の実践報告－NP-困難問題の教材化への試み-，愛媛大学教育学部紀要，54（１），91-102

４　問題を発展的に考察する習慣を培うための授業づくりの視点
―「万華鏡の模様」を例に―

東京学芸大学教授　西村　圭一

１．はじめに

「解を求めてから数学が始まる」と言われることもあるように，問題を発展的に考察していく，サイクリックなプロセスにこそ，数学的活動本来のおもしろさがある。学校段階が上がり，数学の学習が進むほど，問題を発展的に考察できるようになっていくことが期待されるが，日本の高等学校数学科の授業を散見すると，実際にはそうはなっていないことが多いようである。生徒が教師から指示されなくても，自ら発展的に考察することを習慣化していくことを目指したい。

本稿では，「万華鏡の模様」の授業を例にとり，問題を発展的に考察する習慣を培うことをめざすと，授業づくりがどのように変わりうるかを検討し，そのような授業づくりの視点を提案する。

２．「万華鏡の模様」における発展的な考察

2017年度全国学力・学習状況調査の中学校数学において，万華鏡の模様を対称移動や回転移動を視点に考察する問題が出題された。また，国立教育政策研究所から，この問題を用いた「授業アイディア例」が提示されている（国立教育政策研究所，2017）。筆者は，この「授業アイディア例」を参考にした，滋賀県豊郷町立豊日中学校の岩崎剛教諭の授業を参観した。はじめに，その授業の概要を示す。

（１）滋賀県豊郷町立豊日中学校・岩崎剛教諭の授業の概要

2018年１月下旬，中学校１年生を対象に行った授業である。この授業の目標は以下の通りである。

○対称移動に関心をもち，図形を移動したり，移動の前後の２つの図形の関係を考えたりしようとしている。【関心・意欲・態度】

○移動前と移動後の２つの図形の関係を数学的な用語を用いて表現できる。【数学的な技能】

まず，万華鏡の中をCCDカメラで映し，プロジェクターで投影した。そして，「どうして，こんな模様が見えるのか」と投げかけた。生徒から，「鏡に映っているから」という声が挙がった。そこで，**図１**の「R」について，３枚の鏡を正三角形状に配置した万華鏡で覗くとどのように見えるかを問うた（全国学力・学習状況調査の問い）。生徒はア～エのうちのどれになるかを選び，そう判断した理由をワークシートに記述した。教師は「鏡が対称の軸になっている」という説明を書いていた生徒を指名し，全体で共有した。

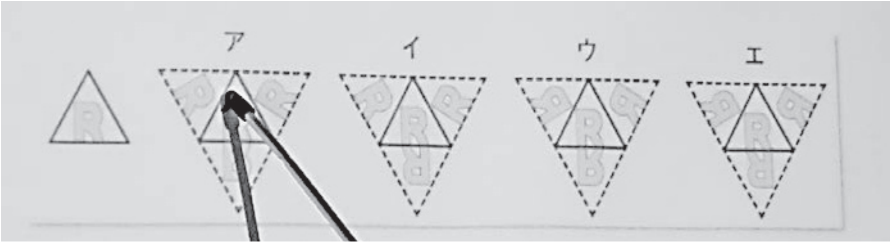


図１　「R」の見え方

次に，**図２**のように，正三角形を２色で塗り分けた模様がどのようにみえるかを考えさせた。

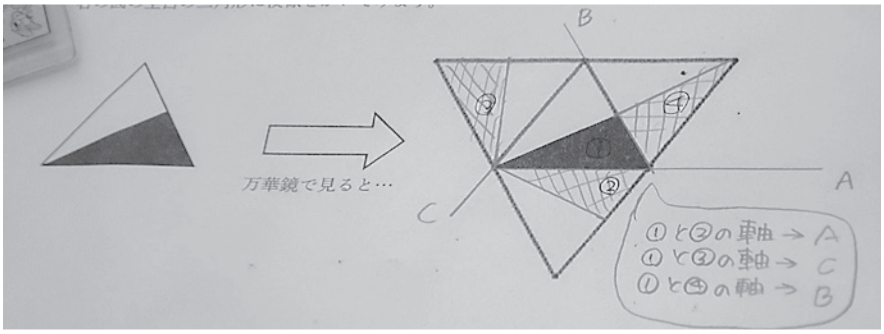


図２　鏡を対称の軸として捉えて考えた生徒

考えがまとまった時点で，グループに１つずつ，３枚の鏡を正三角柱状に配置した万華鏡を渡し，どのように見えるかを確認させた。

さらに，**図３**のように見えるときの基の図形を問うた。

図３　６つの正三角形に分割した生徒

１つの正六角形を６つの正三角形に分割する生徒が多かったが，中には**図４**のように考えた生徒もいた。これは教師の意図していたことであり，両者の考えを取り上げるとともに，実際に万華鏡で覗いた様子をCCDカメラで映し確認した（**図５**）。

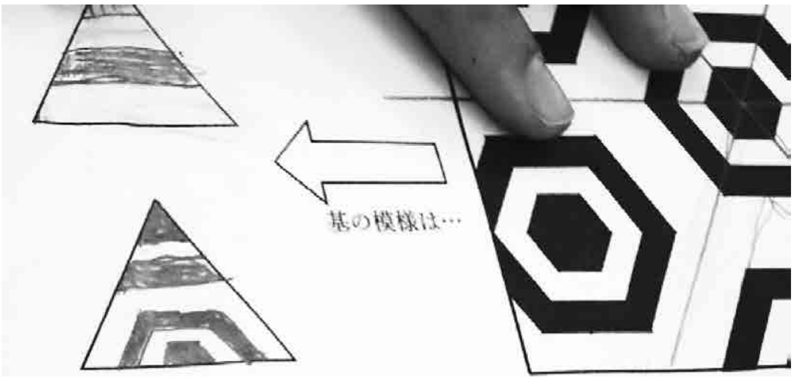


図４　６つの正三角形に分割した生徒

図５　CCDカメラを用いて投影した様子

（2）授業の工夫点

この学校の数学科では，「授業アイディア例」を参考にしながら学習指導案を作成した。

「授業アイディア例」では「万華鏡の模様の中から様々な図形の移動を捉え，移動前後の２つの図形の間に成り立つ事柄について説明する」活動に焦点を当て，**図６**の「ア」と「ウ」の三角形の関係についても，**図７**のように着目させている。

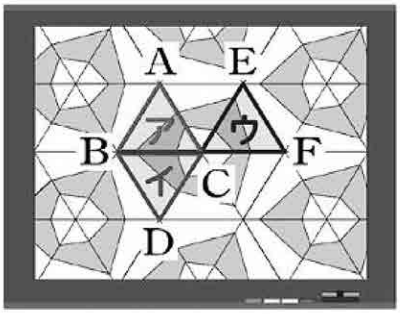


図６　「授業アイデア例」より抜粋①

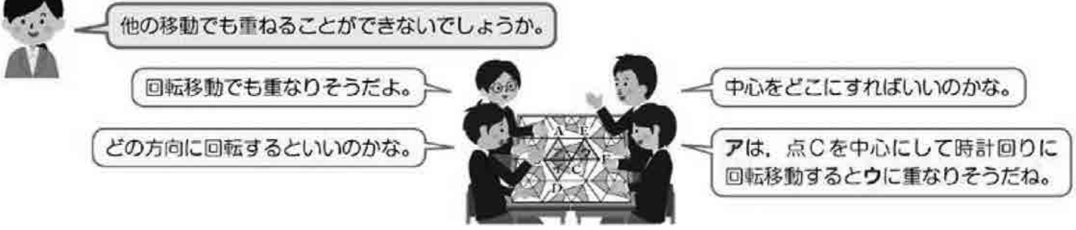


図７　「授業アイディア例」より抜粋②

この活動には目的意識がなく，自校の生徒は積極的になれないだろうと考え，万華鏡の模様の仕組み，すなわち，どうしてそのような模様になるかを考える展開にしたいと考えた。しかし，そうすると，回転移動は万華鏡の模様の仕組みの解明には直接的には関係し

ないため，**図７**のような活動は位置づけられないことがわかった。そして，熟考の末，平行移動だけで授業を構成することにした。

また，自校の生徒の実態に即して，取り扱う模様を，生徒にとって扱いやすい図形に変更することにした。それが**図３**の模様である。この模様にしたことにより，**図４**に示したように，「基となる図形」を多面的に考察することにもつながった。

生徒が万華鏡の模様ができる仕組みを知りたいという目的意識のもと，教師が提示した３つの小課題に取り組み，かつ，数学的な表現を用いて説明をすることができたことは，これらの検討の成果であると言えよう。

（３）自ら発展的に考察する習慣を培うための授業づくりの視点

上述のようなよさが見られた分，発展的に考察する契機も多々あった授業だった。換言すれば，授業者が発展的に考えさせることを指向していないと，生徒の発展的に考察しようとする契機を見逃してしまうことを例証している。

この題材で，自ら発展的に考察する習慣を培うためには，教師がどのような視点で授業づくりをすればよいかを考えてみよう。

① 事象を丁寧に観察させ，疑問を引き出すようにする

この授業では，万華鏡では鏡を対称軸とする線対称な図形が見えることについて考察したが，それぞれの鏡で１回の対称移動にしか着目していない。しかし，提示した**図３**の模様は，生徒が考えた「基となる図形」を１回ずつ対称移動しただけではできない。生徒は，実際に万華鏡で**図３**のように見えたので疑問を持たなかったのである。

ここで，生徒から「なぜ，こんなにいっぱいできるのか？」「基の図形１つと，それぞれの鏡に映った３つ，あわせて４つしかできないのではないのか？」などといった疑問を引き出したい。そして，**図１**のような「基となる図形」が線対称でない図形を含む，様々な図形を万華鏡で観察することを通して，鏡に映った模様がさらに別の鏡に映って見えていることを見いだせるようにする。これによって，万華鏡の模様ができる仕組みを説明できるようになる。その上で，できあがる模様全体を観察させ，疑問を引き出したい。

② 疑問を数学的に定式化するようにする

できあがった模様を観察し挙げられた疑問を取り上げ，数学的に定式化することを促す。例えば，「対称移動の繰り返しなのに，回転移動として見ることができる場合がある」ことは，具体的な模様を離れ，次のように定式化することが考えられる。

・対称移動を何回か繰り返すと回転移動になるのか
・回転移動は，複数回の対称移動で表せるのか
・複数回の対称移動を繰り返した結果は，いつも１回の回転移動で表せるのか

図８のような回転移動が，対称移動の繰り返しでもできるかを調べることが考えられる（**図９**）。

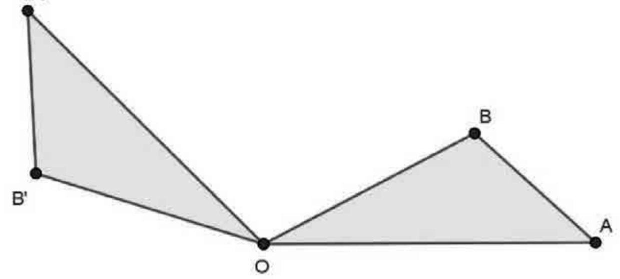


図８　△ABCの回転移動

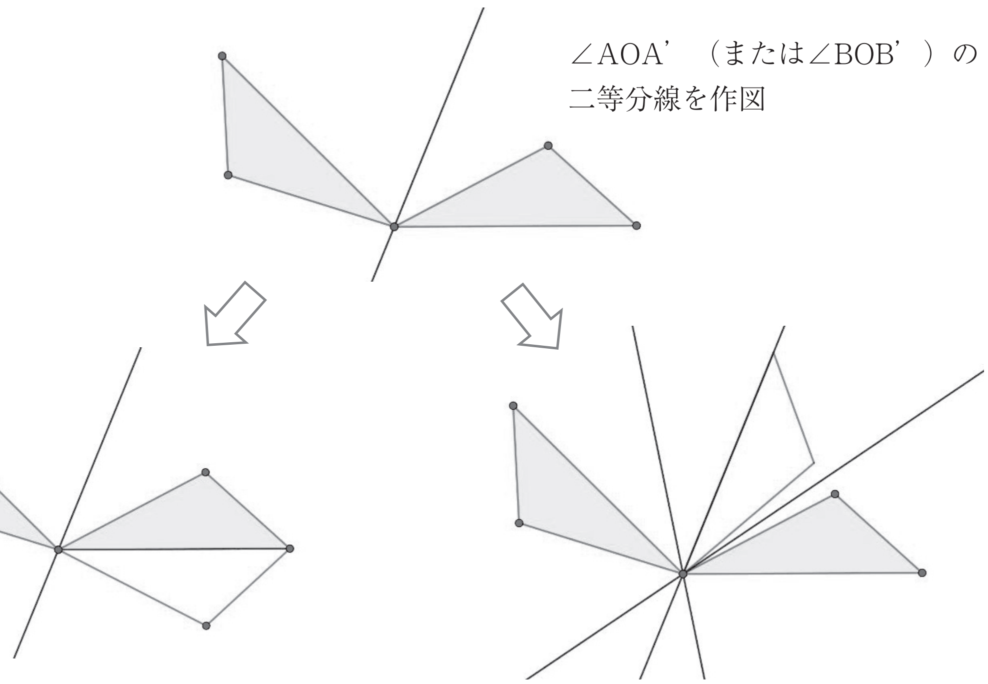


図９　回転移動を対称移動で表す

③ 条件を制御し調べるようにする

図８のような回転の中心が図形内にある場合について考えた場合，回転移動が対称移動の繰り返しでもできるかを明らかにするには，回転の中心が図形の外にある場合についても考える必要があることに気がつかせたい。

さらに，**図10**のような合同な二つの三角形に対して，一方を回転移動したものかどうかや，対称移動を繰り返して移動できるかを調べる方法を考え，数学的表現を用いて説明することが考えられる。

また，上の①において，鏡の配置が正三角柱状でない場合や正四角柱状の場合などについて考察することも考えられる。

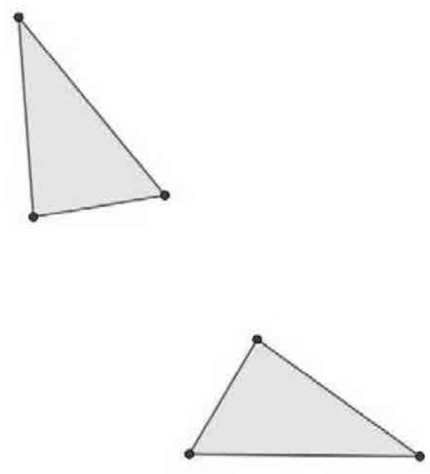


図10　回転移動または対称移動で表せるか

教師が，このような視点をもち授業づくりをすることで，授業において，生徒の活動を適切に評価し，取り上げることができる。すべてを授業において扱えない場合には，適宜レポート課題等にするとともに，提出された探究結果を紹介し共有していくことも考えられる。また，数時間に渡って探究していくような単元の指導計画を立てることもを考えられる。例えば，上述の**図８**の探究から，角の二等分線を作図する方法を考える課題へとの展開することである。

なお，この探究では，中学校１年生であることを考慮し，GeoGebraなどのソフトウェアを利用し，仮説を立てたり検証したりすること，容易に条件を変更した場合について考察できるようにすることなども考えられる。

３ おわりに

「問題を解くことが数学である」という生徒の数学観を培っているのも，実は，日々の授業なのかもしれない。そう考えると，問題を発展的に考察していく習慣を培うのも日々の授業であろう。上述の「万華鏡の模様」を例に示した授業づくりの視点は，単元の中の授業において，いかにそのような習慣を培うかについての示唆となると考える。具体的には，それらの視点は，**図11**に照らすと，「Ａ１」「Ａ２」に中心的に，「Ｄ１」「Ｄ２」にも関わる活動を誘引するもの，すなわち，事象を観察したり，得られた結果を振り返ったりして，疑問等を挙げ，数学的に定式化（数学化）することに関わるものである。発展的に考察する習慣を培う上で，授業に「Ａ１」「Ａ２」「Ｄ１」「Ｄ２」に当たる活動をいかに組み込んでいくかが鍵になる。

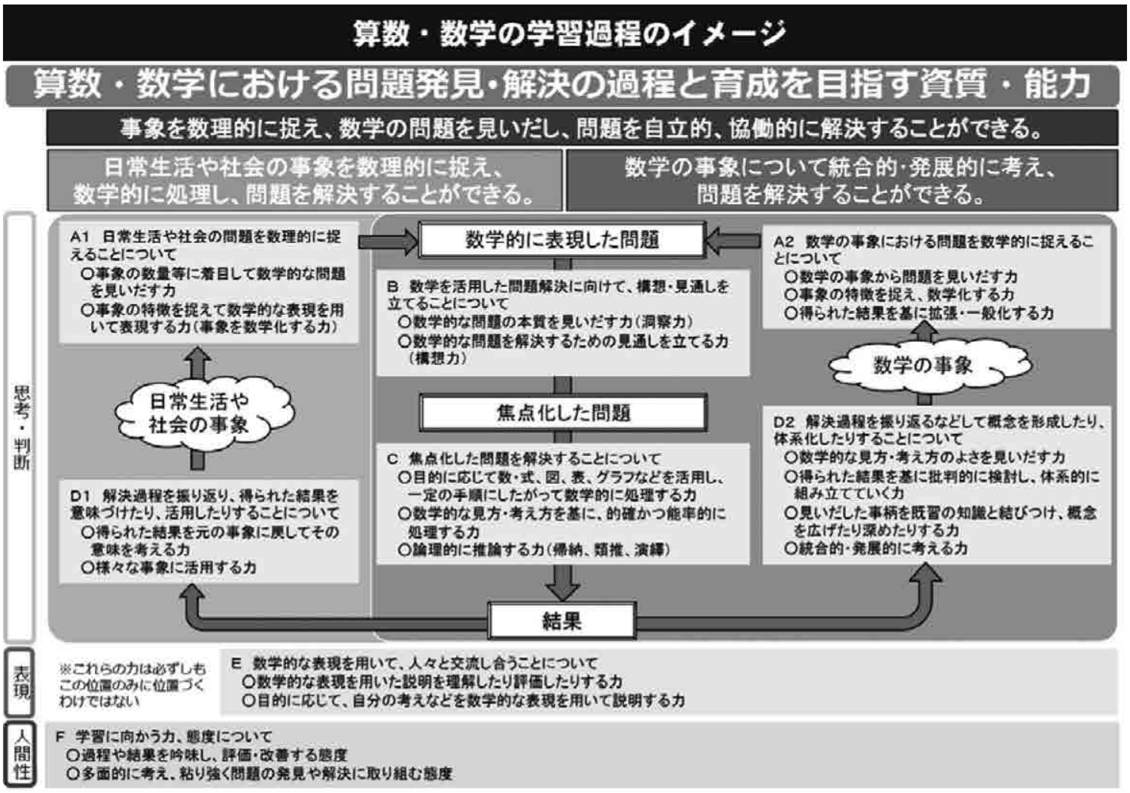


図11

参考・引用文献

国立教育政策研究所（2017）．万華鏡の模様を観察し，図形的に考察しよう．平成29年度 全国学力・学習状況調査 授業アイディア例，http://www.nier.go.jp/jugyourei/h29/idea-mmath.html

中央教育審議会算数・数学ワーキンググループ（2016）．算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ

５　数学的に考える資質・能力の育成を目指した学習指導に関する一考察：
オープンエンドアプローチ研究を手がかりに

白鴎大学教育学部講師　榎本　哲士

１．はじめに

新学習指導要領の目標と内容が，資質・能力の三つの柱（個別の知識・技能，思考力・判断力・表現力等，学びに向かう力・人間性等）と教科固有の「見方・考え方」に沿って改訂された。このような改訂に至ったのは，教育課程全体や各教科の学びを通じて「何ができるようになるのか」という観点から育成すべき資質・能力が整理され，その上で資質・能力を育成するために必要な指導内容として「何を学ぶのか」を検討するとともに，その内容を「どのように学ぶのか」という具体的な学びの姿までを考慮し構成されたことによる。

資質・能力の育成を目指した新しい教育課程では，学習指導の過程として，数学的な問題発見や問題解決のプロセスを重視することが求められている。特に，数学的な問題発見や問題解決のプロセスの様々な局面とそこで働く数学的な見方・考え方に焦点を当てて教育活動を充実するために，問題発見や問題解決のプロセスを中核に据えた学習指導の趣旨が一層徹底された（清水，2017）。このように，個別の知識・技能の習得ではなく，それを活用するための思考力・判断力・表現力等を基盤にして，学びに向かう力・人間性等を育成するという教育目標が強く打ち出され，その実現のために問題発見・解決のプロセスを中核とした学習指導のあり方が求められている。

上述のような資質・能力の育成を目指した学習指導を構想，実践するためには，「何を学ぶのか」という個別の知識・技能の習得を主眼とした指導観を資質・能力の育成を主眼とする指導観へ転換する必要がある。指導観を転換することにより，日々の算数・数学科の学習指導の中には「日常の事象に問題を発見し解決する活動」や「算数・数学の事象に問題を発見し解決する活動」が取り入れられるようになる。そして，それら活動の中で働く数学的な見方・考え方を特定し評価しなければならない。このように，数学的に考える資質・能力の育成するための学習指導のあり方とその評価方法に課題が生じる。

個別の知識・技能の習得を教育の目標とするのではなく，創造的に数学に取り組もうとする態度を高次の教育目標[1)]と捉え，その評価方法の開発研究が島田茂氏を代表者として昭和46年から6年間にわたって進められた。島田氏を中心としたオープンエンドアプローチの研究に端を発する一連の研究（以下，オープンエンドアプローチ研究と記す）には，例えば能田氏による「オープン・アプローチによる指導の研究」や，竹内氏と沢田氏による「問題の発展的な取り扱いによる指導」が含まれる。それらの知見を基にすれば，上記の課題を解決できるのではないかと，筆者は考える。

以上を踏まえて、本稿では，オープンエンドアプローチ研究を視点として，数学的に考える資質・能力を育成する学習指導のあり方を考察する。

２．数学的な問題発見・解決の過程と数学的な見方・考え方

今回の改訂では資質・能力の育成を目指し，学習指導の過程に数学的な問題発見・解決のプロセスを反映させることが強調された。学習指導に反映させる数学的な問題発見・解決のプロセスとは，中央教育審議会の「答申」で示された「事象を数理的に捉え，数学の問題を見いだし，問題を自立的，協働的に解決し，解決過程を振り返って概念を形成したり体系化したりする過程」（中央教育審議会，2016，p.141）である。上述のような問題発見・解決のプロセス（**図１**）を算数・数学科の学習過程の基盤に据える必要がある。

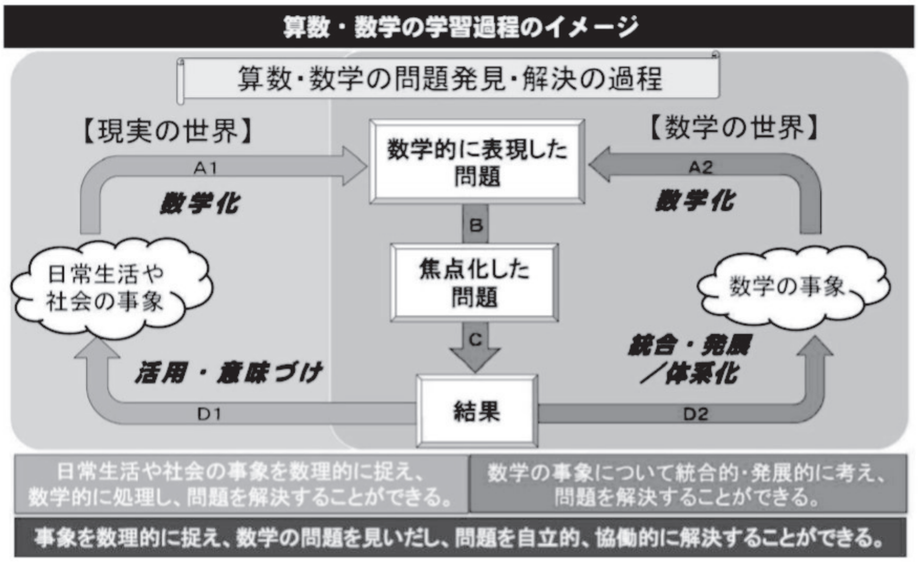


図１．算数・数学の問題発見・解決のプロセス

算数・数学科の学習指導の過程に数学的な問題発見・解決のプロセスを反映させることが重要視されたのは，資質・能力の育成を対象とした学習指導によって次のような生徒の姿を期待してのことである。それは，「生徒が，目的意識をもって事象を数学化し，自ら問題を設定し，その解決のために新しい概念や原理・法則を見いだすことで，概念や原理・法則に支えられた知識及び技能を習得したり，思考力，判断力，表現力等を身に付けたり，統合的・発展的に考えて深い学びを実現したりすることが可能となる。さらには，数学を既成のものとみなしたり，固定的で確定的なものとみなしたりせず，数学に創造的に取り組もうとする態度を養うことも期待される」(文部科学省, 2018a, p.7) からである。

問題発見と問題解決を基盤に据えた算数・数学科の学習では，「数学的な見方・考え方」を働かせる必要がある。「数学的な見方・考え方」とは，数学における新たな概念，原理，法則などを創造的に学習するために欠かせないものであり，数学的に考える資質・能力を支え，方向づけるものである。今回の改訂では，従来の数学的な考え方の中でも，特に統合的・発展的に考えることが重視された。それは「数学の学習では，創造的な発展を図るとともに，創造したものをより高い，あるいは，より広い観点から統合してみられるようにすることが大切」（文部科学省，2018a，p.22）だからである。また，「原初となる数学の問題から，条件を変えたり，条件を弛めたりするなどして新たに設定した問題へ統合的・発展的に考察すること」（文部科学省，2018a，p.26）により，数学を既成のものとして捉えるのではなく，数学に創造的に取り組む態度を養うことが可能となる。

このように，数学的な問題発見・解決のプロセスを基盤とし，数学的な見方・考え方を働かせる学習指導を構想・実現するためには，統合的・発展的に考えるための教材とそれを用いた学習指導が不可欠である。

３．数学的に考える資質・能力の育成におけるオープンエンドアプローチ研究の有効性

上述したように，新しい教育課程において算数・数学科の学習指導を構想・実践するためには，統合的・発展的な考察の対象になる教材とそれを用いた学習指導が必要である。以下では統合的・発展的に考えることの学習指導のあり方について考察していく。

数学に関わる思考と創造的に数学に取り組む態度の育成を算数・数学科の高次の目標と位置づけるオープンエンドアプローチ研究は，統合的・発展的に考えることの学習指導のあり方を考察する上で一助となる。

島田氏は，算数・数学科の教育が本来の目標をどの程度に達成しているのかを評価するためにオープンエンドアプローチによる指導の必要性を説く．島田氏によれば，オープンエンドアプローチによる学習指導とは，「未完結な問題を課題として，そこにある正答の多様性を積極的に利用することで授業を展望し，その過程で，既習の知識・技能・考え方をいろいろに組み合わせて新しいことを発見していく経験を与えようとする」（島田, 1995，pp.9-10）指導の方法のことである。

このような学習指導の方法を提案するに至ったのは氏の次のような考えからである。
「算数・数学の教育が本来のねらいをどの程度に到達しているかを知るには，具体的な場面において，その子どもが，どんな風に既習の知識・技能を活用し，また既習のもので事がすまぬ場合に，その困難にどう対処していくかを見なくてはならない。」（島田，1995, p.10）

このように数学に関わる思考や態度を評価するためには，児童生徒が個別の知識・技能を活用するために実際に思考する場面，また既習の知識では解決が困難な場合において思考する場面を顕在化しなければならない。それゆえ，正答が一つしかないような完結した問題（クローズドな問題）ではなく，正答がいく通りにも可能になるように条件づけられた問題（オープンな問題）の開発が必要となったのである。島田氏の述べるオープンな問題は，正答が複数存在する問題だけではない。「答を得るための方法を授業の課題とするときは，ある意味で多くの場合オープンな問題を取り上げているといえる」（島田，1995, p.9）と述べるように，島田氏は解答を得るための方法自体を考え出す問題もオープンな問題に含んでいるのである。

オープンエンドアプローチに関する研究グループに所属し、島田氏らとともにオープンエンドアプローチによる学習指導の研究に携わった能田伸彦氏は、オープンエンドアプローチを実際に行うことの難しさについて次のように述べる。
「オープンエンドアプローチでは“未完結な問題”つまり“オープンな問題”の設定によって授業を行い，“正答の多様性を積極的に利用する展開”である。ここでの問題点は適切な“オープンな問題”の開発が非常にむずかしく，したがって，この問題が開発できなかったら，オープンエンドアプローチの授業が行えないことになる。」（能田，1983, p.38）

能田氏は上記のように，正答に対する多様性を求めるオープンな問題を持続的に開発することの難しさから，その限界を指摘するだけでなく，問題の解決の仕方に多様性を認めることでその限界を解消することを試みた。能田氏の試みは，オープンエンドアプローチでは授業の教材として取り扱えなかったクローズドな問題に可能性を見出している．そのことが以下の文章から読み取れる。

「エンドをオープンに制限するだけでなく解決の仕方の多様性を認めることで，まず，制限を解除し，さらにクローズドな問題を指導の仕方で，解決の仕方を多様にすること，次に，問題が問題を生む，つまり発展させることができる見方や考え方を取り入れること，より一般性のある解法にまとめあげていく指導の展開をそれぞれに考えていく。」（能田，1983，p.38）

能田氏は，自身もメンバーとして参加した島田氏を中心とするオープンエンドアプローチに関する共同研究の理念を可能な限り生かし，できるだけ多くの学習指導に取り入れられるようにクローズドな問題の取り扱いに着目した。それゆえ，能田氏はオープンエンドアプローチから「エンド」を取り，オープン・アプローチとしたのである．また，能田氏は，従来の授業で用いられる教材（クローズドな問題）でも指導の方法によって数学的に考える（統合的・発展的に考える）場面を作り出せることを示している。

オープン・アプローチによる指導では、子どもに多様な見方や考え方をさせるとともに，それらをより包括して一般的なものにまとめていく見方や考え方を育成する．よって，数学的な考え方の中で，統合的・発展的見方を育成しようとするものである（能田，1983，p.109）。オープン・アプローチによる指導について，能田（2000）は授業の進行に沿って，それを以下のように図式化している。

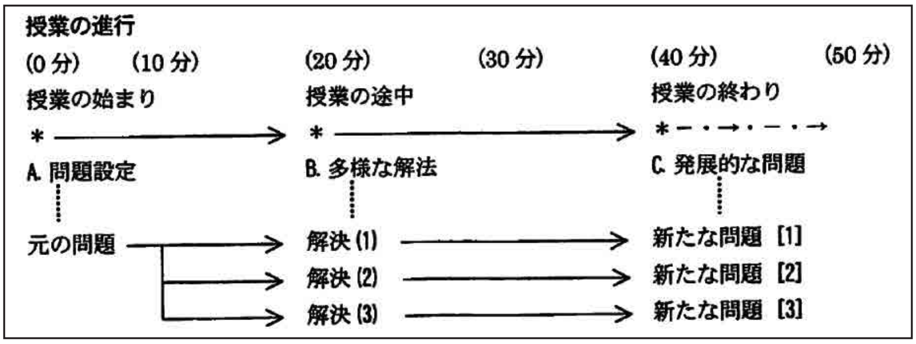


図２　オープン・アプローチによる指導（能田，2000，p.6）

上記の図式をみると，授業が大きく３つのフェイズ（A.問題設定，B.多様な解法，C.発展的な問題）に分けられている。授業で用いられる教材については，今までにも述べているように従来のクローズドな問題でも構わない。フェイズBにおいては，その問題に対する多様な解法を授業の中で取り上げる。このようなフェイズBを用意することで，児童生徒は統合する対象を明確にすることができるとともに，それぞれの解法を比較・検討する中でフェイズCにおいて発展させる問題の条件を意識することができるようになる．フェイズCでは，フェイズBにおいて意識した問題の条件を変更したり，弛めたりして発展させ，新たな問題をつくる。

このように，統合的・発展的に考えることの学習指導には，多様な解法が出てくる問題

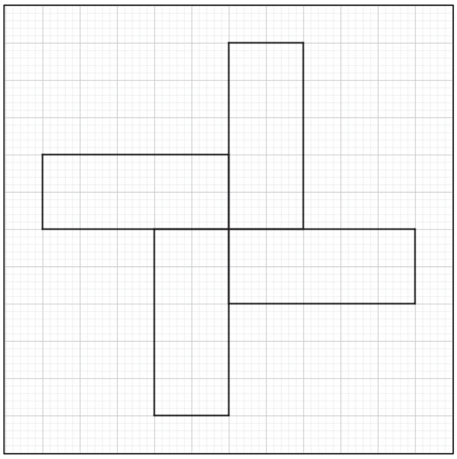
の設定（フェイズA），設定した問題に対する多様な考えを取り上げ，それらを比較・検討すること（フェイズB），比較・検討の際に意識した問題の条件を変えたり，弛めたりしながら問題を発展させること（フェイズC）を含める必要がある。

４．問題の発展的な取り扱いと統合的な見方に関する具体例

４．１．問題設定（フェイズA）

以下の問題は，数学的な表現の一つである「式」のはたらきやそのよさを児童生徒に実感させる目的で使用される教材である。この問題では周りの長さではなく，周りの長さを求める方法を問うている。示された形のどこに着目するのかによって求め方は変わるため，多様な解決の方法が出されやすい。

縦２㎝，横５㎝の長方形を下のように組み合わせました。組み合わせてできた形の周りの長さをできるだけ多くの方法で求めましょう。



４．２．多様な解決の方法（フェイズB）

長方形（縦２㎝，横５㎝）を上の図のように組み合わせて作られた形の周りの長さを求める方法は，示された形のどこに着目するのかによって異なる。以下の3種類の求め方を示す。

①長さの等しい辺に着目した求め方

この求め方は，示された形にある3種類の等しい長さの辺（２㎝，３㎝，５㎝）に着目する方法である。それぞれの長さに分類すると，**図３**のように２㎝（赤），３㎝（黄），５㎝（青）がそれぞれ4か所ずつある。同じ長さの辺に分類整理すると，次のような計算で周りの長さを求めることができる。

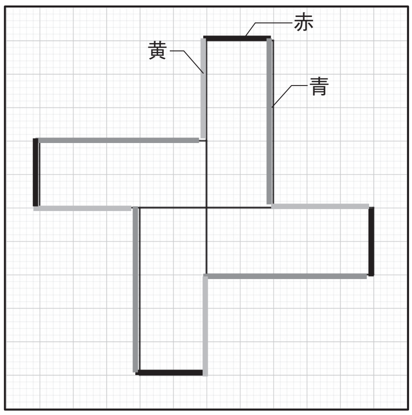


図３　長さの等しい辺に着目した求め方

$2\times4+3\times4+5\times4=40$　…①

図３の赤い辺に着目すると長さの同じ辺が４つあることから，①式の中で2×4と表されている。同様に考えると，黄色い辺の長さの和は3×4 として，青い辺の長さの和は5×4

として表される。

②長方形の周りの長さに着目する求め方

示されている形は縦２㎝，横５㎝の長方形を組み合わせて作られている。この求め方は組み合わせている長方形の周りの長さに着目した求め方である。組み合わせている長方形一つの周りの長さを求め，それを４倍すると，長方形が接している部分の長さ（**図４**の中で赤く示している部分）を含めた長さが算出される。そこから重なった部分の辺の長さをひくことで周りの長さを求めることができる。以上を式に表すと以下の式②のように表すことができる。

(5+2)×2×4－(2+2)×4＝40　…②

前半の（5+2)×2×4は長方形一つの周りの長さを4倍していることを表し，後半の（2+2)×4は重なっている部分（**図４**中の赤く引かれた部分）を表している。

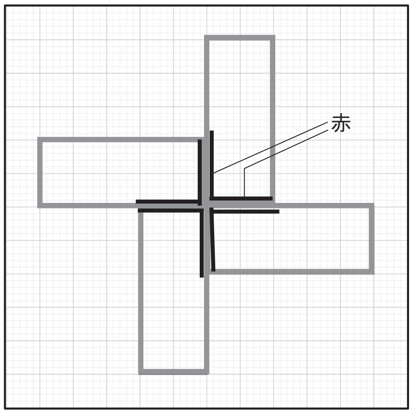


図４　長方形の周りの長さに着目した求め方

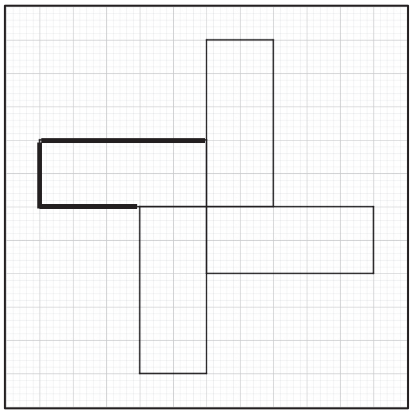


図５　形のパターンを用いる求め方

③形のパターンを用いる求め方

この求め方は**図５**に示したパターン（太線の部分）を見つけ，その４倍をすることで周りの長さを求める方法である。示したパターンの部分の長さを求め，それを４倍して求める式は次のように表される。

(5+2+3)×4＝40　…③

多様な解決の方法として，本稿では上記した３つの求め方を取り上げた。３つの求め方を表す式①，②，③の中で用いられる数値（例えば2，5，3，4）について，それぞれが図の中の何を表しているのか確認すると次のように整理することができる。

・式の中の数値2と5は長方形の縦と横の長さを表している。
・式の中の数値4は示された図の中で長方形が４つ組み合わされていることに由来する。
・式①と式③の中に出てくる数値3は，長さ５㎝の辺と長さ２㎝の辺の差を表している。

以上のことから，上記した３つの求め方は長方形の縦と横の長さと長方形の組み合わせ方に依存している。３つの求め方とそれらの式を検討することで，「長方形の辺の長さ」と「長方形の組み合わせ方」という２つの条件が顕在化した。

４．３．問題の発展的な取り扱い（フェイズC）

問題を発展させるフェイズCでは，フェイズBで顕在化した２つの条件のうちの「長方形の辺の長さ」を変えることで新たな問題を作り出す。その際に，作り出した問題が児童生徒にとっての問題となるために，児童生徒を「長方形の辺の長さと示された形全体の周りの長さの関係」に着目させ，「長方形の辺の長さ（条件）を変えるとそれに伴って周りの長さは変わるか」という観点から仮説を生み出しておく必要がある。条件を変えると周

りの長さが変わると考える児童生徒は少なからず存在すると予想されるため，条件である長方形の辺の長さを縦３㎝，横５㎝に変更して新しい問題をつくる（**図６**）。

もともとの問題の条件を変えて発展的に考え出した問題を，フェイズBで取り上げた３つの求め方で解決してみる．解決した結果をみると，長方形の辺の長さ（条件）を変更しても周りの長さが変わらないことが分かる。

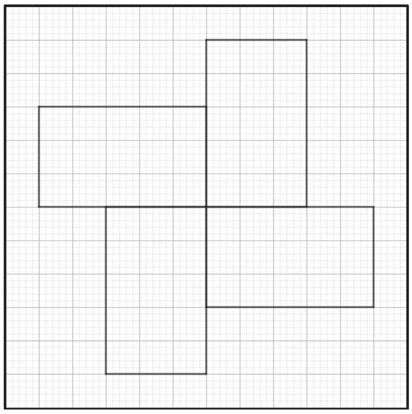


図６　縦３㎝ 横５㎝ の長方形

・式①　$3\times4+2\times4+5\times4=40$
・式②　$(5+3)\times2\times4-(3+3)\times4=40$
・式③　$(5+3+2)\times4=40$

長方形の辺の長さ（条件）を変えると周りの長さが変わるという仮説が崩れ，新たに「条件を変えても周りの長さは変わらない」のではないかと考えるようになる．そのような考えを確かめるために，横の辺を固定して，縦の辺の長さを４㎝，５㎝と変えてみる。

縦４㎝，横５㎝の長方形を組み合わせた形（**図７**）について，３つの求め方で解決をしてみると，以下のようになる。

・式①　$4\times4+1\times4+5\times4=40$
・式②　$(5+4)\times2\times4-(4+4)\times4=40$
・式③　$(5+4+1)\times4=40$

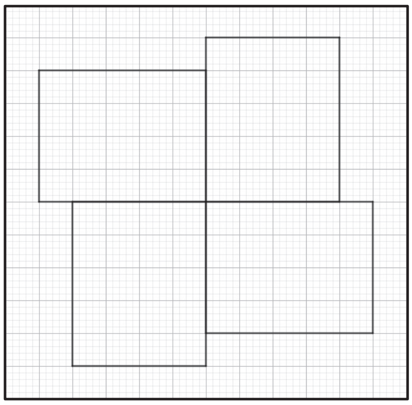


図７　縦4㎝ 横５㎝ の長方形

次に，縦５㎝，横５㎝の正方形を組み合わせた形（**図８**）について，3つの求め方で解決をしてみると，以下のようになる。

・式①　$5\times4+0\times4+5\times4=40$
・式②　$(5+5)\times2\times4-(5+5)\times4=40$
・式③　$(5+5+0)\times4=40$

このように長方形の縦の長さを４㎝，５㎝と変えても，周りの長さは変わらずに40㎝であることが分かる。

ここまで長方形の辺の長さ，特に縦の長さを条件にして，その数値を変えてきた。もともとの問題では２㎝であった縦の辺の長さを３㎝、４㎝、５㎝と変更しても，そのことが周りの長さには影響を与えていないことが分かる。このことから，縦２㎝，横５㎝の長方形を組み合わせた形と，条件を変更した３種類の形（縦３㎝横５㎝の長方形，縦４㎝横５㎝の長方形，縦５㎝横５㎝の正方形）は次のように統合的にみることができる（**図９**）。

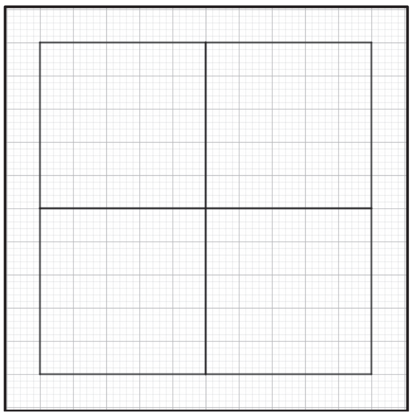


図８　縦５㎝ 横５㎝ の正方形

条件を変えて作った３種類の形に原初の問題を加えた４種類の形は，**図９**のようにみることで統合的に捉えることが可能になる。このように統合的にみると，４種類は結果とし

て外側に接する正方形に帰着することができる。外側に接する正方形の一辺の長さは，5+2+3で求めることができ，周りの長さは（5+2+3）×4という式で求められる。この式はフェイズBにおいて取り上げた3つ目の求め方の式と対応する。もともとの３つ目の求め方とは図の見方は大きく変わっているが，このように図の見方を変えることで統合的に捉えることが可能となった。

このように図の見方で統合できることが分かれば，3つの求め方それぞれの式も「10×4」という形式へ統合できることが分かる。式①と式②，式③については，次のように式を変形することで統合できる。以下では原初の問題の条件で記載する。

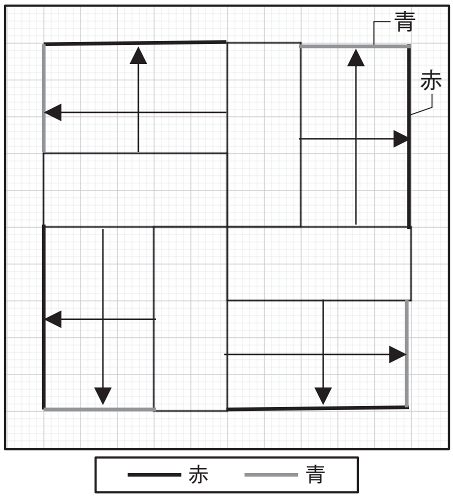


図９　原初の問題と発展された問題を統合する見方

・式①　2×4+3×4+5×4＝（2+3+5）×4=10×4

・式②　（5+2）×2×4－（2+2）×4＝（5×2+2×2）×4－（2+2）×4
　　＝10×4

・式③　（5+2+3）×4＝10×4

このようにクローズドな問題に潜む条件を明らかにし，その条件を変更することで統合的・発展的な考えをすることができた。また，この問題では長方形の縦の長さを６㎝以上に考察の範囲を広げた場合に，組み合わせた形の周りの長さが変わる。上記した範囲よりも広く考察を行うことで，この問題の求め方はより一般化することができる。

以上のように，オープンエンドアプローチ研究の中の，特にオープン・アプローチに着目することで，クローズドな問題が統合的・発展的な考え育成するための有効な教材であることが分かる。

５．まとめと今後の課題

本稿では，オープンエンドアプローチ研究を視点として，数学的に考える資質・能力を育成する学習指導のあり方を考察した。オープンエンドアプローチ研究の中でも，特にオープン・アプローチによる指導に着目することで，クローズドな問題といわれるような従来の算数・数学科で扱われた教材でも，その取り扱い方次第で統合的・発展的な考察の対象となる可能性を示すことができた。このように考察を積み重ねながら，今後は数学的に考える資質・能力を育成する学習指導のあり方を明らかにしていく。

注

１）算数・数学科の目標について島田氏は次のように述べる。「算数・数学科では，数学に関するいろいろな知識・技能，ないし概念・原理・法則等が，次から次へと教えられていく。それは，その一つ一つがそれ自身重要であるからというのではなく，それらが良く消化され，子どもの中で一つの知的な組織になって，子どもの人間としての能力や態度の一側面となることを期待してのことである。個々の知識・技能は重要な成分ではあるが，本来の目標は，それらが一つの人格に統合されたところにある。」（島田，1995，p.10）

引用参考文献

島田茂 編著（1995），*算数・数学科のオープンエンドアプローチ 授業改善への新しい提案*，東京：東洋館出版社

清水美憲（2017），数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動の充実, 清水美憲・齊藤一弥（編），*平成29年度版 小学校 新学習指導要領 ポイント総整理 算数,* 東京：東洋館出版社, pp.44-53

中央教育審議会（2016），幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領の改善及び必要な方策等について（答申），（2018年5月28日最終閲覧）
http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/1380731.htm

能田伸彦（1983），*算数・数学科 オープンアプローチによる指導の研究*，東京：東洋館出版社

能田伸彦（2000），学校数学における『オープン・アプローチによる指導』の研究，*筑波数学教育研究, 19,* pp.1-10

文部科学省（2018a），*中学校学習指導要領解説 数学編,* 大阪：日本文教出版

文部科学省（2018b），*小学校学習指導要領解説 算数編,* 大阪：日本文教出版

６　数学的に考える資質・能力の育成を図る教材の開発

山形大学地域教育文化学部講師　平林　真伊

１．はじめに

平成29年３月に小・中学校の学習指導要領，そして平成30年３月に高等学校の学習指導要領が告示された。今回の改訂では，小・中・高等学校を通じて育成すべき資質・能力が,「知識・技能」，「思考力・判断力・表現力等」，「学びに向かう力・人間性等」の三つの柱に沿って整理されている。子どもたちが「何を理解しているか，何ができるか」だけではなく，「理解していること，できることをどう使うか」，そして「どのように社会・世界と関わり，よりよい人生を送るか」ということを視点にし，学習指導を考えていく必要がある。

三つの柱の中でも，特に第三の「学びに向かう力・人間性等」を中核にして，数学的に考える資質・能力を育成するための授業を考えていく必要がある。第三の柱は，問題に取り組む姿勢，数学らしい思考の習慣に関するものであり，それらを算数・数学の授業において育成することが望まれる（清水，2017）。今後，新学習指導要領の全面実施を見据えて，数学的に考える資質・能力を育成するために，どのような教材を用いて，どのような授業を展開するのかを検討していくことが重要である。

本稿では上記の立場に立ち，数学的活動を視点として，問題に取り組む姿勢，思考の習慣を育むための教材を提案する。

２．教材開発の視点

教材の開発にあたり，小・中学校の学習指導要領解説において示された算数・数学の問題発見・解決の過程（**図１**）を参考に，活動のプロセスと，その際に必要とされる力を整理する。本稿では特に，「数学の事象について統合的・発展的に考え，問題を解決する過程」（以下，「数学の世界における問題解決過程」とする）に焦点を当てる。

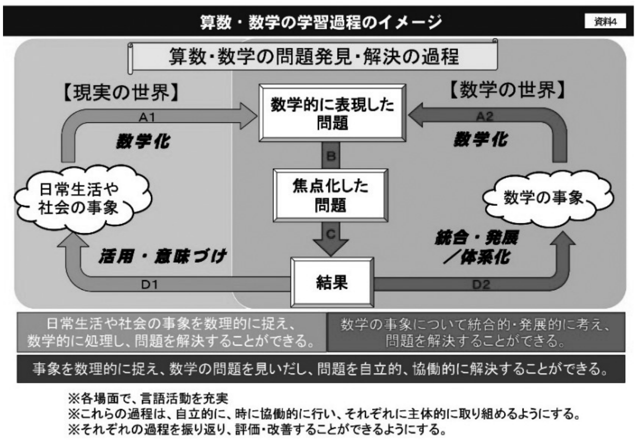


図１　算数・数学の問題発見・解決の過程（文部科学省，2016）

教育課程部会 算数・数学ワーキンググループでは，算数・数学の問題発見・解決の過程において発揮される力を整理している。「数学の世界における問題解決過程」で発揮される力は，次の**表１**のように整理される。

表１　数学の世界における問題解決過程で発揮される力

A2	・数学の事象から問題を見いだす力 ・事象の特徴を捉え，数学化する力 ・得られた結果を基に拡張・一般化する力
B	・数学的な問題の本質を見いだす力（洞察力） ・数学的な問題を解決するための見通しを立てる力（構想力）
C	・目的に応じて数・式，図，表，グラフなどを活用し，一定の手順にしたがって数学的に処理する力 ・数学的な見方・考え方を基に，的確かつ能率的に処理する力 ・論理的に推論する力（帰納，類推，演繹）
D2	・数学的な見方・考え方のよさを見いだす力 ・得られた結果を基に批判的に検討し，体系的に組み立てていく力 ・見いだした事柄を既習の知識と結びつけ，概念を広げたり深めたりする力 ・統合的・発展的に考える力

（文部科学省，2016を参照し筆者作成）

本稿では，特にA2とD2に焦点を当て，それらの力が発揮されるような教材を開発する。従来の学校数学では，BとCのプロセスばかりが強調され，子ども自身が事象を数学化したり，得られた結果を発展させたり統合させたりするプロセスを経験する機会が充分に設定されてこなかったためである。A2とD2のプロセスが実現されるために，以下の２つの視点を設定し，教材の開発を試みる。

第一に，A2のプロセスに関わって，事象の特徴について自ら数学的に説明しようとする文脈を設定することである。「○○が成り立つ理由を説明しましょう」というように，数学的に説明する目的が明確でない文脈を設定するのではなく，子ども自らがきまりを見いだすとともに，そのきまりについて疑問を持てるような文脈を設定する。例えば，クイズやゲーム形式のように問題を提示することで，子どもが関心を持って問題に取り組み，試行錯誤しながらも解決すべき問題を見いだし，数学化しようとすることが期待される。

第二に，D2のプロセスに関わって，はじめの問題の条件を修正することで問題を発展させるために，特殊な場合を設定したり問題の条件を修正する余地を含めたりすることである。例えば，はじめの問題では「１から９までの自然数」としておき，後に「０」を加えて考察を進めたり，はじめの問題では「大きい数から小さい数のひき算」というように数の大小を考えていたのに対し，後に大小関係を無視して考察を行ったりすることである。このようにはじめの問題の条件をゆるめておくことで，子どもたちが問題の発展可能性を追求しようとすることが期待される。

３．教材の開発：２桁の数のひき算

本稿で開発した教材は，「２桁の数のひき算」である。これは，平成29年度に実施された全国学力・学習状況調査の小学校算数B1を参考にして作成されたものである。以下で

は，学年段階を特に限定せず，想定される解決過程を示す。

１から９までの数の中から２つを選んで，２桁の数を２つ作り，大きい数から小さい数をひく計算をします。（例えば，３と８を選んだ場合，「38」と「83」が作れます。）この計算の答えを求めるとき，あるきまりを用いると，筆算で計算しなくても簡単に答えを求めることができます。どのようなきまりがあるのでしょうか。

（1）きまりを見出し，そのきまりが成り立つ理由を説明する活動

どのようなきまりがあるのかを調べるために，具体的な数を用いた計算を行い，データを集めることになる。このとき，適当に数を選択して計算を行うときまりを見つけにくいため，下記のように順序よく計算式を並べ，きまりを見つけようとすることが重要である。

21－12＝9	31－13＝18	41－14＝27	51－15＝36
32－23＝9	42－24＝18	52－25＝27	62－26＝36
43－34＝9	53－35＝18	63－36＝27	73－37＝36
⋮	⋮	⋮	⋮

これらの計算結果から，２桁の数のひき算の答えは９の倍数になるという予想が得られる。さらに，選んだ２つの数の差が１のときには答えが９，差が２のときには18，…となっていることから，「（２つの数の差）×９」と計算することで簡単に答えを求められることも分かる。これらはいずれも仮説であるため，どんな数を選んでも見つけたきまりが成り立つのかを確かめる必要がある。

仮説を検証するために，３つの方法が考えられる。第一に，すべての場合を書き出す方法である。数の差が１の場合は８通り，差が２の場合は７通り，差が３の場合は６通り，…，差が８の場合は１通りより，すべての場合は36通りである。36通りの計算式を書き出し，そのすべてで上記のきまりが成り立っていることを確認すればよい。しかし，この方法は効率的でない。できるだけ簡単に仮説を検証するためには，次の第二の方法が有効である。

第二の方法は，文字を用いて説明する方法である。

２桁の自然数の十の位の数を x ，一の位の数を y とおく（ただし，$x>y$）。２桁の自然数は $10x+y$ となり，十の位の数と一の位の数を入れかえた数は $10y+x$ と表される。したがって，これらの差は， $(10x+y)-(10y+x)=9x-9y=9(x-y)$ となり，２桁の自然数と，その数の十の位と一の位の数を入れかえた数の差は，９の倍数になる。さらに，$x-y$ は十の位と一の位の数の差を表していることから，数の差に９をかければ，２桁の数のひき算の答えを求めることができる。

文字を用いて説明することで，第一の方法のようにすべての場合を書き出さなくても，

すべての場合についてきまりが成り立つことを示すことができる。この方法は，文字を学習した中学生であれば用いることができるが，文字を自由に使いこなせない小学生は用いることができない。小学校段階の場合には，次の第三の方法により説明することを期待したい。

第三の方法は，図や具体物等を用いて操作的に説明する方法である。これは，全国学力・学習状況調査の問題においても示されている方法であり，例えば次のように説明する。

２と３を選び，32と23を作った場合，32を10が３つと１が２つ，23を10が２つと１が３つとみて，下の図のように表す。（●は10を，○は１を表す。）

32　●●●○○

23　●●○○○

32から23をひくと，同じ数だけ●と○が消え，●と○が１つずつ残る。

32　●●●○○

23　●●○○○

したがって，10が１つと１が１つ残るため，差が１の場合の２桁の数のひき算の答えは，9×1で９になる。

図や具体物等を用いた説明では，ある個別の場合について成り立つことのみを説明しているにすぎないが，ある個別の場合を代表的特殊の場合とみなすことで，ある個別の場合についての考察を通じて，他の場合にも共通する事柄について考察したり表現したりするのである（小松，2014）。このように，小学校段階においても，小学生なりの手段を用いて見つけたきまりを説明することができる。

（2）見出したきまりを発展させ，統合する活動

（1）での活動は，**図１**の図式でいうと「A2→B→C」の過程を遂行したことになる。問題解決の過程をさらに遂行するためには，結論や問題解決の過程，さらには問題そのものについて分析し，統合的・発展的に考察することが必要である。

例えば，もとの問題では１から９までの中から数を選ぶことになっているが，これに０を加えるとどうなるだろうか。０と２を選んだ場合，作られる自然数は「20」と「02」である。後者の数は十の位に０があるため単に「２」となり，計算式は20－2となる。この答えは18で９の倍数となり，さらに選んだ２つの数の差に９をかけた結果になることが分かる。このように，条件に０を加えることで２桁の数から１桁の数をひく計算となり，この場合でも２桁の数から２桁の数をひく計算と同様のきまりが成り立つことを見いだすことができる。

また，もとの問題では２つの数のうち，大きい数から小さい数をひくことになっているが，この条件をなくすとどうなるだろうか。すなわち，小さい数から大きい数をひく場合も考えるのである。例えば，２と３を選んで32と23を作った場合，考えられる計算は「32－23」と「23－32」の２つである。前者の大きい数から小さい数をひく場合は，上述の通り，答えは選んだ２つの数の差に９をかけたものになる。一方，後者の小さい数から大きい数をひく場合は，自然数の範囲で考えたままでは答えを求めることができないが，数の範囲を整数にまで拡げれば答えを求めることができる。上記の例で言えば，23－32＝－9

となり，小さい数から大きい数をひく場合も，選んだ２つの数の差に９をかけたものになる。

これまでのことを整理すると，０から９までの中から２つの数 x，y を選んで２つの２桁の数 $10x+y$，$10y+x$ をつくり，これらの数の差をとるとき，その答えは $9(x-y)$ となることが分かる。ただし，$x>y$ のときは答えが正の整数となり，$x<y$ のときは負の整数となる。このように，もとの問題で与えられた条件を変更したり，数の範囲を拡げたりすることによって，はじめに見つけたきまりを発展させることができる。

他にも，もとの問題ではひき算について考えていたが，これをたし算に変えることで，ひき算の場合とは異なるきまりが成り立つ。すなわち，２つの２桁の数をたすと11の倍数になり，選んだ２つの数の和に11をかけると，２桁の数のたし算の答えになる。これは，文字を用いて次のように説明できる。

２桁の自然数の十の位の数を x，一の位の数を y とおく。２桁の自然数は $10x+y$ となり，十の位の数と一の位の数を入れかえた数は $10y+x$ と表される。したがって，これらの和は，

$$(10x+y)+(10y+x)=11x+11y=11(x+y)$$

となり，２桁の自然数と，その数の十の位と一の位の数を入れかえた数の和は，11の倍数になる。さらに，$x+y$ は十の位と一の位の数の和を表していることから，数の和に11をかければ，２桁の数のたし算の答えを求めることができる。

また，図や具体物等を用いて次のように操作的にも説明できる。

２と３を選び，32と23を作った場合，32を10が３つと１が２つ，23を10が２つと１が３つとみて，下の図のように表す。（●は10を，○は１を表す。）

32　●●●○○

23　●●○○○

32と23をたすと，●と○が同じ個数になる。

●●●●●

○○○○○

●＋○＝11で，どちらか一方が余ることなくペアにできるため，２桁の数のたし算の答えは11の倍数になる。さらに，作られたペアの数は，十の位の数と一の位の数の和であることから，数の和に11をかければ，２桁の数のたし算の答えになる。

さらに問題を発展させて，３桁の数のたし算・ひき算を考えてみよう。３桁の場合は２桁の場合と異なり，２つの数を作る際に単純に位の数を入れ替えることができない。百の位と十の位を入れ替えたり，十の位と一の位を入れ替えたりするなど，様々なパターンが想定されるが，もとの問題とのつながりを考えると，百の位と一の位を入れ替え，十の位はそのままにする方法が自然な流れである。

このときにどのようなきまりが成り立つかを調べてみると，２桁の数のたし算・ひき算のように，筆算で計算しなくても簡単に答えを求められるようなきまりではないことに気付く。例えば，３桁の数 abc のたし算の場合，「325＋523＝848」というように，答えの一の位と百の位は「a+c」，答えの十の位は「2b」になる。ただし，a+c≧10 または b≧5 のとき，このきまりは成り立たない。これは，文字を用いて次のように説明できる。

３桁の自然数の百の位の数を x，十の位の数を y，一の位の数を z とおく。３桁の自然数は 100x+10y+z となり，百の位の数と一の位の数を入れかえた数は 100z+10y+x と表される。したがって，これらの和は，

$$(100x+10y+z)+(100z+10y+x)=100(x+z)+10\cdot 2y+(x+z)$$

となり，３桁の自然数と，その数の百の位と一の位の数を入れかえた数の和の答えは，一の位と百の位が「もとの数の百の位と一の位の数の和」，十の位が「もとの数の十の位の２倍」で表される。

また，図や具体物等を用いて次のように操作的にも説明できる。

２，３，５を選び，235と532を作った場合，235を100が２つ，10が３つ，１が５つ，532を100が５つ，10が３つ，１が２つとみて，下の図のように表す。（●は100，○は10，◎は１を表す。）

235　●●○○○◎◎◎◎◎

532　●●●●●○○○◎◎

235と532をたすと，次のように表される。

●●●●●●●

○○○○○○

◎◎◎◎◎◎◎

このように，●と◎は同じ数，○はもとの数の十の位の２倍になる。すなわち，答えの百の位と一の位は，もとの数の百の位と一の位の数の和になり，答えの十の位はもとの数の十の位の２倍になる。

また，３桁の数 abc のひき算の場合，「531－135＝396」というように，答えの百の位は「a－c－1」，十の位は「９」，一の位は「10-a+c」になる。これは，文字を用いて次のように説明できる。

３桁の自然数の百の位の数を x，十の位の数を y，一の位の数を z とおく（ただし，x>z）。３桁の自然数は 100x+10y+z となり，百の位の数と一の位の数を入れかえた数は 100z+10y+x と表される。したがって，これらの差は，

$$(100x+10y+z)-(100z+10y+x)=100(x-z)+10\cdot 0+(z-x) \quad \cdots①$$

となる。ただし，x>z であるので，①の「(z－x)」（一の位）の部分は「(10+z)－x」になる。「10･0」（十の位）は，一の位の計算をするときに十の位から１を繰り下げているため，常に「９」になる。そして，「100(x－z)」（百の位）は，十の位の計算をするときに百の位から１を繰り下げているため，「(x－1)-z)」になる。
　したがって，３桁の自然数と，その数の百の位と一の位の数を入れかえた数の差は，百の位が「x－z－1」，十の位が「９」，一の位が「10－x+z」で表される。

３桁の数のひき算の場合，これまでとは異なり，きまりが成り立つ理由を図や具体物によってうまく説明することが難しい。これは，繰り下がりのある計算を２回行う必要があるため，２桁の数のひき算のように単純に図や具体物等で表現できないためである。

以上のように，数の計算のきまりについて考えてみると，「十進位取り記数法」がきまりの鍵となっていることが分かる。例えば，（１）で説明した「２桁の自然数と，その数の十の位と一の位の数を入れかえた数の差に９をかけると，２桁の数のひき算の答えになる」というきまりについて，同様の計算を十進数ではなく五進数で行ってみると次のようになる。$2_{(5)}$と $4_{(5)}$を選んで $24_{(5)}$と$42_{(5)}$を作った場合，その差は$42_{(5)}-24_{(5)}=13_{(5)}$となり，$2_{(5)}$と$4_{(5)}$の差に$4_{(5)}$をかけた数になる。すなわち，「五進法で表された２桁の数と，その数の5^1の位と5^0の位の数を入れかえた数の差に$4_{(5)}$をかけると，２桁の数のひき算の答えになる」というきまりが成り立つ（証明は省略）。このように，「９をかける」ことがきまりの鍵となっているのではなく，n進法で表現された数に関して「(n－1)をかける」ことが重要なのである。十進法だけでなく，n進法にまで考察の範囲を拡げることで，見いだしたきまりの本質を探ることができる。

（３）問題解決のサイクルをさらにまわす活動

（２）での活動は，**図１**の図式の「D2」と，新たな問題を見いだし，解決する過程を遂行したことになる。その際，きまりの本質として「十進位取り記数法」を見いだした。十進位取り記数法に着目した，いわゆる「簡便算」と呼ばれるものには，（１）（２）で示した方法以外にも数多く存在する。例えば，ひき算をたし算で行う方法（**図２**左）や筆算を用いずにかけ算を行う方法（**図３**），各位の数を線で表現しかけ算を行う方法（**図４**）などである。

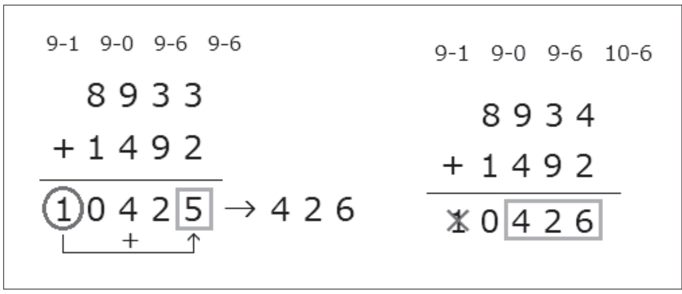


図２　【1492－1066の場合】

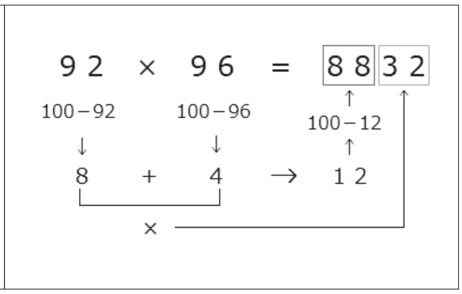


図３　【92×96の場合】

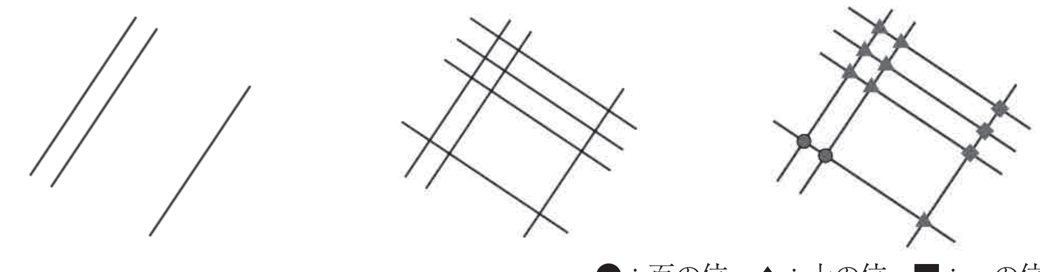


図４　【21×13の場合】

例えば，**図２**の方法では，補数を用いて，ひき算をたし算に変換して計算している。すなわち，ひく数の減基数の補数を求め，その値にひかれる数をたし，さらに１をたすのである。あるいは，ひく数の基数の補数を用いれば，ひく数の一の位の数を10からひき，その他の位の数を９からひいた値にひかれる数をたし，最上位の数を消すという操作によって答えを求めることができる（**図２**右参照）。これらの補数を用いた計算は，コンピュータ内でひき算を行う際に用いられる。コンピュータではひき算の計算ができないため，たし算のみで計算が進められる。その際，10進数ではなく２進数が用いられるため，２の補数を利用してひき算の計算を行っているのである（稲垣，1996）。

その他の方法についても，その計算方法が生み出された起源や，同様の考え方が他の事象に用いられている場合がある。これらのことについて興味を持ち，探究し続けることが期待される。このような姿に，数学的に考える資質・能力の第三の柱の「学びに向かう力・人間性等」が見いだせるのではないかと考える。

４．おわりに

本稿では，数学の世界における問題解決過程に焦点を当て，問題に取り組む姿勢，思考の習慣を育むための教材の一つとして，いわゆる「簡便算」と呼ばれる計算方法の仕組みを探る課題を提案した。その課題を解決する活動において，例えば，データを順序よく並べてきまりを見つけようとしたり，見いだしたきまりがいつでも成り立つ理由を証明しようとしたり，問題の条件を変更して問題を発展的に考えようとしたり，関連する他の事象について探求し続けようとしたりするといった，数学的に考える資質・能力が様々に見いだされた。これらの資質・能力は，１時間の活動を行ったからといってすぐに身に付くものではなく，長期間に渡って問題を発見したり，解決したり，統合・発展させたりするための問いを意識的に問い続けることで，その思考が習慣化されるのだと考える。

今後は，本教材を用いた授業を実践し，その効果を明らかにするとともに，子どもたちの資質・能力を評価する方法を開発することが課題である。また，現実の世界における問題解決過程に焦点を当て，必要となる資質・能力を整理し，教材を開発することも必要である。

参考・引用文献

稲垣耕作（1996），『コンピュータ科学の基礎』，東京：コロナ社.
国立教育政策研究所（2017），『平成29年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 小学校算

数』，国立教育政策研究所 教育課程研究センター
小松孝太郎（2014），『算数・数学教育における証明指導の改善』，東京：東洋館出版社
清水美憲（2017），「数学的に価値ある問いを問う力を育む」，『算数授業研究』，第109号，pp. 12-13
文部科学省（2016），「次期学習指導要領等に向けたこれまでの審議のまとめ（第２部）」，http://www.mext.go.jp/component/b_menu/shingi/toushin/__icsFiles/afieldfile/2016/09/09/1377021_1_4.pdf（2018年5月26日参照）

7　既習をもとに考察を深める授業の創造
―三角関数の合成を通して―

東京学芸大学附属国際中等教育学校教諭　高橋　広明

1. はじめに

数学の学習は一方的に与えられるものではなく，既習に基づいて創り出すことが可能であると考える。これは内容が高度かつ抽象的になる高等学校数学も当然含んでいる。したがって教師は授業において生徒が数学を創り出す経験ができるような教材を提供するとともに，創り出したものが論理的帰結となっているかを問うことが大切である。数学的に価値のある問いを問うことにより数学的に考える力が育まれ，また自らが価値のある問いを自らに問うことができるようになることが期待できるからである。このような授業の積み重ねにより，数学的に考える資質・能力が育まれていくものと考える。

２．探究課題と育みたい力について

今回は以下の探究課題を考察する授業の紹介である。

$y=\sin\theta+\cos\theta$ のグラフはどのような関数のグラフなのか解明しよう。

本課題は三角関数の合成の導入としての位置づけである。グラフ作成ツールなどを用いて，この関数のグラフを表示させたとき，このグラフが正弦曲線のようにみえることをもとに，実際にはどのような正弦曲線として表現できるのかを探る課題である。

$y=\sin\theta+\cos\theta$ のグラフをはじめて学習する生徒にとって，これが正弦曲線であるかどうかは不明である。しかし，周期的な波が現れたとき，それをsin関数とみなして，どこまでその関数で整合的かを考えていく活動は大切である。整合性がなくなったときにその関数を修正して，より確かなモデルに昇華していくという活動は，数学的モデルを作り上げていく活動において重要な営みであるからである。今回の課題の関数は，みなすまでもなく正確にsin関数となるが，グラフから式を決定しようとすると，sin関数としてよい根拠を積み上げていく必要がある。本授業では根拠を考えようとする姿勢を育むとともに，既習に基づいてその根拠を主張する力を育むことをねらいとする。

３．『数学的に考える力』と『思考の習慣』について

数学は論理を構築していく学問ゆえ，根拠をつねに考え，その確かな根拠に基づいて新たな知識や概念が創出されるものである。授業においては，これは既習事項を積み上げて新たな概念や見方を創り出すことにつながる。したがって，論理に基づいて構築していく上では，根拠を追い求める姿勢が大切となる。それが数学を行う上での習慣であろう。根拠を問う姿勢とその根拠を求める姿勢が思考の習慣として身につく指導を実践したい。

4. 学習課題に対する予想される生徒の反応とその対応例

● $y=\sin\theta$ のグラフを平行移動したものになりそう。

⑴ $\theta=\frac{\pi}{4}$ で最大値 $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$ をとり，$\theta=\frac{5}{4}\pi$ で最小値 $\sin\frac{5}{4}\pi+\cos\frac{5}{4}\pi=-\sqrt{2}$ をとるので，振幅は $\sqrt{2}$ となる。また，$\theta=-\frac{\pi}{4}$ で $y=0$ となるので，$y=\sin\theta+\cos\theta$ のグラフは $y=\sqrt{2}\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\frac{\pi}{4}$ だけ平行移動したものであるので，求める関数の式は $y=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$ となる。

【根拠を求める場面】

・（A1-1）最大値をとる値が $\theta=\frac{\pi}{4}$ である根拠は何か？

〔反応例〕

・（R1-1） $\theta=0$ のときも $\theta=\frac{\pi}{2}$ のときも $y=1$ となるから，その中点である $\theta=\frac{\pi}{4}$ で最大となる。

【根拠を求める場面】

・（A1-2）中点で最大値をとる根拠は何か？

〔反応例〕

・（R1-2） $\theta=\frac{\pi}{4}$ で対称だから。

【根拠を求める場面】

・（A1-3） 対称である根拠はあるのか？

〔反応例〕

・（R1-3） $\theta=\alpha$ に対して，$\theta=\frac{\pi}{4}$ の対称点を $\theta=\beta$ とすると，$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ と表せる。このとき

$$f(\beta)=f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha+\cos\alpha=f(\alpha)$$

であるので，$y=\sin\theta+\cos\theta$ のグラフは $\theta=\frac{\pi}{4}$ で対称である。

⑵ $y=A\sin(\theta+p)=\sin\theta+\cos\theta$ とする。

加法定理より

$$A(\sin\theta\ \cos p+\cos\theta\ \sin p)=\sin\theta+\cos\theta$$

なので，

$$A\cos p=1,\qquad A\sin p=1$$

$$\cos^2 p+\sin^2 p=\frac{2}{A^2}=1$$

よって，$A=\pm\sqrt{2}$

$A=\sqrt{2}$ のとき，$\cos p=\sin p=\frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，$p=\frac{\pi}{4}$ より，$y=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

$A=-\sqrt{2}$ のとき，$\cos p=\sin p=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，

$p=-\frac{3\pi}{4}$ より，$y=-\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{3\pi}{4}\right)$

※この考えが出た場合には一意に定めるためにはどうすればよいかを問う。それにより，$A>0$，$-\pi<p<\pi$ とすればよいことを確認する。

【根拠を求める場面】

・（A2-1）$y=\sin\theta$ のグラフを平行移動したものと，周期が 2π の周期関数であることを前提としている。周期は 2π でよいだろうか？

〔反応例〕

・（R2－1a） θ 軸との交点を探ると，$f(\theta)=0$，すなわち $\sin\theta+\cos\theta=0$ を解いて，$\theta=\frac{3}{4}\pi+n\pi$ となり，$\theta=\frac{3}{4}\pi+2n\pi$ ごとに同じ波が繰り返されるので周期は 2π でよい。

→他の値での周期性が保証されていないので，これでは不十分であることを確認する。

・（R2－1b） $f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta$ とすると，$f(\theta+2\pi)=f(\theta)$ となるので，周期は 2π でよい。

5. 本時の展開

⑴目標

・$y=\sin\theta+\cos\theta$ のグラフがsin関数として表そうとすることができる。

・関数を見いだす活動を振り返り，どのような前提に基づいてそれを見いだしたのかをメタ認知することができる。

・見いだした前提が成り立つことの根拠を自ら確かめることができる。

⑵展開案

学習活動と教師の発問	学習内容と予想される生徒の反応	留意点と評価
1.前時の振り返り 「$y=\sin\theta+\cos\theta$ はどのようなグラフになったか」	・波のような形になった ・sinのグラフのようになった。	前時で確認した通る点を再確認する。
$y=\sin\theta+\cos\theta$ をsinの関数として表してみよう。		
（自力解決）	4. 参照	手立て1
2.見いだした式の前提を探る 「どういう事柄を前提としているのか」	・(i) 周期は 2π であること。 ・(ii) $\theta=\frac{\pi}{4}$ で最大値をとること。	手立て2 ○自ら前提を探ろうとする。
3.見出した前提の根拠を探る 「先ほど考えた前提が正しい根拠はあるだろうか」	・(i)について →(R2－1a)または（R2－1b) ・(ii)について →(R1－1)，(R1－2)，(R1－3)	対称性についてはスモールステップで確認するようにする。 ○前提の根拠を論理的に示すことができる。
4.まとめ 「$y=\sin\theta+\cos\theta$ のグラフがsinの関数として表すことができたが，根拠を探りながら論を積み上げていくことが大切である。では今回のプロセスはいつでも使えるか？」	・グラフが分かって（正しく予想できて）いなければ，式を予測することはできない。	例えば， $y=\sin\theta+2\cos\theta$ を示し，これがsin関数で表すことができるのかを問う

「グラフを予測できなくても式を求める方法を考えていこう。」		

【本授業での手立てについて】（主に発問について）

手立て1

まったく関数が見いだせない場合

（1-1）「y=sin θ +cos θ のグラフが通る点の座標は分からないだろうか？」

（1-2）「その点が通るような式を見つけられないだろうか？」

手立て2

発問の意図が伝わらない場合，具体的な視点を与える

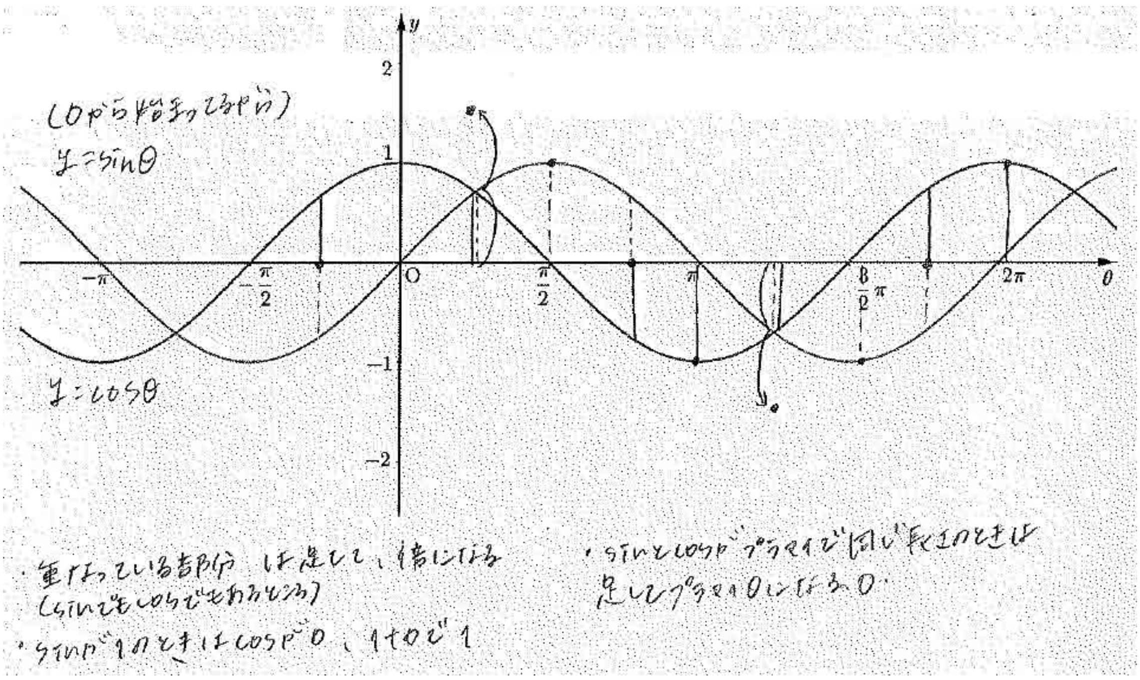
（2-1）「$y=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ をとしたとき，どのような事柄を前提としている？」

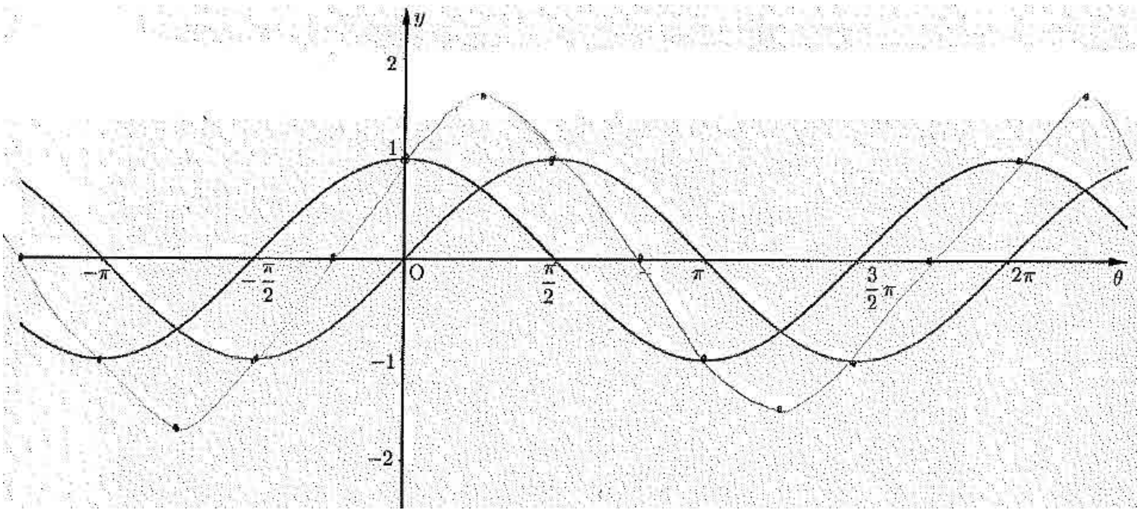
（2-2）「θ の係数が1であるということは何を前提としている？」

（2-3）「なぜ振幅は$\sqrt{2}$だと分かる？」

6.　授業での実際の反応と考察

前時である y=sin θ +cos θ のグラフの概形の考察も大切である。グラフの概形に基づいて振幅や周期などの考察が進むからである。未知の y=sin θ +cos θ のグラフの概形についての生徒の考察例が以下の通りである。





授業では上記のように2つの関数 y=sin θ と y=cos θ がすでに描かれているワークシートを提示し，そこから y=sin θ +cos θ のグラフを考察することを求めた。これに対してこの関数のグラフが通るであろう点をいくつかプロットしその概形を把握していった。本校では中学3年次に既知の関数の和や積で表された関数のグラフについて学習している。これらの経験を経ているため，上記のような反応が得られたものと考えられる。定規とコンパスがあれば特徴的な特定の点だけでなく任意のxの値に対してそのy座標の位置を特定することができる。すなわちいくらでも点をとることができるので，未知のグラフもその概形をイメージすることができる。

§3 関数の和や積の形で表された関数のグラフ

探究 1 奇関数＋奇関数＝？　偶関数＋偶関数＝？

関数 $g(x)$，$h(x)$ がどちらも奇関数のとき，関数 $f(x)=g(x)+h(x)$ は，

a　奇関数になる

b　偶関数になる

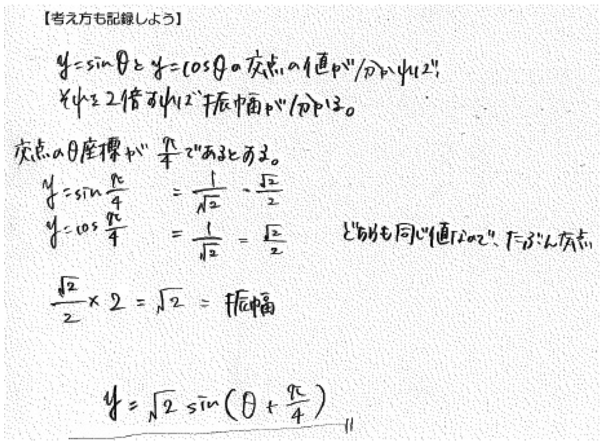
c　どちらでもない

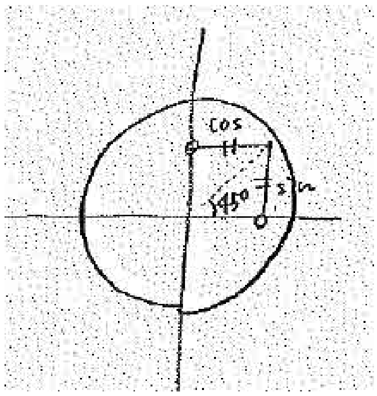
のどれが成り立つだろうか。また，関数 $g(x)$，$h(x)$ がどちらも偶関数のときはどうだろうか。

問1　関数 $g(x)=x$ と関数 $h(x)=\frac{1}{x}$ のグラフをかきなさい。また，2つのグラフをもとに，関数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ のグラフをかく方法を考えなさい。

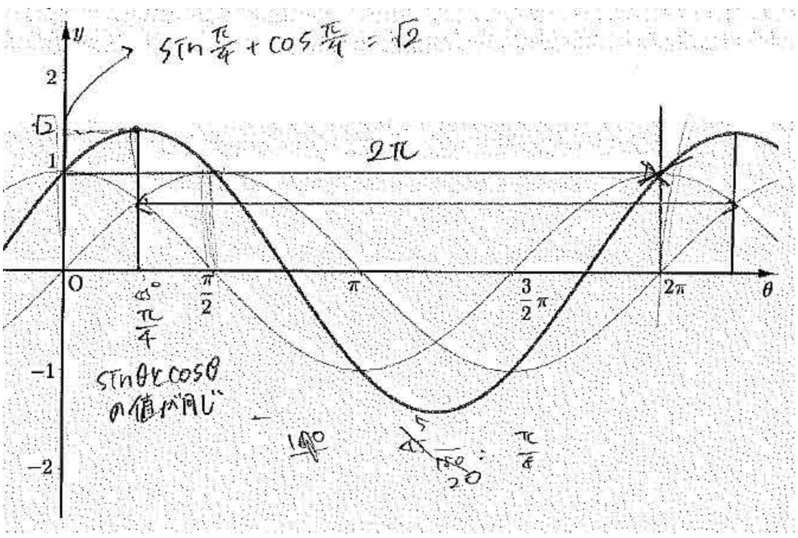
これらの活動を通して y=sin θ +cos θ のグラフの概形がイメージされたところで，授業ではグラフ作成ソフトで作成したグラフを提示し，予想通りの概形であったことを確認した。

本時ではこのグラフが正弦曲線のようになっていることを確認したのち，一つの正弦曲線の式として表現できないかの考察が始まった。既習に基づく，多くの生徒は振幅，周期そして平行移動の量を考え始めた。振幅については，右の生徒のように，2つのグラフの交点のところがわかれば振幅も分かるであろうと考えていたが，それが $\theta=\pi/4$ のときであることは直感的に済ませているものもいた。授業ではそれを取り上げ，交点が $\theta=\pi/4$ である根拠を問うた。当初は三角方程式 $\sin\theta=\cos\theta$ の解として導出されることを想定していたが，次の図のように単位円で説明する生徒もいる。これは，これまでのこの単元の指導場面で，ことあるごとに単位円で解釈していったためであると思われる。





$y=\sin\theta+\cos\theta$ の周期については，グラフから 2π としている生徒が多かったが，その根拠も問うた。その中である生徒が，２つの関数 $y=\sin\theta$ と $y=\cos\theta$ の周期がともに 2π とであることから，和も周期は変わらないことを説明した。すなわち，あるxの値についてそこから 2π だけ正の方向にたどったxの値について高さが同じ，すなわちyの値が同じであることから，周期 2π で和も値が等しくなるという理由である。



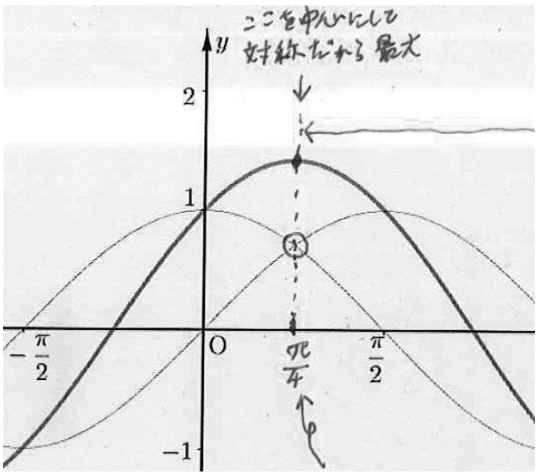
授業においては一連のやり取りの中でこの意見が出されたが，和の関数の周期も2πになるのかについては自力解決の時間を割いて，じっくり考えさせればよかったという指摘が研究協議でなされた。確かにより豊かな反応も期待できたため，そうあるべきだったと反省している。これについては後述する。

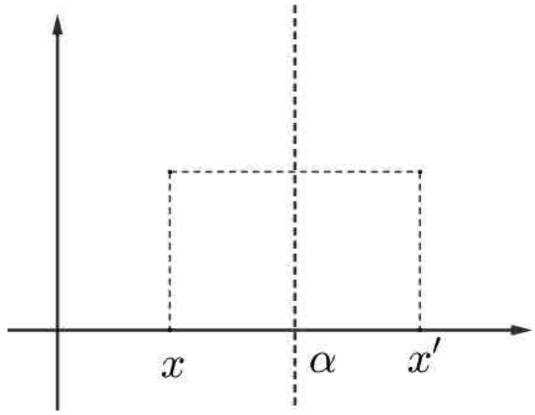
平行移動分については，yの値が最大となる（であろう）交点のθ座標はすでに求められているため，すぐに分かったようである。これらの活動を通して，和の関数が

$$y=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

で表されることを確認した。

残された根拠が不明確な点は$\theta=\pi/4$でyの値が最大となるのか，という点である。これについては，$y=f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta$のグラフが$\theta=\pi/4$で対称になっていることが示せればよいのでは，という意見が出たため，その方針で考察することとした。これについては一般に，$y=f(x)$が，直線 $x=\alpha$で対称であるとはどのような条件を満たすときかを考えさせた。すなわち，任意のxとその$x=\alpha$の対称点x'に対して$f(x)=f(x')$となることが条件であることを確認し，xとx'の中点がαであることから，$x'=2\alpha-x$となるため，結局$f(x)=f(2\alpha-x)$となることが直線 $x=\alpha$で対称となるための条件であることを確認した。





これを $f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta$で確認すると，

$$f\left(2\cdot\frac{\pi}{4}-\theta\right)=f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta+\sin\theta=f(\theta)$$

となる。この結果，$y=\sin\theta+\cos\theta$のグラフが$\theta=\pi/4$で対称となることと，その結果，そこで最大値をとることを確認した。これにより，$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$であることが共有できた。

最後に，そもそも$\sin\theta+\cos\theta$は正弦曲線，すなわちsinの関数であることを前提としていたが，この前提は正しかったのかを問うた。これについては，加法定理が既習であるため，$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$に加法定理を適用して確かめてみればよいとの反応が得られたため，それに基づき確かに$\sin\theta+\cos\theta$ となることを確認した。

教材研究：周期関数の和の関数は周期関数となるのか

本課題では周期の等しい周期関数同士の和を考え，それが周期関数であることを考察の対象としたが，これを一般的に考察することも考えられる。以下，これについての教材研

究である。

今，$f(x), g(x)$ がそれぞれ周期a,bの周期関数であるとする。すなわち，任意のxに対して，$f(x+a)=f(x), g(x+b)=g(x)$ とする。aに対するbの比率をrとする。すなわち，$b=ra$ とする。

rが有理数のときは関数$f(x)+g(x)$は周期関数である。実際，$r=m/n$とするとき，

$$f(x+nb)+g(x+nb)=f(x+ma)+g(x+nb)=f(x)+g(x)$$

であるので，$f(x)+g(x)$は周期関数であることがわかる。

一方，rが無理数のときは$f(x)+g(x)$は周期関数となるとは限らない。例えば，$f(x)=\cos x$，$g(x)=\sin 2\pi x$ とすると，$a=2\pi$，$b=1$であるので，$r=1/2\pi$となる。今，$f(x)+g(x)$が周期関数であるとする。すなわち，

$$\cos(x+p)+\sin 2\pi(x+p)=\cos x+\sin 2\pi x$$

となるpが存在するとする。xの任意性より，

$x=0$ のとき，$\cos p+\sin 2\pi p=1$

$x=-p$ のとき，$1=\cos p-\sin 2\pi p$

が成り立たなければならない。これらから，$\cos p=1$，$\sin 2\pi p=0$が得られるので，m,nを整数とすると，

$$p=2m\pi, 2\pi p=n\pi$$

となる。これらより，

$$\pi=\frac{n}{4m}$$

となるが，これはπが無理数であることと矛盾する。したがって，$\cos x+\sin 2\pi x$は周期関数ではない。

7. おわりに

今まで見たように，既習事項をもとに未習の学習内容を生徒自らが創り出すことのできる可能性を示してきた。その過程では，曖昧だった根拠を一つ一つ明確化していく活動が不可欠である。このように，既習事項から新たな知識を得たり，根拠を明確にしていったりする活動は，「算数・数学における問題発見・解決の過程と育成を目指す資質・能力」のD2「解決過程を振り返るなどして概念を形成したり，体系化したりすること」に即する活動であり，そこで育まれる資質・能力として挙げられている「見いだした事柄を既習の知識と結びつけ，概念を広げたり深めたりする力」や「得られた結果を基に批判的に検討し，体系的に組み立てていく力」の伸長に寄与するものであると考える。このような学習を積み重ねることにより，数学的に考える力が育まれるものと信じている。

参考文献

東京学芸大学附属国際中等教育学校数学教育研究会（2011～），TGUISS数学1～4，正進社

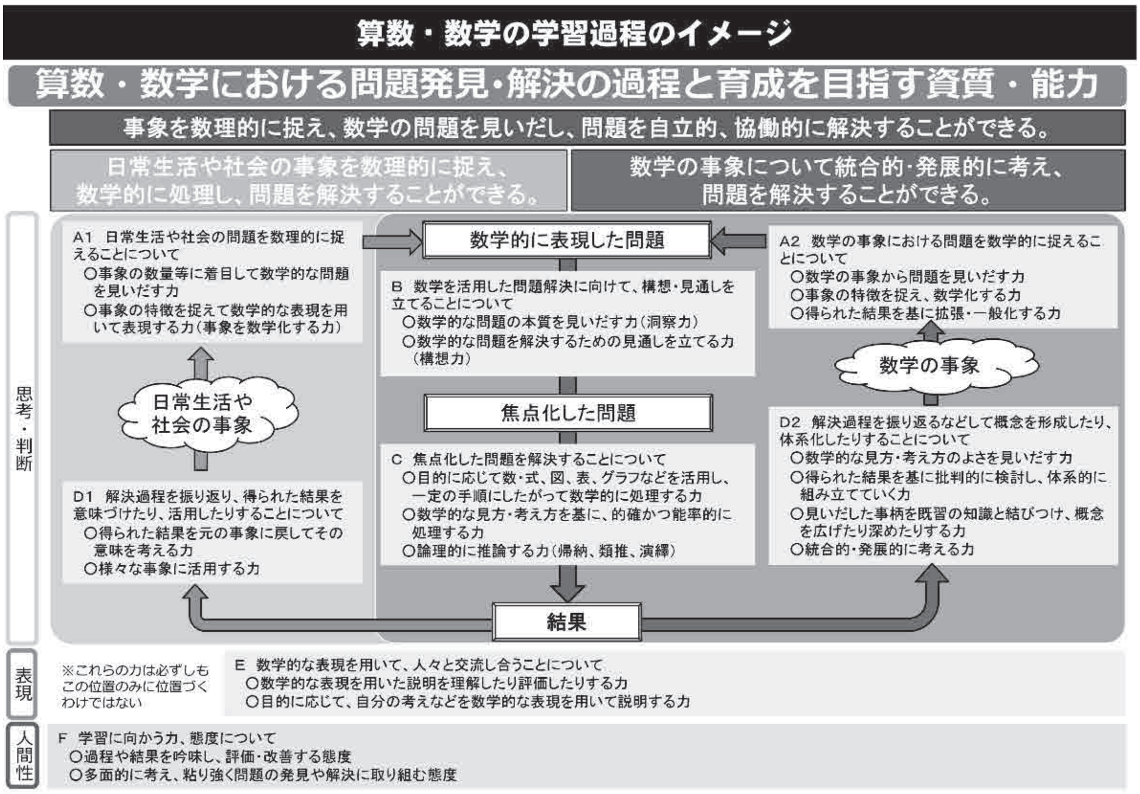
東京学芸大学附属国際中等教育学校数学教育研究会（2017），『TGUISS数学5・6』，サンプロセス

８　数学的に考える資質・能力を育成するための
数学科教材の開発
―論理の体系化に焦点をあてた数学A「平面図形」の教材群―

筑波大学附属駒場中・高等学校教諭　須藤　雄生

１．はじめに

算数・数学科における学習過程のイメージについて，中央教育審議会 初等中等教育分科会 教育課程部会 算数・数学ワーキンググループでは，下図のような学習過程のイメージを示している（2016）。



本校の実態としても，中学校の入学試験において特にCの経験を多く積んだ生徒が入学してくるが，「ひたすら解く」という学習を重ねてきた生徒も多く，表のD1やD2に示された活動について，その意義や価値をどう意識させていくが課題となっている。

事象から問題を見いだし，解決の過程を振り返りながら，条件を変えるなどして再び新たな事象を発見するという循環を志向した教材を開発し，日々の授業のなかで実践していくことで，生徒は自らD1やD2に示された活動の価値を認め，その力を発揮するようになっていく。本稿では，高等学校1年生「数学A」の内容から，筆者が行った平面図形の論証に関する教材開発を通して，生徒がどのような資質・能力を発揮して数学的活動のサイクルを回していくのかを検討するとともに，今後のさらなる教材開発に関する示唆を得ることを目的とする。

２．数学Ａ「平面図形」単元の指導計画の概要（全９時間）

本教材は，数学Ⅰの「論理と集合」の内容に引き続いて実践することを念頭におき，平面図形を題材として，命題どうしのつながりや，条件を変えることによって命題の真偽がどのように変わるかなど，論理の体系化に焦点をあてた教材群によって単元を構成したものである。具体的には，以下のような流れとした。

・第１時「図形の論証へのアプローチ」

重心の存在証明を通して，「三角形の３本の中線が１点で交わる」ことと同値な命題を考え，与えられた命題と同値な命題におきかえることで証明がしやすくなったりしにくくなったりすることを調べる。

・第２時「間接証明法（転換法）による論証」

三角形のそれぞれの角の二等分線の長さに関する性質（大きい角の二等分線は，小さい角の二等分線よりも短い）と，それに関連する定理「シュタイナー・レームスの定理」（２組の角の二等分線の長さが等しい三角形は二等辺三角形である）を題材に，転換法と背理法を関連付けて考える。

・第３時「同一法による論証と命題の逆」

同一法による証明の例（角の二等分線の定理の逆，三平方の定理の逆）や，同一法による証明ができない命題（中線定理の逆）を通して，同一法による証明に共通な概念をつかむ。

・第４時「全体集合の設定と命題の逆❶」

中点連結定理の逆を例に，「定理の逆」は前提となる全体集合を設定することによって成り立ったり成り立たなかったりすることを知り，前時で扱った中線定理の逆について，定理の逆を成り立たせるにはどのような全体集合を設定すればよいかを調べる。

・第５時「全体集合の設定と命題の逆❷」

結論が同じ形をしているチェバの定理とメネラウスの定理について，もとの定理では隠された条件となっている「辺上にある点の個数」が，定理の逆を成り立たせるためにどのように機能しているかを調べる。

・第６時「対称性と補助線（３点共線に関する性質）」

メネラウスの定理の逆を利用して，結論が「３点が共線である」になっている定理（ニュートンの定理，デザルグの定理，シムソンの定理）の証明を考える。その過程で，対称性を考えて補助線を引くこと（ニュートンの定理），次元を上げることで補助線に気づきやすくなること（デザルグの定理）などを学ぶ。

・第７時「証明の一般性（４点共円に関する性質）」

「円周角の定理」と「円に内接する四角形の性質」とその逆について，第4時で学んだ考えを生かして，どのような全体集合を設定すれば逆が成り立つかについて調べるとともに，２つの定理を統合して考える見方を養う。

・第８時「証明の一般性と拡張・統合（4点共円と方べきの定理）」

方べきの定理の証明において異なる図に対して同じ証明が通用する事例をもとに，前時の統合的な見方をさらに進めるとともに，2次関数の学習を生かして「２点で交わる」ことと「１点で接する」こととの共通点を見いだし，「円周角の定理」と「円に内接する四

角形の性質」に加えて「接弦定理」までを統合して考える見方を養う。

・第９時「命題の逆と証明，反例（２円の位置関係）」

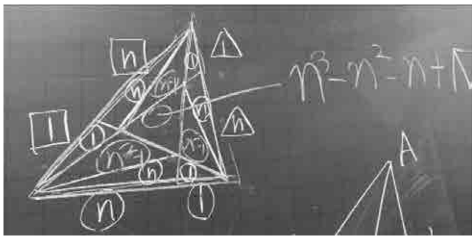
方べきの定理を用いて２円の根軸の性質「根軸上にある点は２円に関する方べきが等しい」について調べるとともに，その逆命題である「２円に関する方べきが等しい点は根軸上にある」が成り立つかどうかを考え，反例の存在と，その反例を消すような全体集合の設定について調べる。

次項では，授業において示した具体的な課題と，それに対する生徒の反応や活動について，主なものをまとめ，それぞれの内容について，実際の授業での板書の写真などを交えながら示す。生徒の反応には，のちの項での考察のため，通し番号（①，②，③，…）を振っている。

３．教材例と授業内での生徒の特徴的な考え

第１時「重心が存在することの証明」

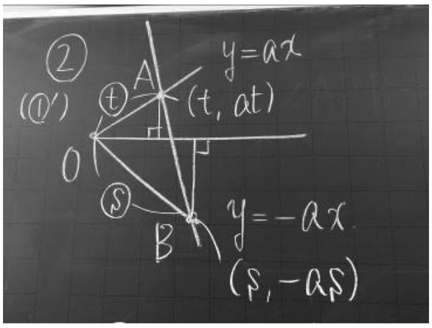
△ABCにおいて，辺BC，CA，ABの中点をそれぞれM，N，Lとする。AMとBNの交点をP，BNとCLの交点をQ，CLとAMの交点をRとする。このとき，「PとQは一致する」ことと同値になる命題をあげ，そのうちの1つを証明せよ。



これに対し，「3点P，Q，Rが一直線上にある」などの条件から発展させて「△PQRの面積が0である」をあげた生徒がいた。その生徒は，M，N，Lを中点から右図のようにいったん の内分点に一般化して△PQRの面積を の式で表し，最後に を代入して0であることを示していた（①）。この「いったん一般化したあと特殊化する」という考えは，他の場面にものちに生かされる。

第３時「角の二等分線の定理の証明」

△ABCにおいて，∠Aの二等分線と辺BCの交点をPとするとき，
等式　AB：AC＝BP：PC　が成り立つことを，２通り以上の方法で証明せよ。



角の二等分線の定理の証明は中学校で既習であるが，高校1年のここまでの学習を振り返るつもりで「中学生には思いつかなさそうな証明を考えよう」とテーマを設定したところ，右図のように関数を用いて証明した例（②），三角比（正弦定理）を用いて証明した例などが見られた。なかには方べきの定理やメネラウスの定理など，この後の授業で扱うことを予定していた内容を用いた証明もあったので，授業の進行にあわせて適宜振り返るなどして活用した。

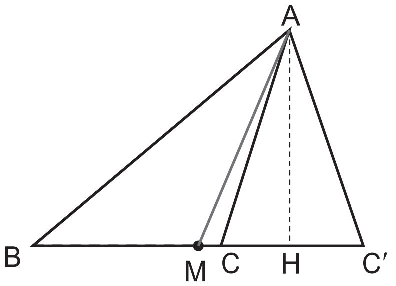
第４時「中線定理の逆」

次の命題が真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ。

(1)「△ABCにおいて，直線BC上にMをとったとき，
点Mが等式$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$を満たすならば，MはBCの中点である。」

(2)「△ABCにおいて，半直線BC上にMをとったとき，
点Mが等式$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$を満たすならば，MはBCの中点である。」

(3)「△ABCにおいて，辺BC上にMをとったとき，
点Mが等式$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$を満たすならば，MはBCの中点である。」



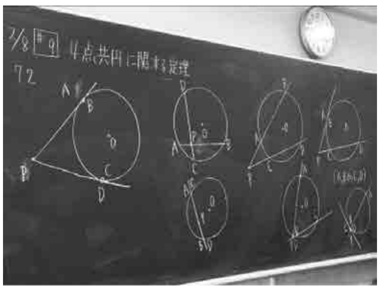
「全体集合をどのように設定すれば，中線定理の逆を成り立たせることができるか」を主題とする活動である。反例をみつけるために，中線の長さを文字 でおくなどして，計算によって反例をみつけることに注力していった学級もあったが，ある学級で対称性に着目して反例を構成した生徒がいた。(1)の反例として「∠Bが直角である△ABCでは，本来のBCの中点Mと直線ABに関して対称な点M'も，右辺の値が変わらないので題意を満たす」をあげ，この考えを利用して(2)では「∠Cが鈍角である△ABCでは，AからBCに下した垂線をAHとすると，Cと直線AHに関して対称な点C'について，辺BC'の中点をMとしても，左辺の値が変わらないので題意を満たす」という例を見いだしたものである（③）。

第７時「方べきの定理の拡張」

次の定理は，「方べきの定理」と呼ばれる定理である。

「★点Pを通る2直線が，円Oとそれぞれ2点A，B，２点C，Dで交わるとき，PA×PB＝PC×PD」

下線部★の示す状況を，4点の位置関係によって場合分けして図や文章で表せ。



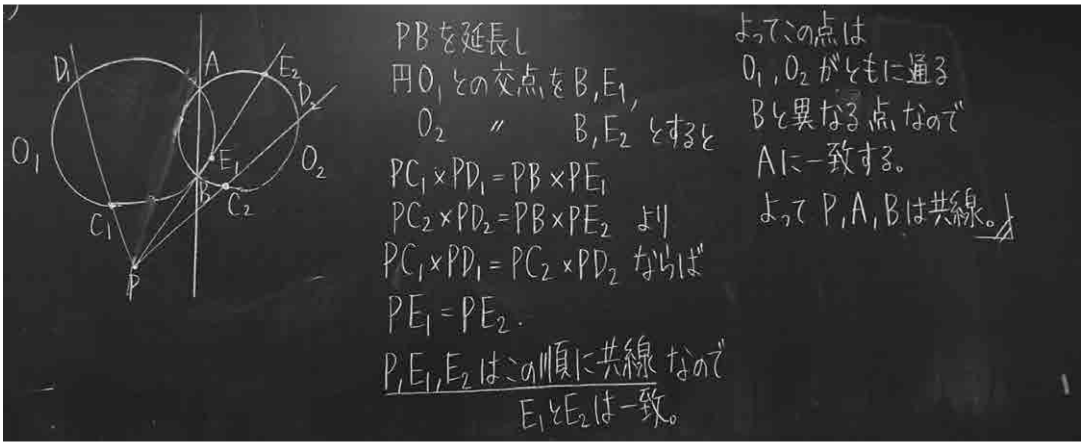
２次関数の単元で，問題集に掲載された問題で「『一致している２直線』は本当に２直線なのか」という疑問を投げかけてきた生徒がいたので，それを踏まえてあえて「異なる２直線」や「異なる２点」といった表現を用いずに課題を設定した。やがて，生徒とのやりとりの中で「一致する２点で交わる」を「１点で接する」の拡大解釈ととらえてよい，としたところ，点Pの位置なども場合分けして，さまざまな図をかく生徒が現れた（④）。これにより，後に「円周角の定理」「円に内接する四角形の性質」「接弦定理」を「すべて『円周角の定理』と呼んでもよいのではないか」と考える生徒もいた。

第９時「２円の位置関係と方べきの定理に関する性質」

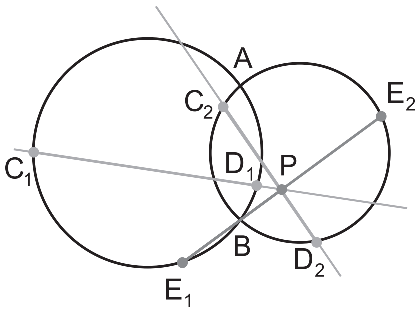
平面上に異なる2つの円O_1，円O_2と点Pがあり，Pを通る２直線ℓ_1，ℓ_2について，ℓ_1が円O_1と2点C_1，D_1，ℓ_2が円O_2と２点C_2，D_2で交わっている。

(1)円O_1と円O_2が2点A，Bで交わっているとき，点Pが直線AB上にあるならば，等式$PC_1\times PD_1=PC_2\times PD_2$が成り立つことを示せ。

(2)円O_1と円O_2が2点A，Bで交わっているとき，等式$PC_1\times PD_1=PC_2\times PD_2$が成り立つならば，Pは直線AB上にあることを示せ。



(1)を用いて，同一法による証明法から着想を得て(2)を上のように証明した生徒がいたが，第７時の学習内容で，方べきの定理に関する図をいくつもかいていたので，点Pが円の内部にある場合に，「P，E_1，E_2がこの順に共線になるとは限らないのではないか」と気づく生徒が現れ，その結果(2)の命題自体に反例が存在することが見いだされた（⑤）。（Bを通る任意の直線をひき，右図のようにE_1，E_2をとって線分E_1E_2の中点をPとする。右図）



これに対し，第４時の学習内容から「(2)を成り立たせるにはどのような全体集合を設定すればよいか」という課題が再設定され，なかには「方べきの定義をPA×PBではなく，同じ向きの線分と異なる向きの線分のときは符号を変えるように定義すればよい」のように，定義そのものをより洗練させて体系を作ろうとする生徒もいた。

４．考察と研究のまとめ

前節にてあげた生徒の考え①～⑤は，それぞれ以下のように特徴づけることができる。

① 特殊な条件下の命題を，いったん一般化して処理し，再度特殊化して結論を得る。
② 既習の他の分野の内容と関連づけることで，問題解決への道筋をつける。
③ 他の命題の証明・反例から類推して，命題の証明・反例を構成する。
④ 定義を見直すことにより，1つの命題の文に対して複数の状況を対応づける。
⑤ 命題の証明を試みた際の根拠を見直すことにより，命題の反例を発見する。

①は，三角形の各辺を1：1に内分する点を，いったんn：1と一般化し，処理を行った

後に$n=1$の場合に特殊化する方針をとっている。この発想に至る生徒は，1：1を「仮におかれた状況」とみなし，2：1，3：1，……といった複数の状況を重ね合わせて問題をとらえている。その背景には，「三角形の各辺の内分点を結んでできる図形について，辺の長さの比と面積比の関係を用いて面積を求める問題」の解決経験があり，それを生かしていると考えられる。さらに，文字式を正しく処理する力も，この発想による問題解決を支えている。すなわち，本稿冒頭にて述べた「算数・数学科における学習過程のイメージ」で言えば，「一定の手順にしたがって数学的に処理する力」（C）がはたらくことによって，「統合的・発展的に考える力」（D2）が発揮されていると考えることができる。

②では，角の二等分線のもつ対称性を，関数のグラフに転移させて解決している。図形の知識・理解と関数の知識・理解が，対称性という概念を通して有機的につながっていることがうかがえる発想である。関数の学習のなかで，図形の対称性に着目して「既習の知識と結びつけ，概念を広げたり深めたり」（D2）する活動が，本時における「数学的な問題の本質を見いだす力」（B）につながったとみることもできる。

③を発想できた生徒はごく限られた生徒であった。前述のとおり，別の学級では，三角形を座標平面におき，２次方程式の解の個数の問題に帰着する展開になっている。言いかえれば，生徒それぞれが，１つの問題場面で異なるサイクルを回して活動することもあるということが，この場面で顕在化したと考えられる。授業のなかで全く別のアプローチが複数の生徒から示されたとき，それらをどのような形で整理していくかについては，さらなる教材開発あるいは実践事例の蓄積が必要であろう。

④は①と関連性が強い。２次関数の単元でも，重解（重なる２つの実数解）が「異なる２つの実数解」の特殊な場合であることは学習する。この学習体験をもとに，円と直線が接する図と，円と直線が交わっている図を，一般と特殊の関係としてとらえる，すなわち「統合的・発展的に考える」（D2）ことが可能となる。特に，円に内接する四角形の性質と円周角の定理，接弦定理（接線と弦のつくる角の定理）を統合する見方は，目標設定もしやすく，一般と特殊の関係をとらえて統合・発展させる教材として適していると言える。

⑤の発想を引き出した原動力となっているのは，定理の逆を証明する際に用いられる「同一法」の一連の処理である。同一法による証明は，中学校の学習においても，三平方の定理の逆や円周角の定理の逆で扱われており，個々の事例としては既有知識がある。また高等学校数学Aでは，「論理と集合」の単元において逆・裏・対偶について学び，証明において論理の飛躍を見いだしたとき，そこを突く形で反例が見つかることがあるという経験が得られる。したがって，「論理と集合」の学習と，中学校での図形の論証に関する学習体験を，この場面で「統合的・発展的に考える」（D2）ことができたものと考えられる。

今後は，ここにあげた生徒の活動を類型化する枠組み等を検討するとともに，同様の発想を引き出すことのできる題材を，別の単元や内容からも抽出して教材開発していきたい。

参考文献

中央教育審議会 初等中等教育分科会 教育課程部会（2016），算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ，文部科学省

9　高等学校数学科における「文字式を読む力」を育成する教材の評価
―文字式をプロセスとして捉えなおすことに焦点を当てて―

筑波大学人間系特任研究員　花園　隼人

1．数学的に考える資質・能力としての「文字式を読む力」の位置

平成29年及び平成30年に改訂された学習指導要領では，育成を目指す資質・能力という観点から各教科の目標や内容が整理され，数学科では数学的に考える資質・能力の育成が求められることとなった。また，この数学的に考える資質・能力の育成にあたっては，児童・生徒の数学的な見方・考え方を働かせること及び学習を通じて数学的な見方・考え方を一層豊かにすることが明示された（文部科学省，2017，2018b）。この数学的な見方・考え方は，「各教科等の学習の中で働き，鍛えられていくものであり，各教科等の特質に応じた物事を捉える視点や考え方として整理されたことを踏まえたもの」（文部科学省，2018a，p.7，下線は引用者）であり，「事象を，数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え，論理的，統合的・発展的に考えること」と整理された。数学という学問の特質や教科としての教育的価値が改めて見直され，強調されたと言える。

数学科で育成を目指す資質・能力である数学的に考える資質・能力の三つの柱のうちの一つである「思考力，判断力，表現力等」には「数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力」（文部科学省，2018a，pp.27-28）が含まれ，その表現の例として式が挙げられている。数式は，数学の学習だからこそ獲得できる優れた表現方法であり，特に文字式は，簡潔な表現で一般的な規則を表現できる道具である。数式を自由に利用できることは数学を用いた問題解決において欠くことの出来ない資質・能力であり，我が国の数学教育で長年にわたって大事にされてきたものである。例えば，三輪（1996）は，文字式の利用を数学における主要な思考方法として位置付け，次の**図１**の図式で表現した。そして，この図式に基づき，教室における数学の指導が「変形」の重要部分である「文字式の計算」に偏重し，「表す」ことと「読む」ことについては長期的な指導内容として位置づいてないことを問題視した。数学的に考える資質・能力の育成を軸とした教育過程ではこの資質・能力を長期的な展望をもって育成することが不可欠であるゆえに，三輪による指摘は今日の数学教育について考える上で一層注視する必要のあるものである。

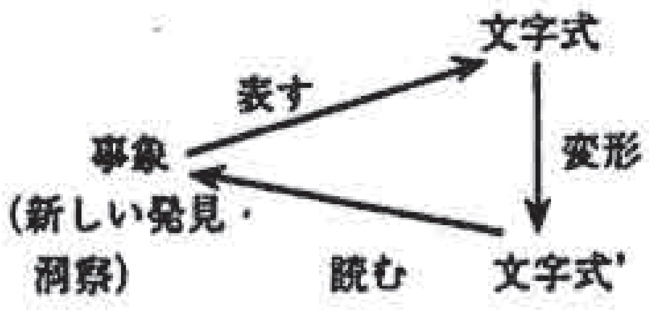


図１　文字式利用の図式（三輪，1996，p.2）

今回改訂された学習指導要領では，「文字式に表す力」と「文字式を読む力」に直接的に関わる資質・能力が言及されている。中学校数学科の各学年及び高等学校数学科の各教科の目標には，育成すべき「思考力，判断力，表現力等」として次の表１のように記されている。

表１「文字式利用」に関わる「思考力，判断力，表現力等」

文部科学省（2018a）及び文部科学省（2018b）を元に作成

	思考力，判断力，表現力等
中学校 第１学年	・文字を用いて数量の関係や法則などを考察したりする力 ・数量の変化や対応に着目して関数関係を見いだし，その特徴を表，式，グラフなどで考察する力
中学校 第２学年	・文字を用いて数量の関係や法則などを考察する力 ・関数関係に着目し，その特徴を表，式，グラフを相互に関連付けて考察する力
中学校 第３学年	・文字を用いて数量の関係や法則などを考察したりする力 ・関数関係に着目し，その特徴を表，式，グラフを相互に関連付けて考察する力
高等学校 「数学Ⅰ」	・命題の条件や結論に着目し，数や式を多面的にみたり目的に応じて適切に変形したりする力 ・事象を的確に表現してその特徴を表，式，グラフを相互に関連付けて考察する力
高等学校 「数学Ⅱ」	・数の範囲や式の性質に着目し，等式や不等式が成り立つことなどについて論理的に考察する力 ・座標平面上の図形について構成要素間の関係に着目し，方程式を用いて図形を簡潔・明瞭・的確に表現したり，図形の性質を論理的に考察したりする力

また，学習指導要領の解説では，各学年の内容においては，次のように言及されている。まず，小学校第６学年の「文字を用いた式」には，身に付ける思考力，判断力，表現力として「問題場面の数量の関係に着目し，数量の関係を簡潔かつ一般的に表現したり，式の意味を読み取ったりすること」（文部科学省，2017，p.284）が挙げられている。続いて，中学校第１学年の「文字を用いた式」には，身に付ける知識及び技能の一つに「数量の関係や法則などを文字を用いた式に表すことができることを理解し，式を用いて表したり読み取ったりすること」（文部科学省，2018a，p.68）が挙げられている。加えて，「等号を計算の過程を表す記号としてではなく相当関係を表す記号として用いる」（文部科学省，2018a，p.71）との説明があり，文字式の読み方についての具体的な言及がある。さらに，中学校第２学年の内容の「文字を用いた式」には，身に付ける知識及び技能の一つに「具体的な事象の中の数量の関係を文字を用いた式に表したり，式の意味を読み取ったりすること」（文部科学省，2018a，p.102）が挙げられている。「文字式に表す力」と「文字式を読む力」は，内容としてはその位置付けが小学校の「思考力，判断力，表現力」と中学

校の「知識及び技能等」とで異なってはいるものの，長期的な展望をもった育成が求められていると言える。
しかしながら，学年の進行に伴い，「文字式に表す力」と「文字式を読む力」がどのように進展していくのかについての言及は十分ではない。「文字式に表す力」については，「数学Ⅱ」において，「座標平面上の図形について構成要素間の関係に着目」して方程式に表すという方法について述べられているのみであり，「文字式を読む力」については，中学校第１学年において，「等号を計算の過程を表す記号としてではなく相当関係を表す記号として」読む方法について述べられているのみである。
そこで，以下では特に「文字を読む力」に焦点を当ててその発達過程を具体化し，その育成のための教材についての検討を行う。

２．「文字式を読む力」の発達過程

「文字を読む力」の発達過程について検討する上で示唆に富む知見の一つに，Sfard and Linchevski（1994）が提唱したプロセス－プロダクトという数学の概念（concept）の二面性を視点とする文字式の見方がある．Sfard & Linchevskiは，数学の概念の発展と個人のコンセプションの発達を歴史的視座と認識論的・心理学的視座から捉えた具象化（reification）理論に基づき，代数的思考の発達が，次のような２つの段階で困難になることを提示した。ただし以下の(i)と(ii)は，氏らの説明を元に筆者がまとめたものである。

(i)　一般化された算術における操作的なコンセプションを，構造的なコンセプションとしても捉えられるようになる段階。例えば，「3(x+5)+1 を，ある数xに5を加えた値を３倍し，１を加える」というプロセスとして文字式を捉える見方から，3(x+5)+1をプロセスの結果（プロダクト）としても，すなわち一つの数学的対象としても捉えられるようになること。この時点では，xは未知の定数として捉えられている。
(ii)　一般化された算術における構造的なコンセプションとして捉えられている文字式を，関数として捉えられるようになる段階。例えば，3(x+5)+1 のxを変数と捉えることで，3(x+5)+1 全体をxの値によって１つに定まる関数として捉えられるようになること。

氏らによるこれらの知見のうち，(i) については，上記で確認した学習指導要領解説に記載された「方程式を読む」方法と関連するものである。これらの知見は，このような関連があるだけでなく，伝統的に方程式に次いで関数を扱ってきた日本の中学校数学科の教育課程への親和性が高い。実際，清水（1997）や榎本（2013, 2015），小岩（2013, 2017）によってその知見が用いられ，中学校段階における文字式の指導の指針が提案されてきた。
しかしながら，文字式の重要性がより高まるはずの高等学校段階に焦点を当てた研究は蓄積されていない。また，Sfard & Linchevskiが提示した代数的思考の発達は，「ある文脈においてプロセスとして捉えられていたコンセプションが別の文脈でプロダクトとして扱われることを通して，概念が形成される」という具象化理論に基づいてい

るがゆえに，氏らが自身で提唱した代数的思考を定める独立変数の１つである「可変性（versatility）」を限定的に用いているように思われる。具体的には，氏らは「可変性」を，文字式を文脈に応じてプロセスやプロダクト，関数などと捉えられることと捉えているにも関わらず，氏らの提唱した発達過程ではプロセスからプロダクトという一方向のみに焦点が当てられている。

そこで本章では，高等学校段階で育成すべき「式を読む力」を，この「可変性」をより重要視して，文字式をプロセスとプロダクト（関数を含む）の双方として読むこととして定め，以下のように全体の発達過程を具体化する。

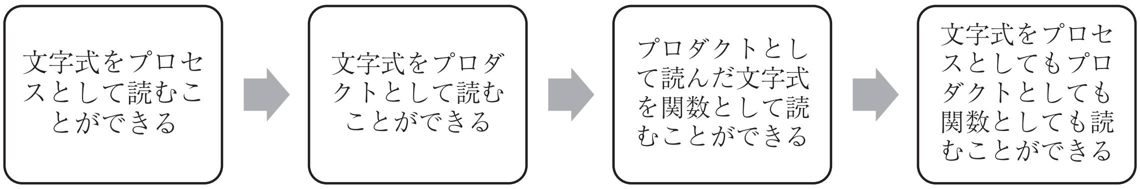


図２　文字式を読む力の発達過程

以下では，高等学校で扱われる具体的な文字式を対象として，プロセス－プロダクトを視点とした教材分析を行い，学習者が文字式をプロセスとプロダクト（関数を含む）の双方として捉えられるように育成することの意義について，主として文字式の理解と，「算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ」で提示された算数・数学の学習過程のイメージを視点に論じる。その上で，育成すべき「学びに向かう力，人間性等」との関連について述べる。

３．高等学校数学科における「文字式を読む力」に関する教材の分析

(1)　「２直線の交点を通る直線の方程式」の教育課程上の位置付け

高等学校数学科では，科目「数学Ⅰ」において２次関数のグラフと関連づけて方程式が扱われる。具体的には，関数のグラフの移動に伴う方程式の変化や，グラフと座標軸との交点と方程式の根の関係などが扱われる。この扱いは，中学校数学科において連立方程式と１次関数のグラフを関連づけた扱いから発展されたものである。すなわち，文字式を関数として捉える見方が用いられており，Sfard & Linchevskiが指摘した代数的思考の発達上の困難点（ii）を経た学習が想定されている。また，科目「数学Ⅱ」では，恒等式や３次以上の高次方程式といった新たな文字式に加え，単元「図形と方程式」において，図形を座標平面上の点の集合と捉えることで方程式と関連づけて考察する座標幾何学の考えが導入される。この座標幾何学の考えには，図形を「特定の条件を満たす点の集合」と捉える見方と，方程式を「集合を定める条件」と捉える見方が用いられている。この後者の見方では方程式内の文字を変数と捉えることが不可欠であり，かつ，文字式を関数と捉える際にその背後にある集合を，これまで以上に明示的に捉える必要がある。すなわち，この単元「図形と方程式」は，学校数学において，図形の考察方法の獲得の場としての位置付けのほか，中学校から断続的に学習してきた文字式についての見方を適用して学習する単元としても重要な意味をもつ。

この単元で扱われる図形及びその方程式の中に，２直線の交点を通る直線とその方程式がある。この図形は点や直線 $ax+by+c=0$ ，円 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ といった基本的な平面

図形そのものではなく，学習指導要領において取り扱いが明記されたものではないが，教科書には掲載されているものである。この図形とその方程式は，**図３**のように，「数学Ⅱ」で新たに学習する恒等式としての文字式の見方を用いる教材として位置付けられていると考えられる。すなわち，文字式を，図３内の k を変数とする定数関数として，または k についての恒等式という相等関係として捉えなおす見方を扱うものであり，図２に示した発達過程の右端にある相に対応する教材であると言える。

２直線の交点を通る直線

２直線 $2x-y-3=0$，$x+2y-4=0$ の交点の座標は，２直線の方程式を連立させて解いて，点 (2，1) になる。

k を定数として，方程式

$$2x-y-3+k(x+2y-4)=0 \quad \cdots\cdots①$$

を考えてみよう。

$k=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$

のとき，①は，それぞれ，右の図のような直線を表し，いずれも，定点 (2，1) を通っている。

①は，２直線

$2x-y-3=0$，$x+2y-4=0$

の交点を通る直線を表している。ただし，①は直線 $x+2y-4=0$ は表さない。

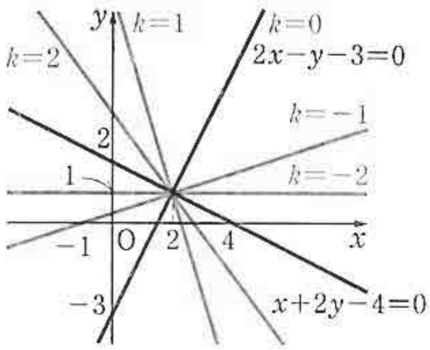


図３　２直線の交点を通る直線とその方程式（高橋ほか，2011，p.81）[1)]

(2)　「２直線の交点を通る直線の方程式」のもつプロセス－プロダクトの二面性

上述のように，２直線の交点を通る直線の方程式は，Sfard & Linchevskiによる代数的思考の発達過程では捉えきれない文字式の見方を用いる教材であり，本稿で提示した高等学校段階で育成すべき「式を読む力」を用いる対象となるものである。ここではこの方程式を，

$$m(a_1x+b_1y+c_1)+n(a_2x+b_2y+c_2)=0 \quad \cdots(*)$$

と表して，プロセス－プロダクトの二面性を視点にその読み方を検討する。

まず，この方程式(*)は，ma_1+na_2 と mb_1+nb_2 は共には0にはならないものとすれば，

$$(ma_1+na_2)x+(mb_1+nb_2)y+(mc_1+nc_2)=0$$

と変形できることから，座標平面上の直線を表す方程式である。

また，**図３**と同様に考えて，この方程式(*)は m とn の値によらずに，連立方程式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \quad \cdots(**)$$

の解（$x=x_0$，$y=y_0$であるとする）を解にもつことから，この直線は２直線(**)の交点を必ず通る。すなわちこの方程式(*)は，２直線(**)の交点を通る直線を表す[2)]。

この方程式(*)を，ある図形を表す方程式として１つの数学的対象として捉える見方は，

文字式をプロダクトとして捉える見方であり，文字 m とn に関しては恒等式，文字 x と y に関しては２変数関数と捉えていることになる。

一方，方程式(*)は，連立方程式(**)の解を加減法によって求めている演算のプロセスと捉えることもできる[3]。例えば，$m=a_2, n=-a_1$ と見れば，方程式(*)はyの値を求める加減法となる。

(3)　「２直線の交点を通る直線の方程式」のをプロセスとして読むことの学習上の意義

上記のように方程式(*)をプロセスとして読むことには，次の３つの学習上の意義がある。

第一に，上述の恒等式として捉える見方が困難な学習者に対して，この方程式(*)が２直線(**)の交点を通る直線を表すことの理解を促しうることである。中学校数学科では，１次関数のグラフ同士の交点を求めるために連立方程式を利用する学習を行なっている。したがって，方程式(*)は，連立方程式(**)の解を加減法によって求めている演算のプロセスと捉える見方は，方程式(*)が２直線(**)の交点に関連していることの理解を促すと考えられる。これは方程式(*)と，方程式を構成する多項式との関係に関する理解であるので，方程式(*)について，Brown（1974）の述べる内的理解の促進に寄与すると言える。

第二に，既習の直線の方程式

$$y-q=m(x-p) \quad \cdots(***)$$

についても，同様に連立方程式の解を加減法によって求めている演算のプロセス及びそのプロダクトとして捉える見方を得る機会になることである。「数学Ⅰ」までの学習では，この方程式(***)で表される直線は，傾き m で原点を通る直線を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した直線として捉えてきた（**図４**）。一方，方程式(*)と同様にこの方程式(***)をプロセスとして捉えると，２直線 $x-p=0, y-q=0$の交点を通る直線の方程式という新たなプロダクトとしても捉えなおすことができる（**図５**）。

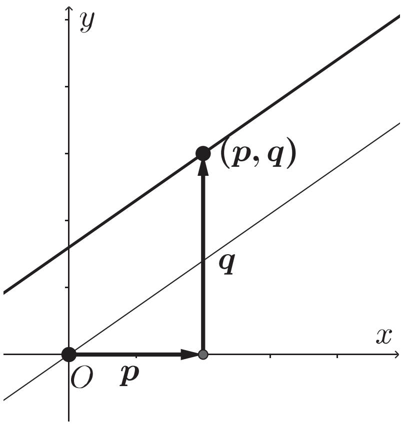


図４　平行移動した直線

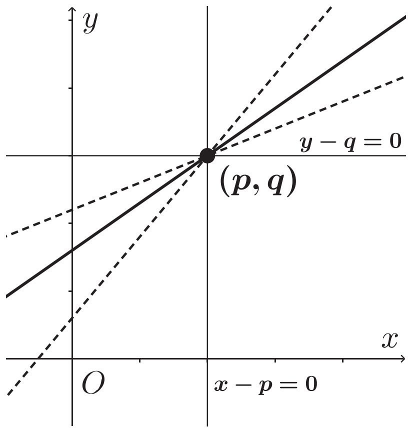


図５　２直線の交点を通る直線

このように既習の直線の方程式(***)を捉えなおすことで，直線(*)が直線(***)を一般化したものであるという理解を促すことも期待できる。これは，方程式(*)とは異なるものとして捉えていた方程式(***)との関係に関する理解であるので，方程式(*)について，Brown（1974）の述べる外的理解の促進に寄与すると言える。

このように既習の知識と関連づけて学ぶことは，「算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ」で提示された算数・数学の学習過程のイメージ（**図６**）内のD2の１つに位置付けられており，本稿で着目した「文字式を読む力」が日本の数学教育の方向性とも整合していることが確認できる。

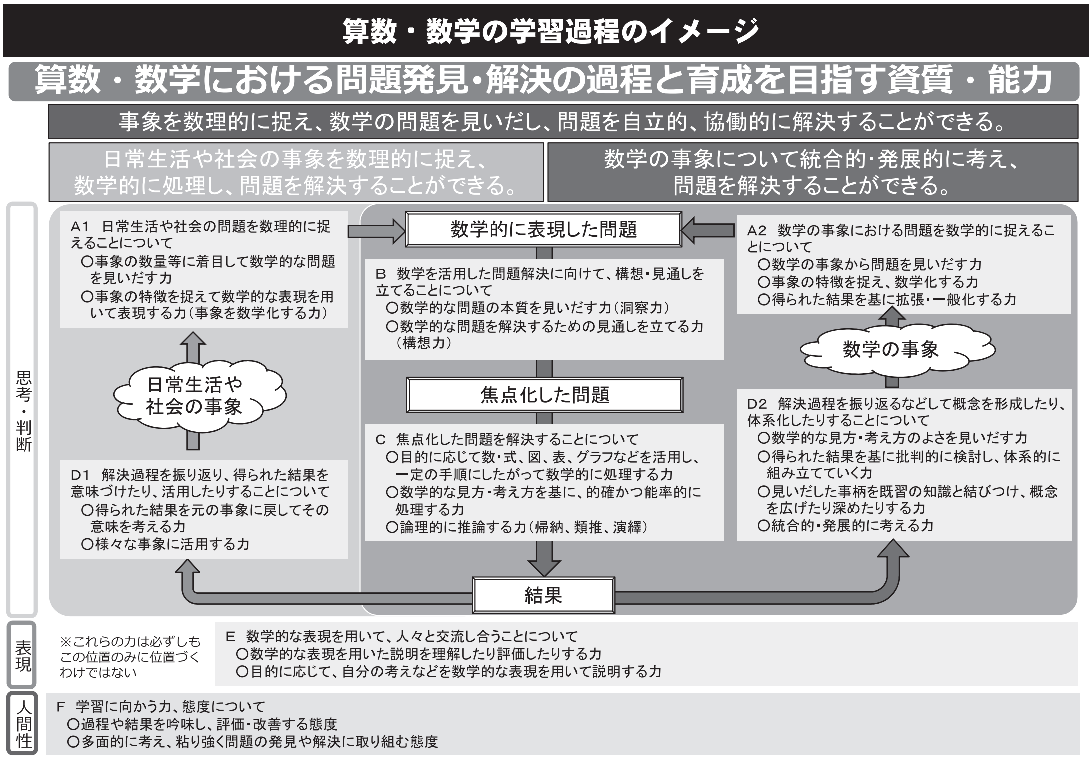


図６　算数・数学ワーキンググループによる算数・数学の学習過程のイメージ

第３の学習上の意義は，連立方程式の加減法という解法についての理解を促せることである。先述のように，方程式(*)は，$m=a_2, n=-a_1$ と見れば連立方程式(**)を満たす y の値を求める加減法として捉えられる。一方でこのプロセスは，２直線(**)の交点を通る直線のうち，x 軸に平行な直線 $y=y_0$ を得るプロセスと捉えることもできる。すなわち，２元１次連立方程式の加減法とは，２つの直線の交点を通る直線のうち，軸と平行な直線を特定するプロセスであると解釈することができる。これは連立方程式の加減法を１つの対象として捉えて，それとは異なる座標平面上の図形の操作との関係に関する理解であるので，連立方程式の加減法について，Brown（1974）の述べる外的理解の促進に寄与すると言える。

(4)　「学びに向かう力，人間性等」との関連

平成29年及び平成30年に改訂された学習指導要領では，育成を目指す「学びに向かう力，人間性等」が数学的に考える資質・能力を整理する柱の一つとして位置付けられ，１節で言及した各学年及び科目の目標には表２のように記された。これらは，非認知的な資質・能力をも含めた資質・能力について，学年の進展を踏まえた育成の指針を示すものであり，これまでの学習指導要領ではその段階が必ずしも明示的ではなかったものである。その一方で，他の二つの柱である「知識及び技能等」や「思考力，判断力，表現力等」とは異な

り，各科目や数学的内容を反映しない記述になっており，例えば本章で焦点を当てた「文字式を読む力」との直接的な関連は読み取れない。

表２　算数・数学科で育成を目指す「学びに向かう力，人間性」

文部科学省（2017），文部科学省（2018a）及び文部科学省（2018b）を元に作成

	学びに向かう力，人間性
小学校 第６学年	数学的に表現・処理したことを振り返り，多面的に捉え検討してよりよいものを求めて粘り強く考える態度，数学のよさに気づき学習したことを生活や学習に活用しようとする態度
中学校 第１学年	数学的活動の楽しさや数学のよさに気付いて粘り強く考え，数学を生活や学習に生かそうとする態度，問題解決の過程を振り返って検討しようとする態度，多面的に捉え考えようとする態度
中学校 第2学年	数学的活動の楽しさや数学のよさ実感して粘り強く考え，数学を生活や学習に生かそうとする態度，問題解決の過程を振り返って評価・改善しようとする態度，多様な考えを認め，よりよく問題解決しようとする態度
中学校 第3学年	
高等学校 「数学Ⅰ」	数学のよさを認識し数学を活用しようとする態度，粘り強く考え数学的論拠に基づいて判断しようとする態度，問題解決の過程を振り返って考察を深めたり，評価・改善したりしようとする態度や創造性の基礎
高等学校 「数学Ⅱ」	数学のよさを認識し数学を活用しようとする態度，粘り強く柔軟に考え数学的論拠に基づいて判断しようとする態度，問題解決の過程を振り返って考察を深めたり，評価・改善したりしようとする態度や創造性の基礎

そこで，本章で提示した教材を用いた学習を想定した上で，そこで発揮されることが期待される「学びに向かう力，人間性等」について検討し，この資質・能力の側面を具体化する。

①学習の想定

本章では，本教材を用いた学習が次の過程で行われると想定する。なお，考察対象とする各方程式は，教師が与えることを想定している。

まず， $2(x-2)=3(y+2)$ のように簡単な構成の方程式が定点を通る直線を表すことの判別と，平行移動を視点にした既習の文字式の読み方の復習を行う。そして，より一般的な $m(x-2)=n(y+2)$ が表す図形を理解する。

次いで，この一般化された方程式を元にした， $m(2x+3y+1)=n(x-3y+2)$ のようなやや複雑化された方程式が表す図形について考える。作図ツール等を用いることによって，この方程式も１点を通る直線を表すことを予想し，その１点の座標を求めようとし，恒等式として方程式を読む方法や，連立方程式を用いて，１点の座標を得る。

続いて，解法を吟味することを通して，恒等式という１つの対象（プロダクト）としての読み方と，連立方程式の加減法というプロセスとしての読み方を対比させる。

最後に，より一般化された方程式 $m(a_1x+b_1y+c_1)+n(a_2x+b_2y+c_2)=0$ や，既習のよりシンプルな方程式 $mx+ny=0$ を，このプロセス－プロダクトの二面性を視点に読み，これらを統合的に理解する。

②「文字式を読む力」とともに発揮することが期待される「学びに向かう力，人間性等」

上記の過程を大きく捉えると，方程式を構成する条件を変更しながら一般化し，その過程で得られた見方を用いて特殊な例を捉えなおす，という過程になっている。より詳細に捉えると，前者の一般化では，まず，定数を文字で表すことによる一般化が行われており，次に１元１次多項式から２元１次多項式への一般化が行われ，さらに定数を文字で表す一般化が行われている。

この「定数を文字で表すことによる一般化」は文字及び文字式の学習で継続的に学習してきたことである。したがって，生徒がそのよさを感得しており，進んで一般化しようとする態度を発揮することが期待される。

一方の「１元１次多項式から２元１次多項式への一般化」は，必ずしも明確に指導されていないと考える。なぜならば，２元１次方程式をはじめて学習する中学校第２学年では，既習の１元１次方程式とは必ずしも関連づけられず，これらを関連づけて学習する機会は，２元１次方程式で表される直線の特殊として１元１次方程式で表される直線が扱われる「数学Ⅱ」の単元「図形と方程式」に限られるからである。日本の算数・数学科の教育課程では，伝統的に，「定数を文字で表すことによる一般化」や多項式の次数を大きくする一般化については小学校から随時行われてきた。その一方で，「１元１次多項式から２元１次多項式への一般化」のような変数を増やす一般化は，数学的にも現実の事象を数学的に考察する上でも重要であるにも関わらず，これまで十分に扱われてこなかったのではないだろうか。変数を増やすことによって一般化できることは文字式ならではのよさであり，生徒がこのよさを感得し，進んで一般化するような態度を身につけさせたい。

想定した過程の後半にあたる「一般化した過程で得られた見方を用いて特殊な例を捉えなおす」という過程は，上記の一般化と表裏の関係にあり，方程式間の一般と特殊の関係が明確になっていることが探究の前提になっている。その上で，新たな見方が得られた場合には，その見方を用いて振り返る態度が働くことが期待される。「振り返り」に関しては，表２に見られるように，育成を目指す「学びに向かう力，人間性等」としては問題解決の方法と内容を評価・改善するための方法として，その重要性が説かれている。しかしながら，図６のD1とD2の過程にも見られるように，「振り返り」は新たに得られた数学的内容を，日常の文脈から意味づけたり，既習の数学的概念と関連づけるなどによって数学の文脈から意味づけたりするためにも重要な方法である。しかしながら，上述の「定数を文字で表すことによる一般化」のみでは新たな見方は得がたく，この振り返りのよさを感得するのも難しい。文字式に関する学習では，次数や変数の個数の一般化の際にこの振り返りと意味づけを行い，生徒がこれらの過程のよさを感得し，進んでこの過程を遂行するような態度を身につけさせたい。

４．まとめと今後の課題

本章では日本の算数・数学教育で長年重要視されてきた「文字式を読む力」を，数学的に考える資質・能力の育成という観点から捉え直し，育成のための長期的な展望を得ることを目的に，育成を図るための具体的な教材について検討した。具体的には，文字式をプロセスとしてもプロダクトとしても関数としても読めるようにするための教材として「２

直線の交点を通る直線」を位置付け，そのような教材としてこの数学的対象を学ぶ意義について論じた。加えて，具体的な数学的内容との関連が必ずしも明確でない「学びに向かう力，人間性」を，この教材を用いた学習と関連づけて具体化した。

今後の課題は，文字式をプロセスとしてもプロダクトとしても関数としても読めるようにするための教材を新たに開発することである。

註

1）図３では，方程式①が直線を表すことが宣言されているが，実際には①を

$$(2+k)x+(-1+2k)y+(-3-4k)=0$$

などと変形し，２変数 x,y の係数が共には0にならないこと，すなわち全体が1つの１次式として表されることを根拠に，座標平面上の直線であることが確認される。

2）一般に，２変数 x,y についての２つの多項式 P(x,y)とQ(x,y)から構成される方程式

$$mP(x,y)+nQ(x,y)=0$$

は，２つの方程式 P(x,y)=0 と Q(x,y)=0 が表す図形が共有点をもつ場合には，その共有点を通る図形の方程式になる。ただしどのような図形を表すかは変数の係数に依存し，変数の係数が全て0になる場合は座標平面そのものを表すか，図形を表さない。また，２つの方程式 P(x,y)=0 と Q(x,y)=0 が表す図形が共有点をもたない場合にも方程式 mP(x,y)+nQ(x,y)=0 が表す図形は存在しうる。この場合は３次元空間内の図形の射影として捉える見方がある（花園，2014）。

3）２直線の交点を通る直線の方程式を連立方程式の加減法として捉える見方は，東京学芸大学附属高等学校数学科の先生方との議論で得られたものである。

引用・参考文献

Brown, S. I. （1974）， Musing on multiplication. *Mathematics Teaching, 61*, 26–30

榎本哲士（2013），「学校数学における文字式の理解を捉える枠組みの構築：関数的アプローチを視点として」，日本数学教育学会誌，95，数学教育学論究，臨時増刊，25–32

榎本哲士（2015）「中学校数学科における二元一次方程式の関数的見方に関する理論的分析：数学的概念の二面性を視点として」，教材学研究，26，49–56

花園隼人（2014），「学校数学における『美しさ』をとらえる枠組みの構築：数学における『美しさ』の特色の分析を通して」，筑波大学人間総合科学研究科学校教育学専攻学校教育学研究紀要，7，105-125

小岩大（2013），「変数の理解に関する一考察：文字式の大小比較問題の解決方法に焦点を当てて」，日本数学教育学会誌，95，数学教育学論究，臨時増刊，145–152

小岩大（2017），「変数の理解水準に関する一考察：『凝縮化された可変性』における生徒の理解の実態に焦点を当てて」，日本数学教育学会誌，99，数学教育学論究，臨時増刊，1-8

三輪辰郎（1996），「文字式の指導序説」，筑波数学教育研究，15，1–14

文部科学省（2009），『高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編』，実教出版

文部科学省（2016），「算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ」
http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/073/sonota/__icsFiles/

afieldfile/2016/09/12/1376993.pdf（最終閲覧：2018.4.30）
文部科学省（2017），『小学校学習指導要領解説　算数編』
http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2017/07/25/1387017_4_2.pdf（最終閲覧：2018.4.30）
文部科学省（2018a），『中学校学習指導要領（平成29年告示）解説　数学編』，日本文教出版
文部科学省（2018b），『高等学校学習指導要領』．
http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2018/04/24/1384661_6_1.pdf（最終閲覧：2018.4.30）
Sfard, A. and Linchevski, L.（1994），The gains and the pitfalls of reification: the case of algebra. *Educational Studies in Mathemtaics, 26*（2–3）, 191-228
清水宏幸（1997），「中学校数学における文字式の理解に関する研究：文字式をひとまとまりと見ることの困難性に焦点をあてて」，数学教育論文発表会論文集，30，247–252
高橋陽一郎ほか（2011），『詳説数学Ⅱ』，新興出版社啓林館

10　現実事象を数理的に捉え問題を解決する学習過程の授業例

東京学芸大学附属国際中等教育学校教諭　本田　千春

１．はじめに

本校数学科では，数学的モデル化の活動重視とICT利用を前提とした，数学的リテラシーの育成を主たる理念とする独自の６か年一貫カリキュラム（例えば本校数学科，2012）を実施している。そこでは数学的リテラシーを，OECD/PISA2003の定義をもとに，次の４つの力で捉え，その育成を図ることを理念としている。すなわち，この４つの力が，本校数学科が育成を目指す資質・能力である。

・ 確実な数学的根拠にもとづき判断する力
・ 数学的な記号や論理，適切なテクノロジーを用いて，数学的な操作を行う力
・ 数学を用いて，積極的に，豊かにコミュニケーションする力
・ 数学が世界で果たす役割を見つけ，理解する力

上記の資質・能力を育成するために，本校数学科では，以下の評価規準を設定している。ただし，１～４年用は国際バカロレアMYPとして定められている規準であり，５・６年用は本校独自に設定したものである。以下の評価規準は，上記の資質・能力を観点別に具体化したものと言える。

表1　1～4年用の評価規準

	規準A 知識と理解	規準B パターンの探究	規準C コミュニケーション	規準D 実生活への数学の応用
1～4年	i. 既知・未知のいずれの場面においても挑戦しがいのある問題を解決する際に、適切な数学を選択する。 ⅱ．このような問題を解決する際に、選択した数学をうまく適応する。 ⅲ．一般に、様々な文脈におけるこのような問題を適切に解決する。	ｉ．数学的な問題解決テクニックを複雑なパターンを発見するために選択したり適用したりする。 ⅱ．正しい発見したことに矛盾しない原則として、パターンを表現する。 ⅲ．これらの原則について、証明する、あるいは正しいかを確認し正当化する。	ｉ．常に適切な数学的言語を用いる。 ⅱ．常に情報を正確に示すために、適切な数学的表現形式を用いる。 ⅲ．異なる数学的表現形式の間を効果的に移行する。 ⅳ．完成し筋道が通った簡潔な推論を筋道立てて説明する。 ｖ．論理構造を用いて、常にまとめられた課題作品を提示する。	ｉ．本当の実生活場面に関連のある要素を特定する。 ⅱ．適切な数学的方略を、本当の実生活場面をモデル化するために選択する。 ⅲ．数学的方略を、本当の実生活場面の正しい解決策に達することに適用する。 ⅳ．解決策の正確さの度合いを正当化する。 ｖ．解決策が本当の実生活場面の文脈で意味を成すかどうかを正当化する。

表２　５・６年用の評価規準

	規準A	規準B		規準C
5・6年	知識・技能	プロセスと振り返り		数学的コミュニケーション
		B1	B2	
	数学的概念を理解し，計算などの数学的操作を行うことができる。	現実の問題を解決するために，定式化，処理，解釈・評価のプロセスを踏むことができる。	数学の事象からパターンや性質などを見いだし，確かめ，発展させることができる。	数学的表現を用いて，積極的に，豊かに他者とコミュニケーションすることができる。

上述の資質・能力を育成するためには事象の探究を軸に据えた授業を実施することが大前提であるという考えから，オリジナルの副教材『TGUISS数学』を用いて，既習の数学的知識・技能，見方・考え方を使って問題を解決したり新たな数学を創りだしたりする活動を行っている。

２．本授業のねらい

次期学習指導要領実施への動きとして本校数学科が着目したのは，文科省の算数・数学ワーキンググループ（2016）が示した「算数・数学における問題発見・解決の過程」（**図１**）である。これは，本校数学科が参考にしている島田（1977）による「数学的活動」の模式図を踏襲しているともみられ，そこに，「育成を目指す資質・能力」が位置付けられている。数学的に問題解決する過程には，【現実の世界】に含まれる過程と，【数学の世界】に含まれる過程の２つがあり，この２つの過程は相互に関わり合い，かつ，何周も回るのが理想である。本授業は，【現実の世界】に含まれる過程に焦点を当て，本校１年生で実践したものである。本授業で扱う題材は，１年生では，「事象の見方」という単元の練習問題として，４年生では，「指数関数」の探究課題として，両学年の副読本に掲載されている。

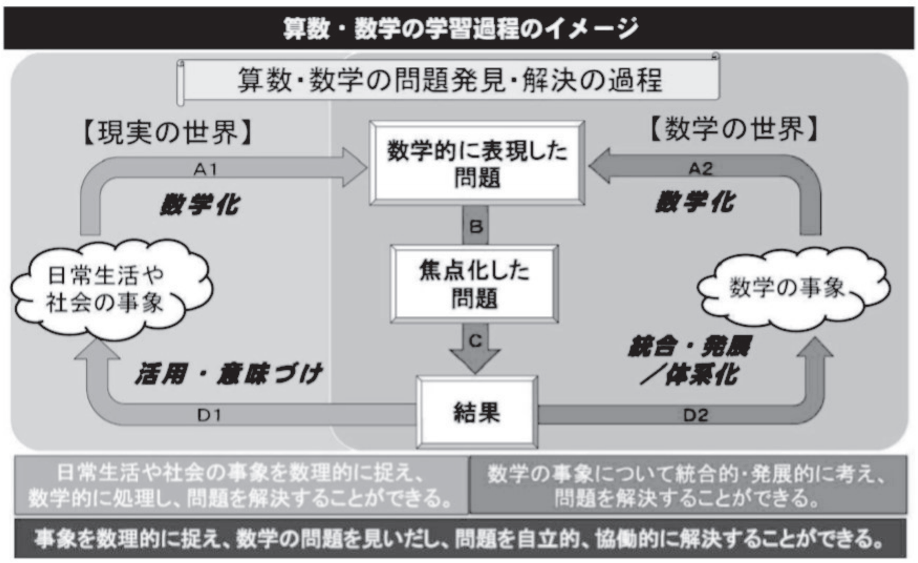


図１　算数・数学の学習過程のイメージ

本授業では，関数の素地的内容として，繰り返し（再帰関係）の内在する事象の探究を通して，その関係を定式化し変化をとらえ問題を解決することをねらいとして実践した。

生徒たちにとって身近な事象である，薬の服用を題材にしたものである。決められた時間ごとに飲むことの意味について考えさせることから，問題解決の必要感を生徒に持たせることができると考える。「なぜ，薬を決められた時間ごとに服用するのか」これが，現実の世界の問題である。昼夜を問わず決められた時間ごとに忘れず服用すると仮定することで，数学的に表現した問題にすることができるので，この数学化の活動を丁寧に扱うことが大切である。薬を半減期ごとに服用していくという繰り返しの行動から，体内の薬の量が40㎎から80㎎の間で安定する。このことを，薬を繰り返し服用していく行動を数理的にとらえ，変化の様子を調べることで体内の薬の量の増え方が小さくなっていくことや，80㎎は超えないことなどから気づかせるようにする。変化の様子を調べる際には，繰り返しの関係を定式化することで，説明しやすくなったり計算しやすくなったりすることを実感させる。

服用する薬の量は，現実と考えやすさの両面から40ｍｇにした。

３．問題

さくらさんは，風邪薬を服用することになり，薬局で40㎎を８時間ごとに服用するように指示された。薬剤師さんによると，飲んだ８時間後に体内にある薬の量は，服用した直後に体内にあった量の半分になるという。なぜ，体内の薬の量が半分になる８時間ごとに服用するように指示されるのだろうか。

４．授業の実際

(1) 疑問や問いの発生

問題を提示する前に，薬を飲んだ経験について問いかける。薬を服用するときに注意することは何かと問うと，以下のような意見が出された。

・飲む量を間違えないこと
・食後か空腹時か
・他の薬と一緒に飲まないこと

そこで，毎食後に服用するように言われた薬を昼食時に服用し忘れた経験はないかと問うと，数名がそういう経験があると答えた。薬を服用し忘れると効き目が薄れることは想像できるが，なぜ決められた時間ごとに服用する必要があるのか。今回はその理由を考えることを伝え，問題を提示した。

(2) 問題の設定

実際に薬を服用する場合は，８時間ごとというよりは毎食後というほうが現実的ではあるが，考えやすさを考慮し，８時間ごとという設定にした。また，問題を解決するうえで重要な薬の半減期についての情報は，薬剤師さんからの情報という形で与える。

(3) 問題の理解と予想

40㎎を８時間ごとに服用するように指示されたことと，服用した薬は８時間後に半分になることを丁寧に確認した。

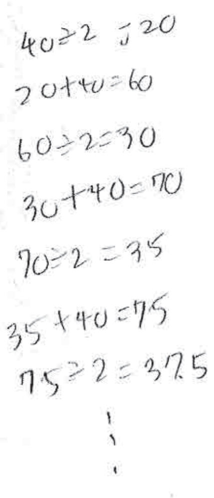
解決に入る前に簡単に予想をさせた。生徒の反応例は，次のとおりである。

・少ない量からだんだん慣らしていくようにしているため。
・常に薬が体内にあるようにするため。
・体内で常に半分の20mgの量に保つため。
・体内の薬の量が多すぎるのもよくないから8時間ごとがちょうどよい。

(4) 解決の計画と計画の実行

生徒に予想を発表させた後で，どの予想が正しそうかを問うと，体内に常に薬があるように保つためだが、量が多すぎるのもよくないので，（時間ごとに服用するのではないかという考えに落ち着いた。そこで，体内の薬の量はどのようになっていくのか，実際に計算して確かめてみることにした。ここで，体内の薬の量の変化の様子を調べるという数学の問題となる。

イラストやグラフ，表などで表し，状況を把握しやすい形にして，体内の薬の量を計算していく生徒が多数見られた。



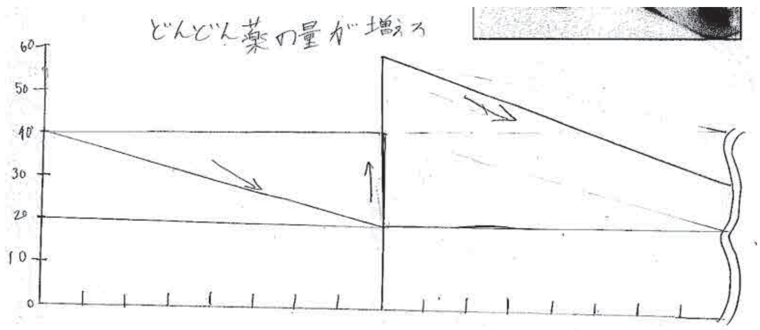
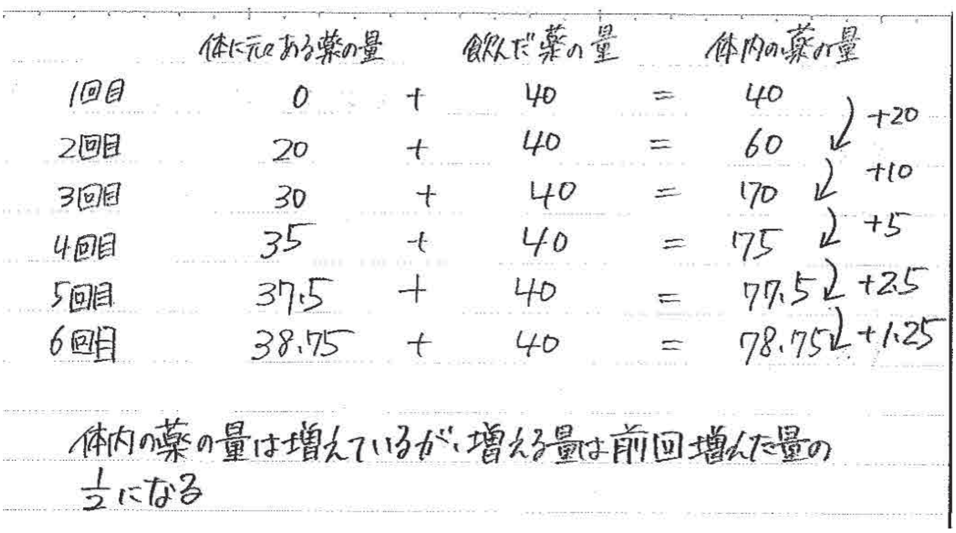


図３　グラフで変化の様子を表したもの

図２　式だけを書いているもの



	体に元々ある薬の量		飲んだ薬の量		体内の薬の量	
1回目	0	+	40	=	40	
2回目	20	+	40	=	60	+20
3回目	30	+	40	=	70	+10
4回目	35	+	40	=	75	+5
5回目	37.5	+	40	=	77.5	+2.5
6回目	38.75	+	40	=	78.75	+1.25

体内の薬の量は増えているが、増える量は前回増んだ量の$\frac{1}{2}$になる

図４　増える量の変化についても記述できているもの

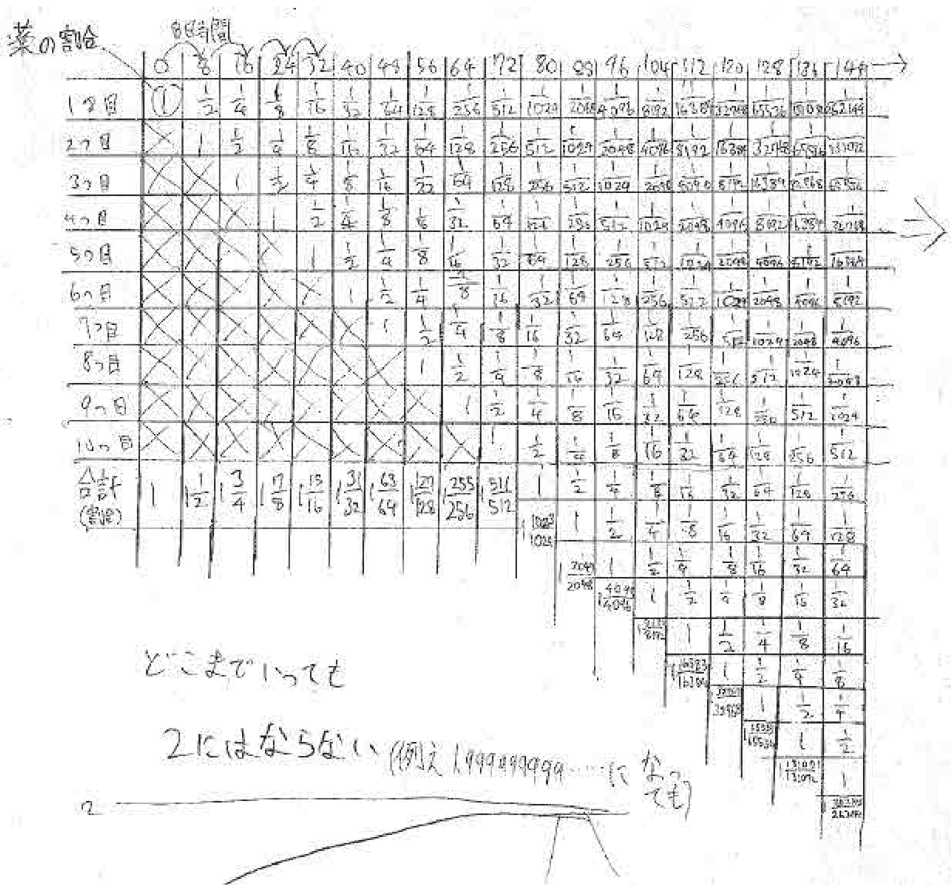


図５　薬の量を割合で表したもの

(5) 焦点化した問題と結果の検討

ペアや小グループで考え方などを共有した後で，特徴的な考え方を全体で取り上げた。２日間服用した場合，６回目の服用直後の体内の薬の量は78.75mgになることを確認した。そして，服用をさらに続けると，体内の薬の量は増え続けるのかという焦点化した問題について考えさせた。

計算機のAnswer機能を使用して計算した生徒の方法を取り上げることで，繰り返しの関係を定式化することにつなげることができた。１回目は40，２回目は40÷2＋40，３回目は60÷2＋40の式になることから，ans÷2＋40の式で次々と体内の薬の量を求めることができる。薬を服用した直後の体内の薬の量をNow，その次の服用直後の体内の薬の量をNextとすると，Next=Now÷2＋40という関係式が成り立つことから，ans÷2＋40という式で計算できることを確認した。電卓では表示桁数の関係で80という答えが表示されてしまうことから，ちょうど80mgになると考える生徒も出てきた。そこで，本当に80mgになるのかを問うことにした。すると，**図４**のように増える量が減少していくことを理解している生徒の中にも，増えていくのが止まるときにちょうど80mgになるのではないかと考える生徒もいた。そこで，**図５**のように薬の量を割合で表した生徒の方法を取り上げることで80mgに限りなく近づいていくが80mgにはならないことを確認した。

(6) 解決過程や結果の振り返り

体内の薬の量の変化の様子を正しく考察できたところで，なぜ，体内の薬の量が半分に

なる8時間ごとに飲むように指示されるのだろうかという問題にもどって，薬を決められた時間ごとに飲む意味を考えさせた。体内量が半分になるタイミングで服用することで，薬の体内量はもとの量とその倍の量の間で安定するため，薬の量が少なすぎず多すぎないのでちょうどよい効果が得られるためという答えにまとまった。解決過程においては，繰り返しの関係を式や表，グラフにすることで変化の様子がとらえやすくなることを確認した。ただし，グラフの正誤については深入りしなかった。

5．おわりに

次期学習指導要領において，「数学的な見方」は，事象を数量や図形及びそれらの関係についての概念等に着目してその特徴や本質を捉えることであり，「数学的な考え方」は，目的に応じて数・式，図，表，グラフ等を活用し，論理的に考え，問題解決の過程を振り返るなどして既習の知識・技能等を関連付けながら統合的・発展的に考えることであると整理されている。本実践では，【現実の世界】に含まれる過程に焦点を当て，数学化，問題発見，定式化を丁寧に扱い授業を行うことで，生徒たちがこれらの見方・考え方を発揮しながら数学的に問題を解決することができた。したがって，これらの力を育成する上で本課題は有効であると考える。

引用・参考文献

国立教育政策研究所（2016），『資質・能力　理論編　国研ライブラリー』，東洋館出版社

東京学芸大学附属国際中等教育学校数学教育研究会（2015），『TGUISS数学１』，正進社

東京学芸大学附属国際中等教育学校数学教育研究会（2014），『TGUISS数学４』，正進社

『数学教育』編集部（2017），『学習指導要領改訂のポイント』，明治図書

東京学芸大学附属国際中等教育学校数学科(2017)，「授業研究会分科会資料」

11　中学校数学科における数学的活動の充実に向けた評価問題の開発

筑波大学附属中学校教諭　近藤　俊男

１．はじめに

平成29年告示学習指導要領では，中央教育審議会において示された“３つの柱”を基盤として目標が整理された。数学的活動のさらなる充実とともに，数学的な見方・考え方を数学的に考える資質・能力全体に働かせることが明確に示された点で従前に比べ特徴的である。その中で３つ目の柱である，学びに向かう力，人間性等に関連して目標（3）で述べられている「数学的活動の楽しさや数学のよさを実感して粘り強く考え数学を生活や学習に生かそうとする態度」を養うことに注目したい。理由は，情意的な側面の充実については以前から述べられてきたことであるが，時代の流れとともに国内外の大規模調査の結果から要請されるべきこととしてより一層強調され，数学を学ぶ意味のような学習の根底に関することとして今回の改訂の特徴的な部分の一つであると言える。

粘り強くかつ柔軟に考えようとする“態度”は，社会に出たときに求められる資質と直結しており，数学を学ぶことを通してそのような態度を身に付けることは非常に意味がある。なぜ数学を学ぶのかといった根本的な問いや数学の楽しさ，面白さの実感につながっていくものと考えられる。

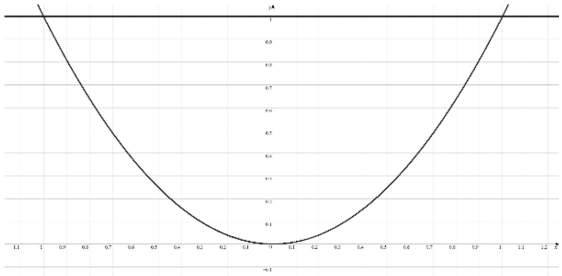
社会に出たときに遭遇する問題は，未知であることが多い。途方もなく大きな問題や，自分にとって容易に解決することができない問題にであったとき，目を背けず，その問題に対してどのように対峙していくのか，そのアプローチの方法を探ることが大切である。そこでは，まず何よりその課題に向き合う“態度”が問われることになる。数学的な問題解決では，構想や見通しを立て，試行錯誤しながら何とか答えにたどり着くための方法を探る。一つの方法に限らず，色々な側面から問題の解決へ向かう視点をもつことも大切である。解決に見通しが立たない場合には，既習の事項と関連付けることで解決の糸口を見いだすことがある。数学の学習を通して，社会に出たときに必要となる問題解決の方法を身に付けようとする点で，数学を学校教育の中で学習する意義の一つであると言える。
そこで重要になってくるのが数学的活動の充実である。数学的活動の楽しさや数学のよさについては，「単にでき上がった数学を知るだけでなく，事象を理想化したり抽象化したりして数学の舞台にのせ，事象に潜む法則を見つけたり，観察や操作，実験などの活動を通して，数や図形の性質などを見いだしたりし，見いだした性質を発展させる活動などを通して数学を学ぶことを重視する」とともに，「自立的，協働的な活動を通して数学を学ぶことを体験する機会を設け，その過程で様々な工夫，驚き，感動を味わい，数学を学ぶことの面白さ，考えることの楽しさを味わえるようにすることが大切である（p.28）」とある。生徒が課題に対して積極的に取り組むことができるようにするとともに，その中で試行錯誤しながら，また，色々な考えを比較しながら問題を解決する過程を経ることができるようにすることが大切であると言える。

本稿では，数学的活動の充実と問題解決の中で「粘り強く」問題に取り組む態度に焦点を当て，その育成に向けた評価問題を開発し，それを利用した授業の在り方について考察することを目的とする。そのために，中学校第3学年の生徒を対象にアンケートを行い，その記述内容を分析した。

２．評価問題の開発

問題

問　右の図のように、$y = x^2$と $y = 1$ のグラフに囲まれた部分の面積を求めるための方法を考えよう。



(1) 問題の開発の背景

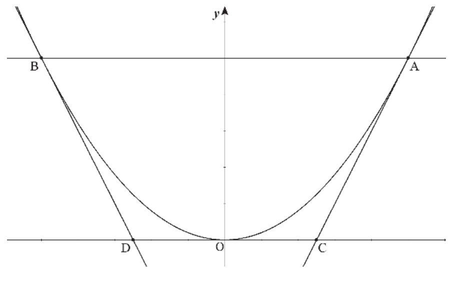
中学校段階において曲線に囲まれた図形に関する学習は，第１学年の平面図形，空間図形，第３学年の円である。それに加え，曲線のグラフは第１学年の反比例，第３学年の$y = ax^2$がある。面積や体積については小学校での学習を基にして，第１学年でおうぎ形，球の表面積と体積について学習する。曲線に囲まれた図形の面積や体積について，高等学校まで学習する機会はなく，数学Ⅰでも扱われることはないため中学第１学年での学習が最後になる生徒もいるかもしれない。

小学校では，円の面積を三角形による近似で導き，中学校では球の体積を角柱による近似で導く。そして，それらは高等学校での微分積分の学習を経て、改めて導くことで確実なものとなるが，上述の通り中学で学習してから高校で学習するまでに大きな時間経過がある。曲線で囲まれた図形の面積という，簡単には求めること難しいものを，別のもので近似することで微小の直線を連続した曲線とみなして求めるという考え方を利用する場面が中学校段階であってもよいのではないかと考える。

そこで，第３学年における$y = ax^2$の学習の後で，曲線と直線に囲まれた図形の面積を求めることを扱うことを考えた。放物線を関数のグラフとしてだけでなく、図形として考察しその面積を求めることは、それまでの学習をもとに発展的に考えること、およびその後の学習へのつながりになると考えられる。曲線で囲まれた図形の面積を求めるためには、多角形などで近似することが有効であるという考えを利用する場面だけでなく，その近似の方法としてどのような形にすればより効率的なのかについて様々な考えがだされると，比較検討する場面を設定できると考えられる。

(2) 面積の求め方

①アルキメデスの取りつくし法を利用した解法



右の図のように関数$y = x^2$のグラフと$y = 1$のグラフの交点をA，Bとする。点A，Bにおける接線をひき、２つの接線とx軸との交点をそれぞれC，Dとする。

求めたい部分の面積をＳとすると

△ＡＢＯ　＜　Ｓ　＜　台形ＡＢＤＣ

である。ここで，△ＡＢＯ$=2\times1\times\frac{1}{2}=1$，

台形ＡＢＤＣ$=(2+1)\times1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ より，$1<S<\frac{3}{2}$ が予想される。

関数$y=x^2$上の点で$x=\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$の点をＦ，Ｇとすると、$F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$、$G\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ である。よって△ＡＯＦ＝△ＢＯＧ$=\frac{1}{8}$となり、$1+\frac{1}{4}<S<\frac{3}{2}$ が導かれる。関数$y=x^2$上の点で$x=\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$，$-\frac{3}{4}$ と，残りの部分の中点に点をとり、点Ａ，Ｂ，Ｏ，Ｆ，Ｇと結んでできる三角形の面積を加える。これを繰り返していくと、$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots$のように初項１，公比$\frac{1}{4}$の等比数列の和が導ける。これが面積Ｓに次第に近づくことになる。

等比数列の和は高等学校での学習内容なので，この関係式を導くところまでができれば、電卓等で計算してみるなどして、この値が$\frac{4}{3}$に近づいていくことを導くことが考える。

②積分による解法

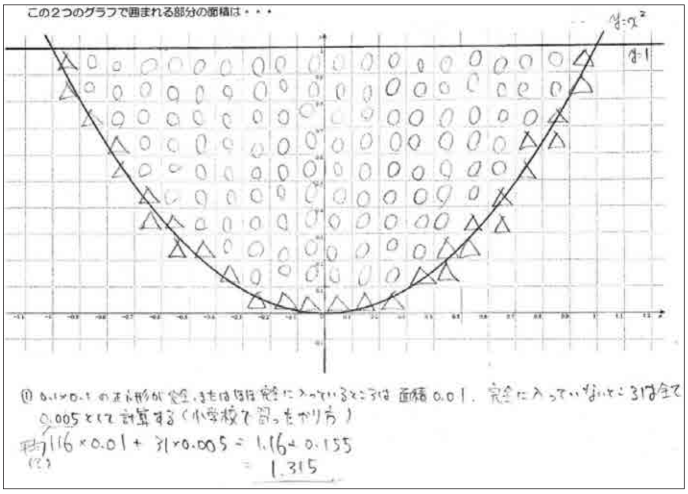
積分を利用すると以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx &= \left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}\\ &=\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\\ &=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

(3) 生徒の反応

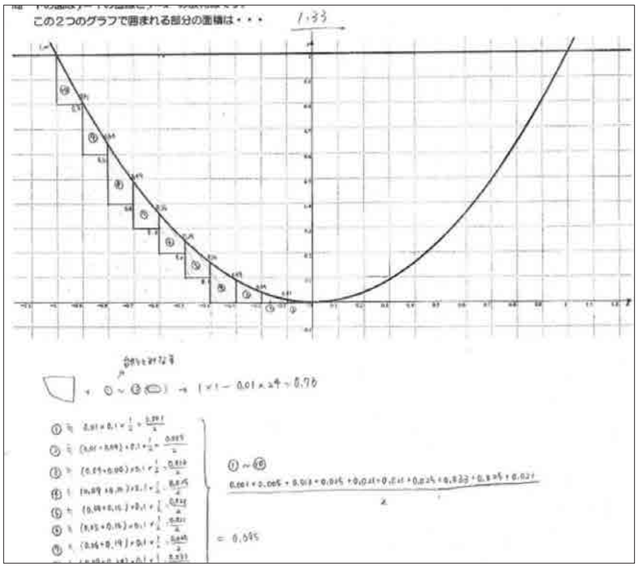
中学校第３年生の２クラスの生徒に対して、この課題を提示し，調査を行った。自由に記述するように指示し、どのように解こうとしていくのかを大切にし，途中の計算過程や考え方、方針だけでも構わない，実際に値として答えを求めることができなくてもよいと指示をした。以下に生徒の反応例を示す。

生徒Ａ



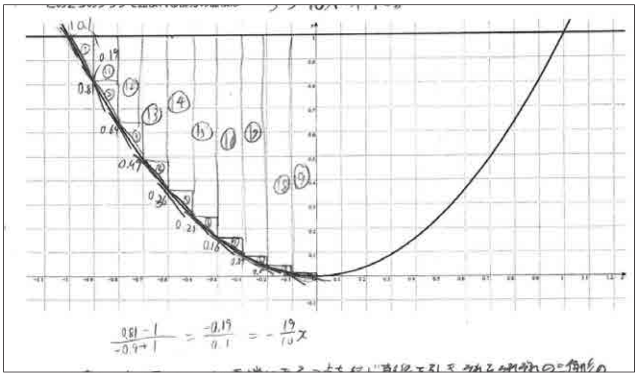
この生徒は，方眼を利用し，面積0.01の正方形がすべて含まれている所に○を，曲線によって分けられている所に△をつけ，その個数を数えることで面積を求めようとしている。「完全に入っている所は面積0.01，完全に入っていないところは全て0.005として計算する（小学校で習ったやり方）」と記述し，116×0.01＋31×0.005＝1.16＋0.155＝1.315を導いている。

生徒B



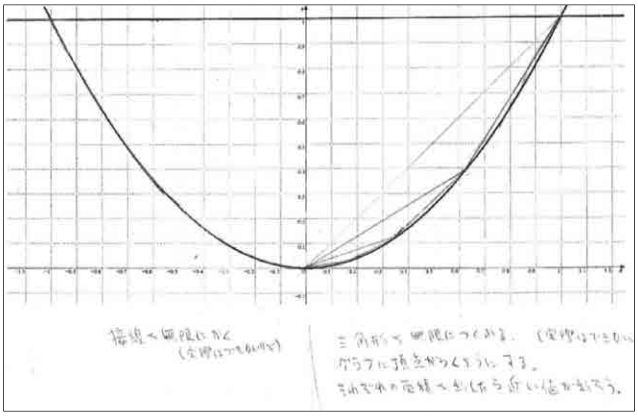
この生徒は，1.33という結論を導いている。曲線の付近を台形とみなし，それぞれの交点の座標を求めることで長さを出し，台形の面積を求めることで1×1の正方形から範囲の面積をひいて求めている。座標を利用している点が特徴的で，実際の長さを求めていることが生徒Aに比べて精度が高くなっている要因だと言える。何か規則性のようなものを導いた跡は見受けられない。

生徒C



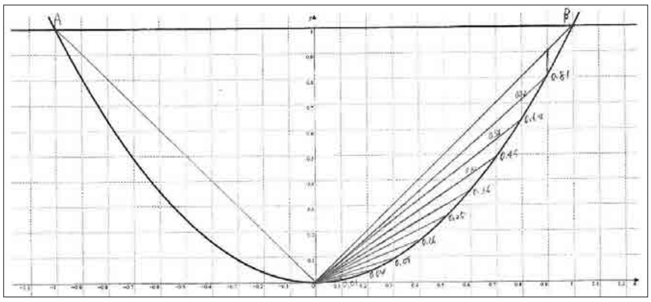
生徒Cはxの値を0.1ずつに区切り，曲線の付近では三角形による近似を利用して面積を求めようとしている。座標を求め，実際の長さを利用しており，曲線付近の近似方法は異なるが生徒Bの考え方とよく似ている。「多角形による近似」の考え方を利用していることが読み取れる。

生徒D



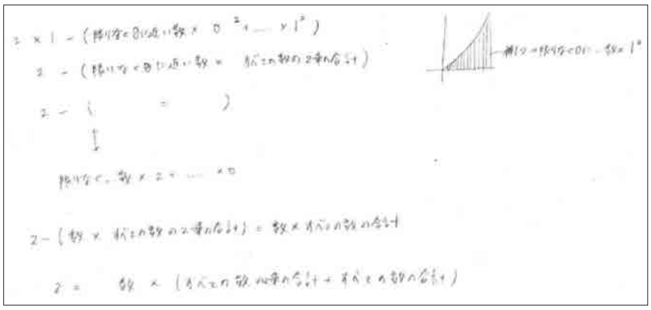
生徒Dは「三角形を無限に作れる（実際はできない）」と記述している。その上で「それぞれの面積を出したら近い値が出そう」と記述している。この「実際にはできない」という記述からはこれまで円や球の面積の学習場面で，多角形をつくり，それを無限に微小にして「近似」することで求めることができるという考えが読み取れる。「近似」や「無限」といった高次の概念へのつながりを意味する記述である。その三角形の作り方について何か見いだしたことなどは見受けられず，そこに注目することができると発展的な考えを生み出す可能性があるように感じる。

生徒Ｅ



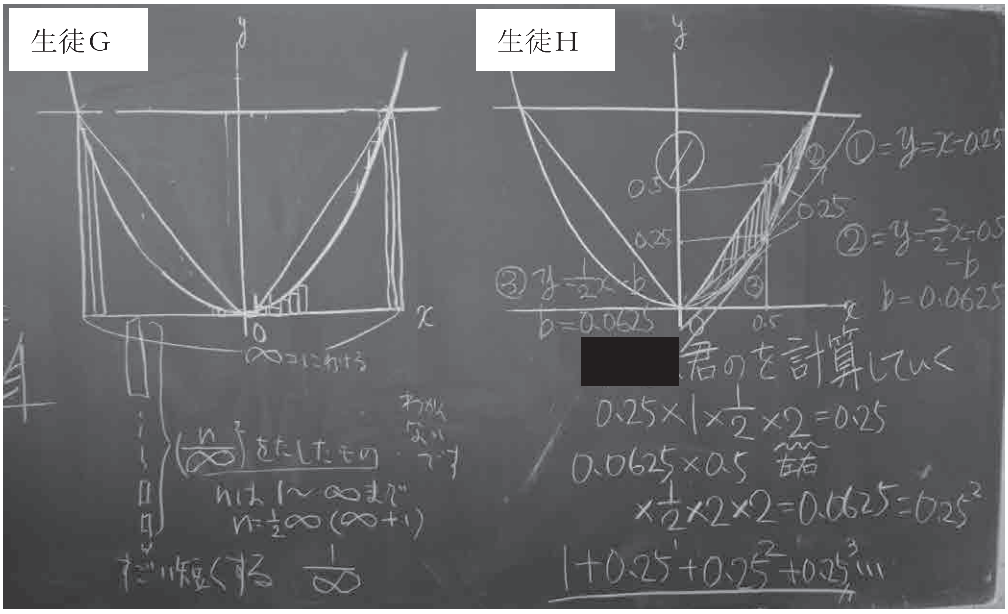
この生徒は，y軸に平行な線分をひき、原点及び放物線上の点とでできる三角形の面積を求めている。座標をうまく用いながら，ここでも約1.33と結論に達していた。

生徒Ｆ



生徒Ｆの記述からは「限りなく０に近い数」という記述がみられる。「棒１つ→限りなく０に近い数×1^2」とあり，x座標を均等にとる規則性のようなものがこれまでの生徒と異なる。また，高等学校での積分の学習につながる記述ともいえる。

多くの生徒が，曲線の部分の面積を多角形によって近似し，それに基づいて答えを求める方法を記述した。既習の事柄を生かして問題を解こうとする姿勢については多くの生徒が身についているように感じた。その中で，近似する図形を一定の規則に従って設定させている生徒は少ない。より曲線との誤差を少なくし精度をあげていくためには，一方の長さを等間隔に設定したり，高さを一定に保ったまま変形させていくといった視点が必要になる。次の２つの考えは，長方形を等間隔に設定しているものと，中点で分け続ける考え方として非常に興味深い。



３．授業実践に向けた考察

課題が提示されるとどのように面積を求めればよいかについて戸惑い，なかなか課題の解決に移れない生徒もいた。それは，今まで学習してきたこととは異なり，円のようにきれいな形をしているわけでもなく，楕円のような図形であるがために一筋縄にはいかないことを感じ取ったためと考えられる。

そんな中では，生徒Ａのように純粋にマスを数え上げることも大切になってくる。数え上げるということは初歩的ではあるが解決の糸口を何とか探ろうとするには十分なアプローチであるといえる。他にもいろいろな角度で直線を書き込んだり，いろんな大きさの長方形を作ったりと試行錯誤する場面を設定することが大切である。その際には，グループやペアで協働しながら解決の方法を模索することも有意義である。互いに意見を交わすことで新たな発見等も共有される。自らの持つ様々な既習事項を結びつけながら考える場面にもなる。実際，生徒Ｈの考え方の中では，ＡＯと平行な直線の式を求めて，x座標の中点を利用して解決しようとしている。比例や１次関数での学習事項を生かすことができるのである。

「曲線を含む図形の面積」は多角形で近似していけばよいという考えをもっている生徒が多くいて、さらにその多角形はどのようなものがより良いのかを考えていくことが大切である。その中で，色々なアプローチを生徒たち自身で導き出し，それを全体で共有しながら評価・改善したり，よい解決方法を探る場面を設定することができれば，その中で粘り強く考え抜くことを経験することになる。様々なアプローチを出し合えば解決に少しずつ近づいていくことを実感することもできる。また，実際の計算の場面では，電卓やＩＣＴをうまく活用し，ある値に近づいていくことを確かめることも考えられる。

数学的活動を充実させ，その中で粘り強く解決方法を模索しながら解決へ向かう場面を設定するためには，すぐに答えを導くことは難しいかもしれないが、考え続けることで答えに近づいていくことができる題材を取り上げることが有効であると感じる。そしてこの教材はそのような側面をいくつかもっているように感じられた。

今後の課題としては、授業として実践しふさわしい教材であるかを検証する中で，改善点を浮き彫りにすることと，他学年においても，すぐには解決できそうにないが粘り強く考察を続けることで解決に向かうことができるような題材について検討することである。

引用・参考文献

文部科学省（2017）　中学校学習指導要領（平成29年告示）解説　数学編　日本文教出版
http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2018/05/07/1387018_4_2.pdf

林栄治・齋藤憲（2009）　天秤の魔術師　アルキメデスの数学　共立出版株式会社

公益財団法人 日本教材文化研究財団定款

第１章　総　則

（名　称）
第１条　この法人は，公益財団法人 日本教材文化研究財団と称する。

（事務所）
第２条　この法人は，主たる事務所を，東京都新宿区に置く。
２　この法人は，理事会の決議を経て，必要な地に従たる事務所を設置することができる。これを変更または廃止する場合も同様とする。

第２章　目的及び事業

（目　的）
第３条　この法人は，学校教育，社会教育及び家庭教育における教育方法に関する調査研究を行うとともに，学習指導の改善に資する教材・サービス等の開発利用をはかり，もってわが国の教育の振興に寄与することを目的とする。

（事　業）
第４条　この法人は，前条の目的を達成するために，次の各号の事業を行う。
（１）学校教育，社会教育及び家庭教育における学力形成に役立つ指導方法の調査研究と教材開発
（２）家庭の教育力の向上がはかれる教材やサービスの調査研究と普及公開
（３）前二号に掲げる研究成果の発表及びその普及啓蒙
（４）教育方法に関する国内外の研究成果の収集及び一般の利用に供すること
（５）他団体の検定試験問題及びその試験に関係する教材の監修
（６）その他，目的を達成するために必要な事業
２　前項の事業は，日本全国において行うものとする。

第３章　資産及び会計

（基本財産）
第５条　この法人の目的である事業を行うために不可欠な別表の財産は，この法人の基本財産とする。
２　基本財産は，この法人の目的を達成するために理事長が管理しなければならず，基本財産の一部を処分しようとするとき及び基本財産から除外しようとするときは，あらかじめ理事会及び評議員会の承認を要する。

（事業年度）
第６条　この法人の事業年度は，毎年４月１日に始まり翌年３月31日に終わる。

（事業計画及び収支予算）
第７条　この法人の事業計画書，収支予算書並びに資金調達及び設備投資の見込みを記載した書類については，毎事業年度開始の日の前日までに，理事長が作成し，理事会の承認を受けなければならない。これを変更する場合も同様とする。
２　前項の書類については，主たる事務所に，当該事業年度が終了するまでの間備え置き，一般の閲覧に供するものとする。

（事業報告及び決算）
第８条　この法人の事業報告及び決算については，毎事業年度終了後３箇月以内に，理事長が次の各号の書類を作成し，監事の監査を受けた上で，理事会の承認を受けなければならない。承認を受けた書類のうち，第１号，第３号，第４号及び第６号の書類については，定時評議員会に提出し，第１号の書類についてはその内容を報告し，その他の書類については，承認を受けなければならない。
（１）事業報告
（２）事業報告の附属明細書
（３）貸借対照表
（４）正味財産増減計算書
（５）貸借対照表及び正味財産増減計算書の附属明細書
（６）財産目録
２　第１項の規定により報告または承認された書類のほか，次の各号の書類を主たる事務所に５年間備え置き，個人の住所に関する記載を除き一般の閲覧に供するとともに，定款を主たる事務所に備え置き，一般の閲覧に供するものとする。
（１）監査報告
（２）理事及び監事並びに評議員の名簿
（３）理事及び監事並びに評議員の報酬等の支給の基準を記載した書類
（４）運営組織及び事業活動の状況の概要及びこれらに関する数値のうち重要なものを記載した書類

（公益目的取得財産残額の算定）
第９条　理事長は，公益社団法人及び公益財団法人の認定等に関する法律施行規則第48条の規定に基づき，毎事業年度，当該事業年度の末日における公益目的取得財産残額を算定し，前条第２項第４号の書類に記載するものとする。

第４章　評議員

（評議員）
第10条　この法人に，評議員16名以上21名以内を置く。

（評議員の選任及び解任）
第11条　評議員の選任及び解任は，評議員選定委員会において行う。
２　評議員選定委員会は，評議員１名，監事１名，事務局員１名，次項の定めに基づいて選任された外部委員２名の合計５名で構成する。
３　評議員選定委員会の外部委員は，次のいずれにも該当しない者を理事会において選任する。
（１）この法人または関連団体（主要な取引先及び重要な利害関係を有する団体を含む。以下同じ。）の業務を執行する者または使用人
（２）過去に前号に規定する者となったことがある者
（３）第１号または第２号に該当する者の配偶者，三親等内の親族，使用人（過去に使用人となった者も含む。）
４　評議員選定委員会に提出する評議員候補者は，理事会または評議員会がそれぞれ推薦することができる。評議員選定委員会の運営についての詳細は理事会において定める。
５　評議員選定委員会に評議員候補者を推薦する場合には，次に掲げる事項のほか，当該候補者を評議員として適任と判断した理由を委員に説明しなければならない。
（１）当該候補者の経歴
（２）当該候補者を候補者とした理由
（３）当該候補者とこの法人及び役員等（理事，監事及び評議員）との関係
（４）当該候補者の兼職状況
６　評議員選定委員会の決議は，委員の過半数が出席し，

その過半数をもって行う。ただし，外部委員の１名以上が出席し，かつ，外部委員の１名以上が賛成することを要する。
7　評議員選定委員会は，第10条で定める評議員の定数を欠くこととなるときに備えて，補欠の評議員を選任することができる。
8　前項の場合には，評議員選定委員会は，次の各号の事項も併せて決定しなければならない。
（1）当該候補者が補欠の評議員である旨
（2）当該候補者を１人または２人以上の特定の評議員の補欠の評議員として選任するときは，その旨及び当該特定の評議員の氏名
（3）同一の評議員（２人以上の評議員の補欠として選任した場合にあっては，当該２人以上の評議員）につき２人以上の補欠の評議員を選任するときは，当該補欠の評議員相互間の優先順位
9　第７項の補欠の評議員の選任に係る決議は，当該決議後４年以内に終了する事業年度のうち最終のものに関する定時評議員会の終結の時まで，その効力を有する。

（評議員の任期）
第12条　評議員の任期は，選任後４年以内に終了する事業年度のうち最終のものに関する定時評議員会の終結のときまでとする。また，再任を妨げない。
2　前項の規定にかかわらず，任期の満了前に退任した評議員の補欠として選任された評議員の任期は，退任した評議員の任期の満了するときまでとする。
3　評議員は，第10条に定める定数に足りなくなるときは，任期の満了または辞任により退任した後も，新たに選任された評議員が就任するまで，なお評議員としての権利義務を有する。

（評議員に対する報酬等）
第13条　評議員に対して，各年度の総額が500万円を超えない範囲で，評議員会において定める報酬等を支給することができる。
2　前項の規定にかかわらず，評議員には費用を弁償することができる。

第５章　評議員会

（構　成）
第14条　評議員会は，すべての評議員をもって構成する。

（権　限）
第15条　評議員会は，次の各号の事項について決議する。
（1）理事及び監事の選任及び解任
（2）理事及び監事の報酬等の額
（3）評議員に対する報酬等の支給の基準
（4）貸借対照表及び正味財産増減計算書の承認
（5）定款の変更
（6）残余財産の処分
（7）基本財産の処分または除外の承認
（8）その他評議員会で決議するものとして法令またはこの定款で定められた事項

（開　催）
第16条　評議員会は，定時評議員会として毎事業年度終了後３箇月以内に１回開催するほか，臨時評議員会として必要がある場合に開催する。

（招　集）
第17条　評議員会は，法令に別段の定めがある場合を除き，理事会の決議に基づき理事長が招集する。
2　評議員は，理事長に対して，評議員会の目的である事項及び招集の理由を示して，評議員会の招集を請求することができる。

（議　長）
第18条　評議員会の議長は理事長とする。
2　理事長が欠けたときまたは理事長に事故があるときは，評議員の互選によって定める。

（決　議）
第19条　評議員会の決議は，決議について特別の利害関係を有する評議員を除く評議員の過半数が出席し，その過半数をもって行う。
2　前項の規定にかかわらず，次の各号の決議は，決議について特別の利害関係を有する評議員を除く評議員の３分の２以上に当たる多数をもって行わなければならない。
（1）監事の解任
（2）評議員に対する報酬等の支給の基準
（3）定款の変更
（4）基本財産の処分または除外の承認
（5）その他法令で定められた事項
3　理事または監事を選任する議案を決議するに際しては，各候補者ごとに第１項の決議を行わなければならない。理事または監事の候補者の合計数が第21条に定める定数を上回る場合には，過半数の賛成を得た候補者の中から得票数の多い順に定数の枠に達するまでの者を選任することとする。

（議事録）
第20条　評議員会の議事については，法令で定めるところにより，議事録を作成する。
2　議長は，前項の議事録に記名押印する。

第６章　役　員

（役員の設置）
第21条　この法人に，次の役員を置く。
（1）理事　７名以上12名以内
（2）監事　２名または３名
2　理事のうち１名を理事長とする。
3　理事長以外の理事のうち，１名を専務理事及び２名を常務理事とする。
4　第２項の理事長をもって一般社団法人及び一般財団法人に関する法律（平成18年法律第48号）に規定する代表理事とし，第３項の専務理事及び常務理事をもって同法第197条で準用する同法第91条第1項に規定する業務執行理事（理事会の決議により法人の業務を執行する理事として選定された理事をいう。以下同じ。）とする。

（役員の選任）
第22条　理事及び監事は，評議員会の決議によって選任する。
2　理事長及び専務理事並びに常務理事は，理事会の決議によって理事の中から選定する。

（理事の職務及び権限）
第23条　理事は，理事会を構成し，法令及びこの定款で定めるところにより，職務を執行する。
2　理事長は，法令及びこの定款で定めるところにより，この法人の業務を代表し，その業務を執行する。
3　専務理事は，理事長を補佐する。
4　常務理事は，理事長及び専務理事を補佐し，理事会の議決に基づき，日常の事務に従事する。
5　理事長及び専務理事並びに常務理事は，毎事業年度に４箇月を超える間隔で２回以上，自己の職務の執行の状

況を理事会に報告しなければならない。

（監事の職務及び権限）
第24条　監事は，理事の職務の執行を監査し，法令で定めるところにより，監査報告を作成する。
2　監事は，いつでも，理事及び事務局員に対して事業の報告を求め，この法人の業務及び財産の状況の調査をすることができる。

（役員の任期）
第25条　理事の任期は，選任後２年以内に終了する事業年度のうち最終のものに関する定時評議員会の終結のときまでとする。
2　監事の任期は，選任後２年以内に終了する事業年度のうち最終のものに関する定時評議員会の終結のときまでとする。
3　前項の規定にかかわらず，任期の満了前に退任した理事または監事の補欠として選任された理事または監事の任期は，前任者の任期の満了するときまでとする。
4　理事または監事については，再任を妨げない。
5　理事または監事が第21条に定める定数に足りなくなるときまたは欠けたときは，任期の満了または辞任により退任した後も，それぞれ新たに選任された理事または監事が就任するまで，なお理事または監事としての権利義務を有する。

（役員の解任）
第26条　理事または監事が，次の各号のいずれかに該当するときは，評議員会の決議によって解任することができる。
（1）職務上の義務に違反し，または職務を怠ったとき
（2）心身の故障のため，職務の執行に支障がありまたはこれに堪えないとき

（役員に対する報酬等）
第27条　理事及び監事に対して，各年度の総額が300万円を超えない範囲で，評議員会において定める報酬等を支給することができる。
2　前項の規定にかかわらず，理事及び監事には費用を弁償することができる。

第７章　理事会

（構　成）
第28条　理事会は，すべての理事をもって構成する。

（権　限）
第29条　理事会は，次の各号の職務を行う。
（1）この法人の業務執行の決定
（2）理事の職務の執行の監督
（3）理事長及び専務理事並びに常務理事の選定及び解職

（招　集）
第30条　理事会は，理事長が招集するものとする。
2　理事長が欠けたときまたは理事長に事故があるときは，各理事が理事会を招集する。

（議　長）
第31条　理事会の議長は，理事長とする。
2　理事長が欠けたときまたは理事長に事故があるときは，専務理事が理事会の議長となる。

（決　議）
第32条　理事会の決議は，決議について特別の利害関係を有する理事を除く理事の過半数が出席し，その過半数をもって行う。
2　前項の規定にかかわらず，一般社団法人及び一般財団法人に関する法律第197条において準用する同法第96条の要件を満たしたときは，理事会の決議があったものとみなす。

（議事録）
第33条　理事会の議事については，法令で定めるところにより，議事録を作成する。
2　出席した理事長及び監事は，前項の議事録に記名押印する。ただし，理事長の選定を行う理事会については，他の出席した理事も記名押印する。

第８章　定款の変更及び解散

（定款の変更）
第34条　この定款は，評議員会の決議によって変更することができる。
2　前項の規定は，この定款の第３条及び第４条並びに第11条についても適用する。

（解　散）
第35条　この法人は，基本財産の滅失によるこの法人の目的である事業の成功の不能，その他法令で定められた事由によって解散する。

（公益認定の取消し等に伴う贈与）
第36条　この法人が公益認定の取消しの処分を受けた場合または合併により法人が消滅する場合（その権利義務を承継する法人が公益法人であるときを除く。）には，評議員会の決議を経て，公益目的取得財産残額に相当する額の財産を，当該公益認定の取消しの日または当該合併の日から１箇月以内に，公益社団法人及び公益財団法人の認定等に関する法律第５条第17号に掲げる法人または国若しくは地方公共団体に贈与するものとする。

（残余財産の帰属）
第37条　この法人が清算をする場合において有する残余財産は，評議員会の決議を経て，公益社団法人及び公益財団法人の認定等に関する法律第５条第17号に掲げる法人または国若しくは地方公共団体に贈与するものとする。

第９章　公告の方法

（公告の方法）
第38条　この法人の公告は，電子公告による方法により行う。
2　事故その他やむを得ない事由によって前項の電子公告を行うことができない場合は，官報に掲載する方法により行う。

第10章　事務局その他

（事務局）
第39条　この法人に事務局を設置する。
2　事務局には，事務局長及び所要の職員を置く。
3　事務局長及び重要な職員は，理事長が理事会の承認を得て任免する。
4　前項以外の職員は，理事長が任免する。
5　事務局の組織，内部管理に必要な規則その他については，理事会が定める。

（委　任）

第40条　この定款に定めるもののほか，この定款の施行について必要な事項は，理事会の決議を経て，理事長が定める。

附　則

1　この定款は，一般社団法人及び一般財団法人に関する法律及び公益社団法人及び公益財団法人の認定等に関する法律の施行に伴う関係法律の整備等に関する法律第106条第１項に定める公益法人の設立の登記の日から施行する。

2　一般社団法人及び一般財団法人に関する法律及び公益社団法人及び公益財団法人の認定等に関する法律の施行に伴う関係法律の整備等に関する法律第106条第１項に定める特例民法法人の解散の登記と，公益法人の設立の登記を行ったときは，第６条の規定にかかわらず，解散の登記の日の前日を事業年度の末日とし，設立の登記の日を事業年度の開始日とする。

3　第22条の規定にかかわらず，この法人の最初の理事長は杉山吉茂，専務理事は新免利也，常務理事は星村平和及び中井武文とする。

4　第11条の規定にかかわらず，この法人の最初の評議員は，旧主務官庁の認可を受けて，評議員選定委員会において行うところにより，次に掲げるものとする。

有田　和正	尾田　幸雄
梶田　叡一	角屋　重樹
亀井　浩明	北島　義斉
木村　治美	佐島　群巳
佐野　金吾	清水　厚実
田中　博之	玉井美知子
中川　栄次	中里　至正
中洌　正堯	波多野義郎
原田　智仁	宮本　茂雄
山極　　隆	大倉　公喜

5　昭和45年の法人設立時の理事及び監事は，次のとおりとする。

理事	（理事長）	平澤　興
理事	（専務理事）	堀場正夫
理事	（常務理事）	鯵坂二夫
理事	（常務理事）	渡辺　茂
理事	（常務理事）	近藤達夫
理事		平塚益徳
理事		保田　與重郎
理事		奥西　保
理事		北島織衛
理事		田中克己
監事		高橋武夫
監事		辰野千壽
監事		工藤　清

賛助会員規約

第１条　公益財団法人日本教材文化研究財団の事業目的に賛同し，事業その他運営を支援するものを賛助会員(以下｢会員｣という）とする。

第２条　会員は，法人，団体または個人とし，次の各号に定める賛助会費（以下「会員」という）を納めるものとする。

（１）法人および団体会員	一口30万円以上
（２）個人会員	一口６万円以上
（３）個人準会員	一口６万円未満

第３条　会員になろうとするものは，会費を添えて入会届を提出し，理事会の承認を受けなければならない。

第４条　会員は，この法人の事業を行う上に必要なことがらについて研究協議し，その遂行に協力するものとする。

第５条　会員は次の各号の事由によってその資格を失う。
（１）脱退
（２）禁治産および準禁治産並びに破産の宣告
（３）死亡，失踪宣告またはこの法人の解散
（４）除名

第６条　会員で脱退しようとするものは，書面で申し出なければならない。

第７条　会員が次の各号（１）に該当するときは，理事現在数の４分の３以上出席した理事会の議決をもってこれを除名することができる。
（１）会費を滞納したとき
（２）この法人の会員としての義務に違反したとき
（３）この法人の名誉を傷つけまたはこの法人の目的に反する行為があったとき

第８条　既納の会費は，いかなる事由があってもこれを返還しない。

第９条　各年度において納入された会費は，事業の充実およびその継続的かつ確実な実施のため，その半分を管理費に使用する。

内閣府所管

公益財団法人　日本教材文化研究財団

理事・監事・評議員

(1) 理事・監事名簿（敬称略）12名

（平成30年８月31日現在）

役　名	氏　名	就任年月日	就重	職務･専門分野	備　考
理事長	村上　和雄	平成30年６月１日 （理事長就任 H.26.3.7）	重	法人の代表 業務の総理	筑波大学名誉教授　全日本家庭教育研究会総裁
専務理事	新免　利也	平成30年６月１日	重	事務総括 事業運営	(株)新学社執行役員東京支社長
常務理事	角屋　重樹	平成30年６月１日	重	理科教育	広島大学名誉教授　日本体育大学教授
常務理事	中井　武文	平成30年６月１日	重	財務	(株)新学社代表取締役会長
理　事	北島　義俊	平成30年６月１日	重	財務	大日本印刷(株)代表取締役会長
理　事	杉山　吉茂	平成30年６月１日	重	数学教育	元早稲田大学教授　東京学芸大学名誉教授
理　事	中川　栄次	平成30年６月１日	重	財務	(株)新学社代表取締役社長
理　事	中洌　正堯	平成30年６月１日	重	国語教育学	元兵庫教育大学学長　兵庫教育大学名誉教授
理　事	原田　智仁	平成30年６月１日	重	社会科教育	兵庫教育大学名誉教授　滋賀大学教育学部特任教授
理　事	菱村　幸彦	平成30年６月１日	重	教育行政 教育法規	元文部省初中局長　国立教育政策研究所名誉所員
監　事	中合　英幸	平成30年６月１日	重	財務	(株)新学社執行役員
監　事	橋本　博文	平成30年６月１日	新	財務	大日本印刷(株)常務執行役員

（50音順）

(2) 評議員名簿（敬称略）18名

役　名	氏　名	就任年月日	就重	担当職務	備　考
評議員	秋田喜代美	平成28年12月２日	重	教育心理学･発達心理学 学校教育学	東京大学大学院教授
評議員	浅井　和行	平成30年６月１日	重	教育工学 メディア教育	京都教育大学副学長，大学院連合教職実践研究科長，教授
評議員	安彦　忠彦	平成30年６月１日	重	教育課程論 教育評価･教育方法	名古屋大学名誉教授　神奈川大学特別招聘教授
評議員	亀井　浩明	平成30年６月１日	重	初等中等教育 キャリア教育	元東京都教委指導部長　帝京大学名誉教授
評議員	北島　義斉	平成30年６月１日	重	財務	大日本印刷(株)代表取締役社長
評議員	櫻井　茂男	平成30年６月１日	重	認知心理学･発達心理学 キャリア教育	筑波大学名誉教授
評議員	佐藤　晴雄	平成28年12月２日	就	教育経営学・教育行政学 社会教育学･青少年教育論	日本大学教授
評議員	佐野　金吾	平成30年６月１日	重	社会科教育 教育課程･学校経営	元東京家政学院中・高等学校長　全国図書教材協議会会長
評議員	清水　美憲	平成30年６月１日	重	数学教育学 評価論	筑波大学人間系教授
評議員	下田　好行	平成30年６月１日	重	国語教育 教育方法学	元国立教育政策研究所総括研究官　東洋大学教授
評議員	髙木　展郎	平成30年６月１日	重	国語科教育学 教育方法学	横浜国立大学名誉教授
評議員	田中　博之	平成30年６月１日	重	教育工学 教育学	早稲田大学教職大学院教授
評議員	堀井　啓幸	平成28年12月２日	就	教育経営学 教育環境論	常葉大学教授
評議員	前田　英樹	平成30年６月１日	重	フランス思想 言語論	立教大学名誉教授
評議員	松浦　伸和	平成30年６月１日	重	英語教育学	広島大学大学院教授
評議員	峯　　明秀	平成30年６月１日	重	社会科教育学	大阪教育大学教授
評議員	油布佐和子	平成28年12月２日	就	教育社会学･学校の社会学 教師教職研究･児童生徒の問題行動	早稲田大学教育・総合科学学術院教授
評議員	吉田　武男	平成30年６月１日	重	道徳教育論 家庭教育論	筑波大学人間系教授

（50音順）

調査研究シリーズ 73

これからの時代に求められる資質・能力を育成するための数学科学習指導の研究

平成30年９月30日発行
編　集／公益財団法人　日本教材文化研究財団
発行人／新免　利也（専務理事）
発行所／公益財団法人　日本教材文化研究財団
〒162-0841　東京都新宿区払方町14番地１
電話 03-5225-0255　FAX 03-5225-0256
http://www.jfecr.or.jp

表紙デザイン：（株）スタジオ・ビーム
印刷（株）天理時報社